UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY

M1 MEEF Premier degré
Université Paris-Saclay
Année académique 2023–2024

EC 122

Connaissances de Mathématiques

Mémos et TD

Delphine Fillion et Rémi Leclercq

Table des matières

Thème 1 | Le Nombre

Memo

• **Qu'est-ce que le nombre ?**

Le nombre est un concept désignant une relation entre des mesures de grandeur. Il sert à dénombrer (répondre à la question "combien"), quantifier, comparer, ordonner (énumérer), mesurer des grandeurs, estimer la taille d'une collection...

Il est utile pour prédire, parler de mesure, mettre en relation des grandeurs sans voir les collections. Il a deux grandes fonctions : **ordinale** (organiser, ranger, ordonner, classer, numéroter, trier, compter... *cf Vidéo Les bandes en images*) et **cardinale** (estimer, comparer, dénombrer, quantifier, mesurer, calculer...*cf Vidéo Le Bus Consigne*).
Il est défini par une valeur qui est unique. Pour l'utiliser, on peut l'écrire avec des chiffres parmi 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9, ou avec des lettres, des mots, ou avec d'autres symboles.

Un nombre a de nombreuses écritures, tandis qu'il n'a qu'une seule valeur.

En **cycle 1**, la construction du nombre entier s'appuie sur :

— la notion de quantité,

— sa codification orale et écrite,

— l'acquisition de la suite orale des nombres,

— l'usage du dénombrement.

Vidéo Tour d'appel GS `https://www.youtube.com/watch?v=7quHGbemeiM` (fabrication de la tour modèle de 0 min à 6 min 20)

⚠ La connaissance de la suite orale des nombres ne constitue pas l'apprentissage du nombre mais y contribue.

⚠ Les activités de dénombrement doivent éviter le comptage numérotage. cf. *Vidéo Conférence de Rémi Brissiaud : `https://www.youtube.com/watch?v=PgfX3vjSB2s` (de 33 min 40 à 37 min 40)*

En **cycle 2** : la compréhension du nombre entier s'appuie sur sa désignation :

— une écriture en chiffres,

— un nom à l'oral,

— des compositions/décompositions fondées sur les propriétés numériques, ainsi que les décompositions en unités de numération (unités, dizaines...).

Vidéo Les paquets de 10 `https://www.reseau-canope.fr/mathematiques-stella-baruk/video/la-numeration/compter-les-paquets-de-10`

En **cycle 3** : la construction des nombres se poursuit :

— par le système de désignation des nombres entiers, notamment pour les grands nombres,

— l'introduction de la connaissance des fractions et des nombres décimaux.

Video Comprendre et nommer les fractions avec les réglettes Cuisenaire `https://www.youtube.com/watch?v=7TNnwCGAJ70`

• **Pourquoi enseigner le nombre ?**

— **Résoudre certains problèmes pratiques rencontrés :** Conserver la mémoire de la quantité, garder la mémoire d'une position, anticiper.

— **Permettre à tous les enfants de devenir des citoyens éclairés et libres.**

Deux aspects du nombre sont à construire en parallèle : l'étude des nombres et la résolution des problèmes à l'aide des nombres :

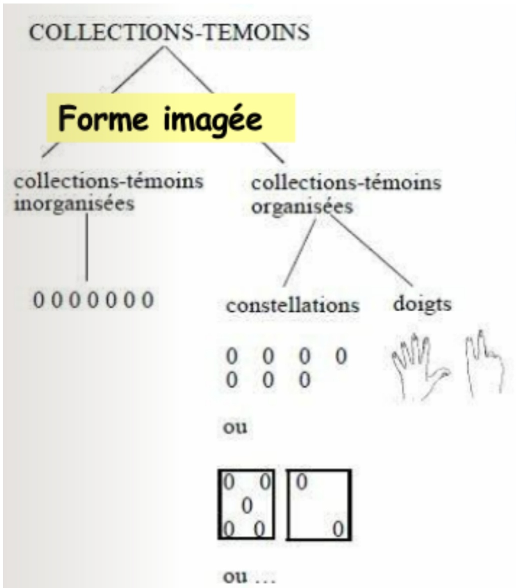
— **Le nombre objet** : acquérir progressivement les connaissances nécessaires sur les nombres afin de pouvoir les utiliser dans la résolution de problème : les mots-nombres, l'écriture des nombres (des chiffres ...), les constellations.
Les connaissances sont construites à partir de la comptine numérique, des affichages, des étiquettes nombres, de la bande numérique.

— **Le nombre outil** : rencontrer à l'école des problèmes de référence, maîtriser les connaissances et les techniques nécessaires à la résolution de ces problèmes, acquérir une autonomie dans l'utilisation du nombre pour résoudre les problèmes.

• Les représentations des nombres

— **Les mots nombres :** Ils sont utilisés dès la maternelle et permettent d'exprimer le nombre à l'oral. Ils respectent l'aspect positionnel des chiffres : "trois-mille-sept-cent-quatre-vingts" ou pas : "trois unités huit centaines et deux milliers".

— **Les collections témoins :** Elles servent à visualiser les quantités et à faire mémoriser l'association d'un mot-nombre à une quantité. Elles sont très utilisées en Maternelle et affichées dans les classes comme support de référence.



