Corrections/indications pour la feuille de TD 6, exos 4, 5 et 7

Exercice 4

1. Pour montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$, on calcule le rang de la matrice $(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_3)$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Il y a trois pivots donc la matrice est de rang 3 qui est la dimension de $\mathbb{R}^3$. Par conséquent, $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

La matrice de passage de $\mathcal{B}_3$ à $\mathcal{B}'$ est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs de $\mathcal{B}'$ écrits dans $\mathcal{B}_3$:

$$P_{\mathcal{B}_3}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

2. Les coordonnées dans $\mathcal{B}_3$ et dans $\mathcal{B}'$ sont reliées par la relation : $P_{\mathcal{B}_3}^{\mathcal{B}'} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

On a donc : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x' + y' - z' \\ 2x' - y' + z' \\ 3x' + y' - 2z' \end{pmatrix}$

3. Inversement, $P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}_3} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, avec $P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}_3} = (P_{\mathcal{B}_3}^{\mathcal{B}'})^{-1}$ que l'on calcule par l'algorithme de Gauss–Jordan :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -5 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & -4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -6 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 & -1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 & -1 \end{array}\right)$$

Ainsi, $P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 7 & 5 & -1 \\ 5 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, et donc $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 7 & 5 & -1 \\ 5 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ 7x + 5y - z \\ 5x + 4y - z \end{pmatrix}$.

4. $\overrightarrow{u} \in \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2)$ si et seulement si $z' = 0$, c'est-à-dire $5x + 4y - z = 0$ (équation de P dans la base canonique).

5. $\overrightarrow{u} \in \mathrm{Vect}(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)$ si et seulement si $z = 0$, c'est-à-dire $3x' + y' - 2z' = 0$ (équation de E dans la base $\mathcal{B}'$).

Exercice 5

1. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}_3} \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_3}(f) \cdot P_{\mathcal{B}_3}^{\mathcal{B}'}$, c'est-à-dire : $A' = (P_{\mathcal{B}_3}^{\mathcal{B}'})^{-1} \cdot A \cdot P_{\mathcal{B}_3}^{\mathcal{B}'}$

2. À partir de la première question, on obtient par le calcul :

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 7 & 5 & -1 \\ 5 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 4 & -1 \\ -5 & -3 & 1 \\ 10 & 8 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On peut aussi obtenir A' en calculant l'image des vecteurs de $\mathcal{B}'$ par f et en les écrivant dans la base $\mathcal{B}'$:

$$\left.\begin{array}{l} f(\overrightarrow{u}_1) = (A\overrightarrow{u}_1)_{\mathcal{B}_3} = -\overrightarrow{e}_1 + 2\overrightarrow{e}_2 + 3\overrightarrow{e}_3 = \overrightarrow{u}_1 \\ f(\overrightarrow{u}_2) = (A\overrightarrow{u}_2)_{\mathcal{B}_3} = \overrightarrow{e}_1 - \overrightarrow{e}_2 + \overrightarrow{e}_3 = \overrightarrow{u}_2 \\ f(\overrightarrow{u}_3) = (A\overrightarrow{u}_3)_{\mathcal{B}_3} = \overrightarrow{0} \end{array}\right\} \text{ et donc } A' = \Big(\big(f(\overrightarrow{u}_1)\big)_{\mathcal{B}'} \Big| \big(f(\overrightarrow{u}_2)\big)_{\mathcal{B}'} \Big| \big(f(\overrightarrow{u}_3)\big)_{\mathcal{B}'} \Big) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, A' est la matrice de la projection sur le plan engendré par les deux premiers vecteurs de $\mathcal{B}'$, parallèlement au troisième : f est donc la projection sur le plan engendré par $(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2)$ parallèlement à $\overrightarrow{u}_3$.

3. Comme f est une projection, elle vérifie $f \circ f = f$. Il s'agit d'une propriété de f qui ne dépend pas de la base dans laquelle on écrit sa matrice, et donc $A^2 = A$ (et $(A')^2 = A'$, ce qui était évident sous cette forme).