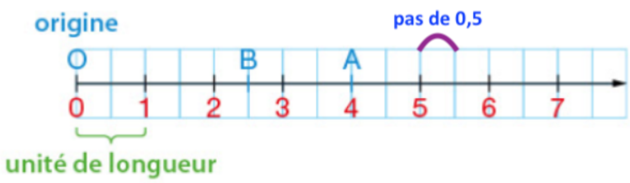
— **L'écriture en mots nombres** en script et en cursive.

— **L'écriture en chiffre / l'écriture décimale :** C'est l'écriture finie d'un nombre à l'aide de chiffres et du **marqueur d'unité** qu'on appelle virgule.

Attention, parfois le marqueur d'unité est caché (s'il n'y a que des 0 derrière), et parfois la liste de chiffres après la virgule ne s'arrête jamais donc **certains nombres ne peuvent pas s'écrire de cette manière.**

Exemples : 37 peut s'écrire 37,0 mais n'ayant que des 0 après le marqueur d'unité, il est inutile de les écrire et donc de faire apparaître la virgule.
Le résultat de la division $2/3 \approx 0,66666667$ *n'a pas d'écriture décimale, on ne peut en donner qu'une valeur approchée à la précision voulue.*

— **L'abscisse d'un point :** C'est le nombre qui repère ce point sur un axe gradué avec une origine et une unité de longueur qui donne le pas à respecter pour placer des points et lire des abscisses.



— **L'écriture fractionnaire :** C'est une écriture qui représente le résultat d'une division entre 2 nombres. Le nombre à diviser s'appelle **le numérateur** (en haut), le nombre par lequel on divise, s'appelle **le dénominateur** (en bas).

On parle aussi de **quotient**, ou de **rapport**.

Les fractions : Une fraction est un cas particulier de l'écriture fractionnaire, lorsque les deux nombres du quotient sont des **entiers**.

En cycle 2-3, on introduit cette écriture par les fractions de l'unité du type $\dfrac{1}{B}$ qui représente la taille d'une part lorsqu'on divise l'unité en B parts, avec (évidemment !) $B \neq 0$.

Le quotient $\dfrac{A}{B}$ avec A et B entiers (et $B \neq 0$) est la quantité égale à A fois $\dfrac{1}{B}$, vu comme partage de l'unité ; $\dfrac{A}{B} = A \times \dfrac{1}{B}$.

Exemples : $\frac{5}{2}$ *est une écriture fractionnaire qui représente le rapport entre* 5 *et* 2*. C'est* $5 \times \frac{1}{2}$.

La fraction $\frac{1}{10}$ *est le quotient de 1 par 10, c'est la taille d'une part qui représente l'unité divisé en 10, c'est un dixième.*

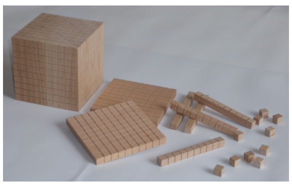
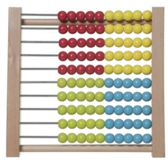
Les fractions décimales : Une fraction décimale est un quotient d'un nombre entier par une puissance de 10, c'est une façon de représenter n'importe quelle quantité dans une unité de numération.

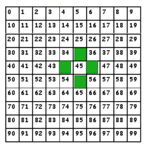
Exemple : $\dfrac{4027}{100} = 4027 \times \dfrac{1}{100} = 4027$ *centièmes* $= 40,27$

• **Notre système de numération**

Notre système de numération est basé sur deux principes : **un aspect positionnel** et **un aspect groupements-échanges**. Il faut 10 unités de numération pour construire une unité de numération supérieure.

Le matériel de numération utilisé en classe permet de manipuler et de faire comprendre ce principe : matériel multibase, boulier, abaque, fourmillons, etc.


Un site pour utiliser un outil de numération en numérique : `https://micetf.fr/`

Le système métrique est mis en relation avec le système de numération pour lui donner plus de lisibilité.
Le nombre au cycle 2, Sceren CNDP :

CM1/CM2	Les nombres et les unités de grandeur														
	Les multiples												Les sous–multiples		
	x100 000 000 000	x10 000 000 000	x1 000 000 000	x100 000 000	x10 000 000	x1 000 000	x 100 000	x 10 000	x 1000	x 100	x 10		: 10	: 100	: 1000
La numération	centaines	dizaines	unités	centaines	dizaines	unités	centaines	dizaines	unités	centaines	dizaines	unités			
	les milliards			les millions			les milliers			les unités simples					
Les préfixes									**kilo**	**hecto**	**déca**		**déci**	**centi**	**milli**
mesures de longueurs									km	hm	dam	m	dm	cm	mm
mesures de masses						t	q		kg	hg	dag	g	dg	cg	mg
mesures de contenance										hL	daL	L	dL	cL	mL

TD

En tant que PES vous devrez enseigner les mathématiques de la Maternelle au CM2. L'approche n'est évidemment pas la même suivant le cycle et le niveau de classe. Les exercices proposés vous permettent de vérifier que vous connaissez les notions de bases sur la numération, les différents nombres rencontrés du cycle 1 au cycle 4, les représentations de ces nombres.

Compétences :
— Comprendre la base de la numération,
— Savoir représenter un nombre de plusieurs façons,
— Connaître les relations entre les différentes représentations.

Exercice 1. *D'après Transmaths 2016 6ème*

1. Écrire plus simplement chaque nombre : 0027,8 ; 4,050 ; 0080,0202.
2. Recopier et compléter : 1 m $= \frac{...}{...}$ km.
3. Le pont de l'île d'Oléron mesure 2,862 km de long. Exprimer cette longueur en mètres.
4. Recopier et compléter

$2,754 = (... \times \frac{1}{10}) + \frac{...}{1000}$ $\qquad$ $2,754 = (... \times \frac{1}{100}) + \frac{...}{1000}$

5. Pour 5245,913, indiquer le chiffre des centaines et le nombre de centaines puis le chiffre des centièmes et le nombre de centièmes.

Exercice 2. Recopier et compléter les égalités suivantes par une puissance de 10 puis une unité de numération (dizaines, centièmes ...).

$40000 = 4 \times ... = 40$ ... $\qquad$ $\frac{4}{10} = \frac{4}{1000} \times ... = 4$ ...

$0,00007 = 7 \times ... = 7$ ... $\qquad$ $\frac{14540}{100} = \frac{1454}{10} \times ... = 145{,}4$ ...

$5700000 = 0,570 \times ... = 5{,}7$ ... $\qquad$ $\frac{3,2}{100} = \frac{3,2}{1000} \times ... = 32$ ...

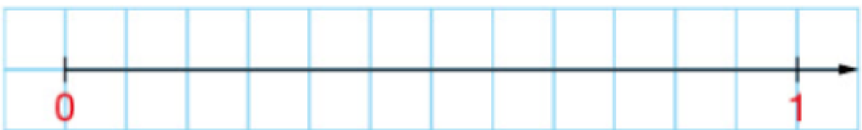
$0,0098 = 98 \times ... = 9{,}8$ ... $\qquad$ $\frac{56780}{100} = \frac{5,678}{10} \times ... = 5{,}678$ ...

Exercice 3. Trouver l'écriture décimale des nombres décimaux suivants : 8 centaines et 9 millièmes ; 87 centièmes ; 0,9 millions ; $6 \times 1000 + 7 + \frac{1}{100}$; $\frac{167}{10}$; $\frac{7}{5}$; $\frac{23}{8}$; 10^6; 10^{-7} ; 13,5 milliards.

Exercice 4. Déterminer la décomposition décimale des nombres suivants : 657,98 ; 67 098 centièmes ; 30,98 milliers ; 589 dixièmes.

Exercice 5. Trouver une écriture fractionnaire des nombres suivants : 103 unités et 5 centièmes ; 8,97 ; 0,000004 ; un tiers ; le quart de 17 ; 109 millièmes ; 20 septièmes.

Exercice 6. *D'après Transmaths 2016 6ème*



On souhaite placer les nombres $\frac{13}{12}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{5}{4}$ et $\frac{3}{2}$.

1. (a) En combien de carreaux est partagée l'unité ?
(b) Quelle fraction de l'unité représente un carreau ?
(c) Reproduire la demi-droite graduée et placer $\frac{13}{12}$.

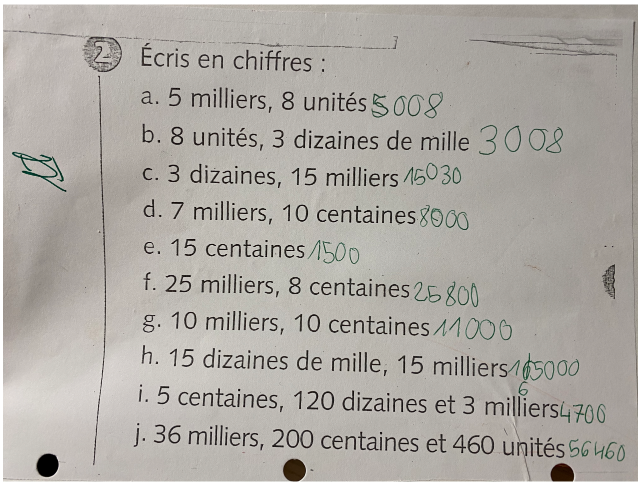
2. (a) Partager l'unité en 6 parties identiques.

(b) Placer alors $\frac{5}{6}$.

3. De façon analogue, placer $\frac{5}{4}$ et $\frac{3}{2}$.

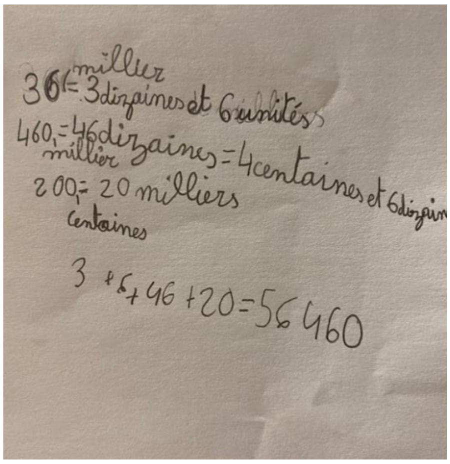
Exercice 7. Sur une portion de demi-droite graduée, placer $8+\frac{1}{3}$, $10-\frac{2}{3}$ et $7+\frac{5}{3}$.