Exercice 7

1. On échelonne la matrice A et on obtient : $\text{rang}\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ -2 & 4 & -6\\ -1 & 2 & -3\end{pmatrix} = \text{rang}\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = 1.$

L'image de A est donc de dimension 1 et sa première colonne, correspondant au pivot, forme une base de $\text{im}(f)$, c'est à dire le vecteur $\vec{v}_1 = (1, -2, -1)$. De plus le théorème du rang donne $\dim \ker f = 3 - \text{rang}(f) = 2$.

2. Pour trouver une base de $\ker(f)$, on résout le système $AX = 0$ qui est équivalent, d'après l'échelonnement réalisé à la question **1.**, à l'équation $x = 2y - 3z$ (ceci est donc une équation cartésienne de $\ker(f)$).

En remplaçant les inconnues non principales (y, z) par $(1, 0)$ et $(0, 1)$ respectivement, on obtient une base de $\ker(f)$, composée des deux vecteurs $\vec{v}_2 = (2, 1, 0)$ et $\vec{v}_3 = (-3, 0, 1)$.

Montrons que $\ker f$ et $\text{im} f$ sont supplémentaires. Comme f est un endomorphisme, le théorème du rang implique que $\dim \ker(f) + \dim \text{im}(f) = 3$. Ainsi, il suffit de montrer que leur intersection est réduite au vecteur nul.

Or un élément de $\text{im}(f)$ est de la forme $(\alpha, -2\alpha, -\alpha)$. Il appartient donc également à $\ker(f)$ si et seulement s'il satisfait l'équation trouvée au-dessus, et donc si et seulement si $\alpha = -4\alpha + 3\alpha = -\alpha$ et donc si et seulement si $\alpha = 0$. Tout élément de $\text{im}(f) \cap \ker(f)$ est nul et ces deux espaces sont donc bien supplémentaires.

Remarque. On aurait aussi pu montrer que l'union de leurs bases (déterminées précédemment) forme une base de $\mathbb{R}^3$. En effet,

$$\text{rang}\begin{pmatrix}-3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix} = \text{rang}\begin{pmatrix}-3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\end{pmatrix} = \text{rang}\begin{pmatrix}-3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & \frac{2}{3}\end{pmatrix} = 3$$

et donc la famille composée des trois vecteurs $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ est libre, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

3. $f(1, -2, -1) = (2, -4, -2) = 2\,(1, -2, -1)$

4. On cherche une base $\mathcal{B}'$ dans laquelle f a pour matrice A'. Comme les colonnes de A' sont les images des vecteurs de $\mathcal{B}'$ par f, les deux premiers vecteurs doivent être dans le noyau de f. On choisit donc $\vec{u_1} = (2, 1, 0)$ et $\vec{u_2} = (-3, 0, 1)$.

La question précédente indique que si l'on pose $\vec{u_3} = (1, -2, -1)$, on a alors $f(\vec{u_3}) = 2\vec{u_3}$ ce qui va donner ce que l'on cherche dans la troisième colonne.

Par la question **2.**, on sait que la famille $\mathcal{B}' = (\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$ puisque $\text{im}(f)$ et $\ker(f)$ sont en somme directe. Et par l'analyse que nous avons faite, $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = A'$.

5. Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. On a alors $A' = P^{-1} \cdot A \cdot P$, ou encore en multipliant à gauche par P et à droite par P^{-1}, $A = P \cdot A' \cdot P^{-1}$. On passe à la puissance n, et on utilise l'associativité du produit matriciel :

$$A^n = (PA'P^{-1})^n = \underbrace{(PA'P^{-1}) \cdot (PA'P^{-1}) \cdot \ldots \cdot (PA'P^{-1})}_{n \text{ fois}} = PA' \underbrace{(P^{-1} \cdot P)\, A' \ldots (P^{-1} \cdot P)\, A'}_{n-1 \text{ fois}} P^{-1} = P(A')^n P^{-1}.$$

Comme $(A')^n = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}^n = 2^{n-1}A'$, on en déduit : $A^n = P(A')^nP^{-1} = P \cdot (2^{n-1}A')^{-1} = 2^{n-1}(PA'P^{-1}) = 2^{n-1}A$.