Exercice 8. *Analyse de production : exercice de CE2*



2 Écris en chiffres :

a. 5 milliers, 8 unités 5008
b. 8 unités, 3 dizaines de mille 3008
c. 3 dizaines, 15 milliers 15030
d. 7 milliers, 10 centaines 8000
e. 15 centaines 1500
f. 25 milliers, 8 centaines 25800
g. 10 milliers, 10 centaines 11000
h. 15 dizaines de mille, 15 milliers 165000
i. 5 centaines, 120 dizaines et 3 milliers 4700
j. 36 milliers, 200 centaines et 460 unités 56460



1. Donner les deux aspects de l'écriture chiffrée des nombres que fait travailler cet exercice en précisant dans quelles questions chaque aspect est sollicité.
2. Expliquer le rôle des zéros dans 15 030.
3. Analyser la production de l'élève pour le j. en mettant en évidence ses compétences concernant les propriétés de l'écriture des nombres et proposer une écriture correcte de la dernière ligne.

Exercice 9. Analyse de production d'élèves de cycle 3

Cette partie, originale, a été conçue par le site de Saint-Germain (Académie de Versailles). Elle s'appuie sur les travaux de Christine Chambris sur les unités de la numération (https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00338665), puis dénombrement en unités (https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/revues/grand-n/consultation/numero-89-grand-n/3-consolider-la-maitrise-de-la-numeration-des-entiers-et-des-grandeurs-le-systeme-metrique-peut-il-etre-utile--479033.kjsp ; contribution aux travaux d'élaboration des programmes par le CSP https://www.education.gouv.fr/media/14669/download). Frédérick Tempier (https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00921691) a conçu et développe une ressource en ligne (http://numerationdecimale.free.fr/) dont sont extraites les productions d'élèves et qui a inspiré la tâche « élève » présentée dans la question 5.

1) Rappeler au moins deux caractéristiques de notre système de numération.
2) Voici les réponses de trois élèves de CE2, Théo, Camille et Elisa, aux mêmes questions d'un exercice :

Théo, CE2

3. Complète

a. 8 dizaines + 5 unités = ..85......
b. 1 centaine + 9 dizaines + 3 unités = ..193....
c. 6 centaines + 9 unités = ..69.......
d. 7 unités + 2 dizaines + 4 centaines = ..724..
e. 3 dizaines + 6 centaines = ..36......

Camille, CE2

3. Complète

a. 8 dizaines + 5 unités = ..85......
b. 1 centaine + 9 dizaines + 3 unités = ..193....
c. 6 centaines + 9 unités = ..69.......
d. 7 unités + 2 dizaines + 4 centaines = ..427..
e. 3 dizaines + 6 centaines = ..63......

Elisa, CE2

3. Complète

a. 8 dizaines + 5 unités = ..85........
b. 1 centaine + 9 dizaines + 3 unités = 193......
c. 6 centaines + 9 unités = 609.....
d. 7 unités + 2 dizaines + 4 centaines = ..427..
e. 3 dizaines + 6 centaines = 630.....

a) Identifier les erreurs de Théo et émettre une hypothèse sur la procédure qu'il a mise en œuvre.
b) Identifier les réussites et les erreurs de Camille.
c) Analyser les réponses d'Elisa.
d) Sur quelle(s) caractéristique(s) de notre numération porte cet exercice ?

3) Voici les réponses d'Elisa (la même élève que précédemment) à un autre exercice :

Elisa, CE2

5. Complète

a. 2 dizaines + 15 unités = ..35......
b. 4 centaines + 10 dizaines = .410.....
c. 5 centaines + 12 dizaines + 3 unités = 519.......
d. 6 centaines + 21 dizaines + 14 unités = 635.....

Identifier les erreurs de Elisa et émettre une hypothèse sur la procédure qu'elle a mise en œuvre dans cet exercice.

4) Voici la réponse de Théo (le même élève que précédemment) à une série de questions :

Théo, CE2

6. Complète

c'est pas faire

a. 5 dizaines c'est aussi ……… unités

b. 80 unités c'est aussi ……… dizaines

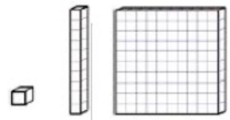
c. 1 centaine c'est aussi ……… dizaines

d. 3 centaines c'est aussi ……… unités

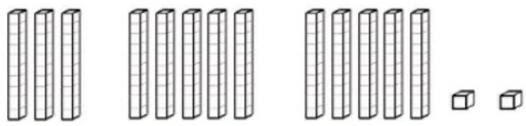
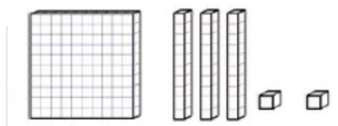
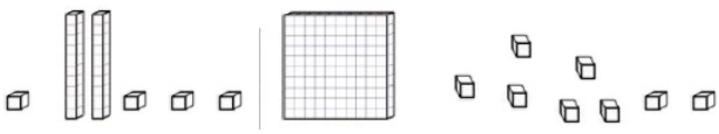
e. 60 dizaines c'est aussi ……… centaines

Quelles connaissances sont nécessaires pour savoir faire cet exercice ?

5) Un matériel de numération connu des élèves peut être mis à leur disposition ; il est composé de cubes seuls, de « barres » de dix cubes soudés et de « plaques » carrées de cent cubes soudés qu'on a l'habitude de représenter par :



La maîtresse projette la représentation de trois collections A, B et C :

Collection A	
Collection B	
Collection C	

a) Donner un argument pour justifier le choix opéré par la maîtresse de présenter ces trois collections.

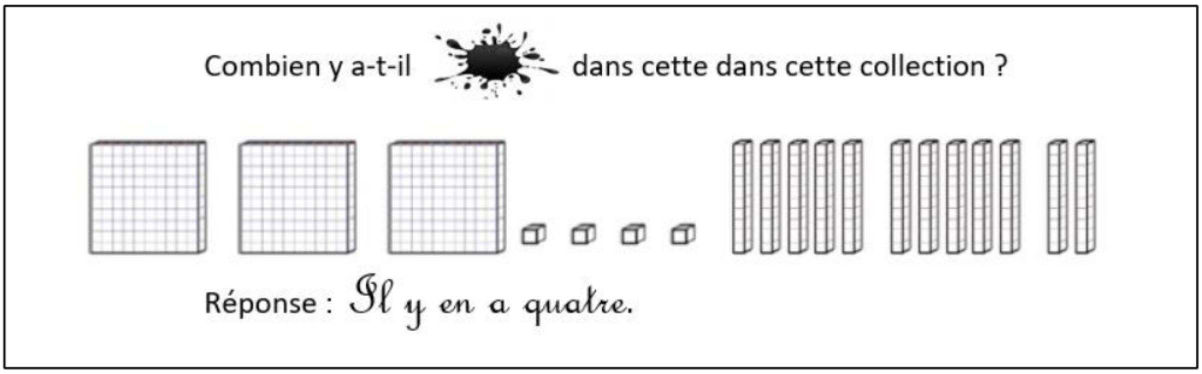
b) La maîtresse demande : « *Combien y a-t-il de dizaines dans chacune des collections ?* »
Expliciter une procédure que peut mettre en œuvre un élève qui répond qu'il y a 13 dizaines dans la collection A, 3 dizaines dans la collection B et 2 dizaines dans la collection C et émettre une hypothèse sur la signification qu'il donne au mot « dizaine ».

c) Quelle(s) aides(s) sa maîtresse peut lui suggérer pour qu'il détermine correctement le nombre de dizaines de la collection B puis de la collection C ?

d) La maîtresse demande ensuite : « *Combien y a-t-il d'unités dans chacune des collections* ? »
Anticiper une réponse erronée pour le nombre d'unités de la collection B puis de la collection C et émettre une hypothèse sur leur origine.

e) Donner un exemple de trace écrite à laquelle la phase de synthèse de cette activité pourrait aboutir.

6) La maîtresse projette ensuite un extrait du cahier d'une élève en précisant que la réponse de l'élève est correcte :



La maîtresse demande ensuite : « *Quels mots sont cachés sous la tâche d'encre ?* ». Quelle erreur peut anticiper la maîtresse ? Préciser la réponse correcte à sa question et sa justification.

7) On range le matériel de numération et on ne projette aucune représentation des collections. La maîtresse demande ensuite à Théo et à Camille :

- *« Combien y a-t-il d'unités dans 6 centaines et 9 unités ? »*
- *« Combien y a-t-il d'unités y a-t-il dans 69 ? »*

a) Pourquoi la maîtresse s'adresse-t-elle à Théo et à Camille sans s'adresser à Elisa ?

b) Pourquoi la maîtresse choisit-elle de ne pas plus donner de représentation visuelle ni de laisser de matériel à disposition des élèves ?

Exercice 10. *D'après CRPE gpe3 juin 2020*

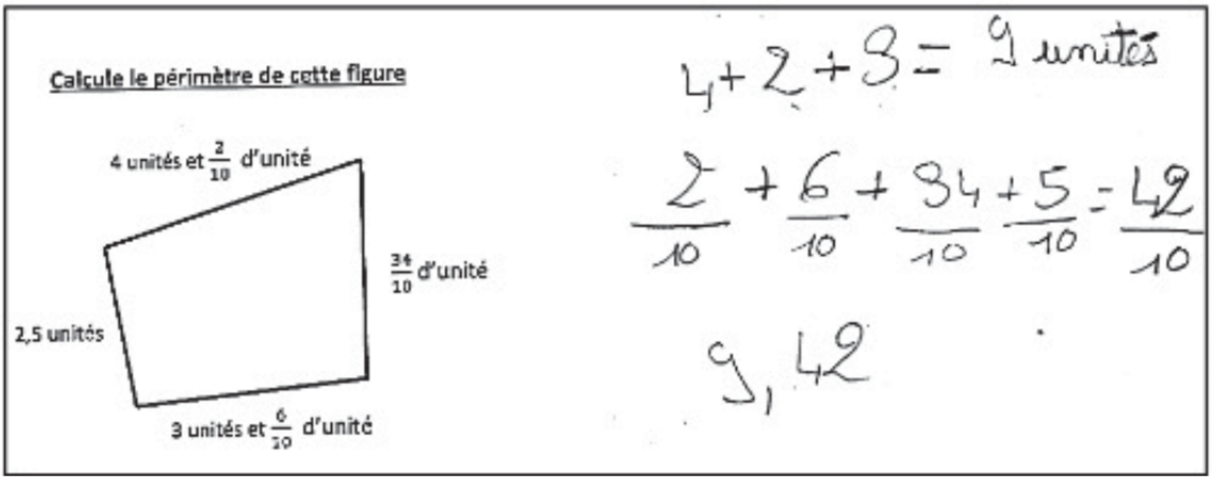
1) Voici deux réponses d'élèves à la question « Dans un nombre, à quoi sert la virgule ? » posée par un enseignant dans une classe de CM1 :

- **Élève A** : « La virgule sert à montrer que c'est un nombre décimal. »
- **Élève B** : « La virgule sert à séparer le nombre entier et la partie décimale. »

a) Pour chacune des réponses proposées, expliquer pourquoi elle ne peut pas être retenue par l'enseignant pour la trace écrite à noter dans les cahiers d'élèves.

b) Quelle réponse à la question posée, l'enseignant peut-il proposer à la classe ?

2) Voici une production d'élève :



a) Analyser la production de l'élève en relevant ses réussites et ses erreurs.

b) Que peut-on proposer à l'élève pour l'aider à corriger ses éventuelles erreurs ?

Exercice 11. *D'après CRPE gpe4 juin 2020*

Voici un exercice proposé à des élèves de CM2.

> Utilise les carreaux de la feuille pour représenter les nombres fractionnaires suivants sur une demi-droite graduée :
>
> $\frac{2}{5}$ $\quad\frac{5}{10}$ $\quad\frac{15}{10}$ $\quad\frac{5}{5}$ $\quad\frac{1}{5}$ $\quad\frac{4}{10}$ $\quad\frac{7}{5}$ $\quad\frac{1}{2}$ $\quad\frac{2}{10}$

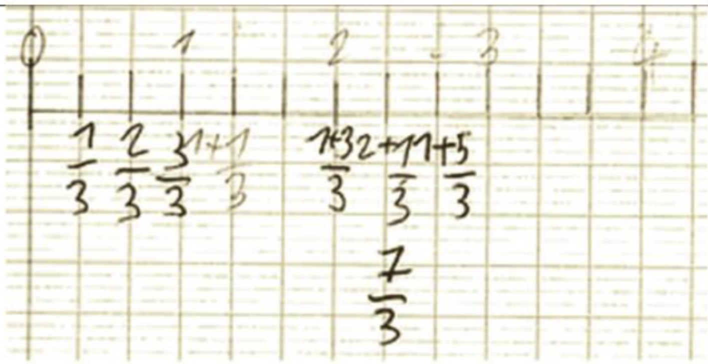
1) Citer deux objectifs d'apprentissage que l'on peut associer à cet exercice.
2) Citer deux procédures que les élèves peuvent mettre en œuvre pour placer le nombre $\frac{1}{2}$.
3) Citer deux procédures que les élèves peuvent mettre en œuvre pour placer le nombre $\frac{7}{5}$.

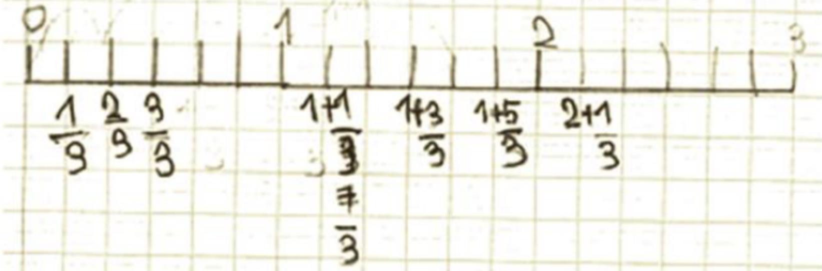
Dans la même séance, les élèves ont à réaliser l'exercice suivant.

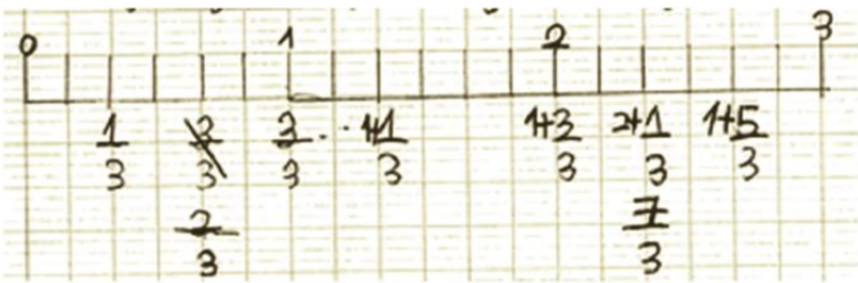
> Utilise les carreaux de la feuille pour représenter les nombres suivants :
>
> $\mathbf{1} + \frac{1}{3}$ $\quad\frac{3}{3}$ $\quad\mathbf{2} + \frac{1}{3}$ $\quad\mathbf{1} + \frac{3}{3}$ $\quad\frac{1}{3}$ $\quad\frac{2}{3}$ $\quad\mathbf{1} + \frac{5}{3}$ $\quad\frac{7}{3}$

Pour avoir un axe plus lisible, le professeur ajoute la consigne suivante : « Vous prendrez 6 carreaux pour l'unité ».

Voici les productions de 3 élèves de la classe :

Élève 1


Élève 2


Élève 3


4) Comparer les productions des élèves 1 et 3. Quelles sont les compétences acquises par chacun d'eux ?

5) a) Analyser la production de l'élève 2.

   b) Proposer un exemple d'une aide que l'enseignant peut apporter à cet élève pour lui faire prendre conscience de ses erreurs ?

6) Le professeur a ajouté la consigne « Vous prendrez 6 carreaux pour l'unité. » Était-ce une bonne initiative ? Justifier votre réponse.

Thème 2 | Structure additive et techniques de calcul

Memo

L'addition est au coeur de la construction des nombres entiers : 7 est construit comme $6+1$, 8 comme 7+1 etc. Avec la multiplication [1], elle est aussi centrale dans l'écriture décimale des nombres 1 034 c'est 1 millier et 3 dizaines et 4 unités. On va donc à la fois apprendre l'addition (et la soustraction) aux élèves, et se baser sur ces opérations pour asseoir la compréhension des nombres. Ceci se fait parallèlement à l'acquisition des différentes techniques de calcul (mental, en ligne, posé) dont les apprentissages sont fortement interdépendants.

• **Structure additive des nombres entiers.**

En cycle 1 : construire le nombre (pour exprimer les quantités – nombre outil) en veillant à ce que les nombres travaillés soient composés et décomposés.

— La <u>décomposition</u> permet de partir de nombres connus pour comprendre le sens de l'addition, de la soustraction, et leurs premières propriétés (trois c'est deux et encore un, un et encore deux, quatre c'est deux et encore deux ...).

— La <u>recomposition</u> permet d'apprendre les nombres à partir de l'addition : les enfants doivent comprendre que toute quantité s'obtient en ajoutant un à la quantité précédente (ou en enlevant un à la quantité supérieure).

Exemple. Vidéo du *jeu du saladier* (Objectif maternelle) (`http://objectifmaternelle.fr/2016/08/decompositions-jeu-saladier-video/`).

<u>L'itération de l'unité</u> se construit progressivement, et pour chaque nombre. Basé sur la connaissance des nombres de 1 à 3 en PS (subitizing), on étend en MS jusqu'à 5 par décompositions et recompositions simples (penser à la vidéo de construction de la tour en MS : 5 enfants sur le banc c'est 3 et encore 2, ...) et en GS jusqu'à 10.

Exemple. Vidéo *conférence de Rémi Brissiaud* (`https://www.youtube.com/watch?v=PgfX3vjSB2s`) de 40'10 à 45'10 (et la suite !).

En cycle 2 : comprendre les nombres via compositions-décompositions fondées sur les propriétés numériques (le double de, la moitié de, etc.), ainsi que les décompositions en unités de numération (unités, dizaines, etc.). On passe ainsi notamment du seul +1 à +1, +10, +100 ; on étudie les compléments à 10 ou à 100 (100 c'est 97 et encore 3, ce qui amènera par la suite à $97 = 100 - 3$).

Exemples. Vidéos *Tableau de nombres* et *Château des nombres* sur les unités de numération (+1, +10, +100) en CE1.

L'étude des opérations d'addition et de soustraction (mais aussi de multiplication et division) commence dès le début du cycle à partir de problèmes (portant en particulier sur les grandeurs et les mesures) qui contribuent à leur donner du sens.

En cycle 3 : reconnaissance de situations additives lors de la résolution de problèmes. Le cycle 3 est aussi l'occasion d'introduire et d'utiliser des symboles mathématiques au fur et à mesure qu'ils prennent sens dans des situations basées sur des manipulations, en relation avec le vocabulaire utilisé, assurant une entrée progressive dans l'abstraction qui sera poursuivie au cycle 4.

C'est aussi le début de l'étude des grands nombres à composer et décomposer en utilisant des regroupements par milliers. Plus généralement, amener à comprendre et appliquer les règles de la numération décimale de position aux grands nombres entiers (jusqu'à 12 chiffres).

1. Les structures additive et multiplicative sont intimement liées et s'il convient de considérer ces notions ensemble lors de certaines séquences, il est aussi important d'en décorréler les apprentissages (et donc les difficultés qu'elles suscitent).

• Matériel, représentations graphiques / illustrations

Bien entendu, le matériel utilisé pour introduire les nombres peut aider à faire comprendre le sens des opérations d'addition et de soustraction aux élèves.

Indépendamment, les représentations graphiques / illustrations sont à favoriser également. En particulier, lorsque addition et soustraction viennent naturellement de la résolution d'un problème (voir exercices de la feuille de TD).

• Techniques de calcul : mental, en ligne, posé, et leurs interactions

Trois types de techniques de calcul :

— Calcul mental : calculer sans le support de l'écrit, pour obtenir un résultat exact, pour estimer un ordre de grandeur ou pour vérifier la vraisemblance d'un résultat.

— Calcul en ligne : calculer avec le support de l'écrit, en utilisant des écritures en ligne additives, soustractives, multiplicatives, mixtes.

— Calcul posé : mettre en œuvre un algorithme de calcul posé pour l'opération donnée.

Le calcul en ligne se pratique *en amont* du calcul posé puis en étroite relation avec celui-ci. Les calculs mental et en ligne sont intimement liés, leur pratique est *complémentaire* à celle du calcul posé.

En bref :

Calcul en ligne (et calcul mental)	Calcul posé
→ procédure basée sur la réflexion	→ procédure clé en main
→ procédure de construction (de faits numériques, de propriétés élémentaires)	→ procédure d'utilisation (de faits numériques)
→ procédure rapide	→ procédure sûre

Dès le cycle 2, *Calculer* apparaît dans les compétences : « Calculer avec des nombres entiers, mentalement ou à la main, de manière exacte ou approchée, en utilisant des stratégies adaptées aux nombres en jeu. »

Le calcul mental et le calcul en ligne (relevant des quatre opérations) sont à traiter à l'oral et à l'écrit avec comme objectifs d'élaborer ou de choisir des stratégies, d'expliciter les procédures utilisées et de comparer leur efficacité. On aborde ainsi les propriétés implicites des opérations (e.g. la *commutativité* : $2 + 9$, c'est pareil que $9 + 2$) et celles de la numération ($50 + 80$, c'est 5 dizaines + 8 dizaines, c'est 13 dizaines, c'est 130).

En cycle 3, il y a introduction de calculs sur des nombres décimaux. Les propriétés des opérations (*commutativité* : $12 + 199 = 199 + 12$ et *associativité* : $27,9 + 1,2 + 0,8 = 27,9 + 2$) sont toujours travaillées *implicitement.*

On complète avec le calcul posé (et le calcul instrumenté) de nombres entiers et décimaux et on fait prendre conscience des interactions entre les différentes techniques de calcul. En effet, le calcul mental est mobilisé dans le calcul posé et il peut être utilisé pour fournir un ordre de grandeur avant un calcul instrumenté. Réciproquement, le calcul instrumenté peut permettre de vérifier un résultat obtenu par le calcul mental ou par le calcul posé.

L'enseignement du calcul mental permet l'exploration des nombres et des propriétés des opérations. Il s'agit d'amener les élèves à adapter les procédures utilisées en fonction de leurs connaissances et des nombres en jeu. Pour cela, il est indispensable que les élèves puissent s'appuyer sur suffisamment de faits numériques mémorisés et sur des procédures automatisées de calcul élémentaires (compléments à 10, table d'additions etc.). De fait, le travail quotidien du calcul mental est conseillé dès le cycle 2.

De même, si la maîtrise des techniques opératoires écrites permet à l'élève d'obtenir un résultat de calcul, la construction de ces techniques est l'occasion de retravailler les propriétés de la numération et de rencontrer des exemples d'algorithmes complexes.

• Pratique des calculs mental et en ligne en classe (P. Sirieix)

Dans les programmes, l'enseignement du calcul mental et l'entraînement des élèves a une place prépondérante par rapport aux autres calculs.

Contrairement aux calculs posés, ces techniques de calcul dépendent des nombres qui entrent dans le calcul, des connaissances de faits numériques et des facilités/difficultés de chaque élève.

Constats.

— L'enseignement du calcul mental est prévu dans les EDT mais peu structuré.

— Les traces écrites (cahiers, affichages) permettant d'institutionnaliser des procédures et des faits numériques sont insuffisantes.

— La mémorisation des faits numériques est trop souvent confiée aux familles.

— Les enseignants ont des difficultés à anticiper et prendre en compte les diverses procédures proposées par les élèves (*Exemple.* $12{,}42 - 6{,}8 = 6{,}42 - 0{,}8 = 6 - 0{,}38 = 5{,}62$).

Exemples. Vidéos *Calcul mental, séances 1 à 3* : une séquence composée de 3 séances sur la multiplication par 5, 50, 500 au CM2.

⚠ Quand on multiplie par 10, *on* ***ne*** *déplace* ***pas*** *la virgule* ! Ce sont plutôt les unités qui se transforment. Le chiffre des unités du nombre initial devient le chiffre des dizaines du résultat, celui des dizaines devient celui des centaines, etc.

Remarque. Comme pour chaque thème, il est conseillé de se référer aux *attendus de fin d'année et aux repères annuels de progression* (cf. `https://eduscol.education.fr/`).

TD

Cette fiche d'exercices porte sur l'apprentissage de l'addition et de la soustraction ainsi que sur les différentes techniques de calcul.

Compétences :

— Comprendre la base de la numération,

— Utiliser diverses représentations d'un même nombre (écriture décimale ou fractionnaire, etc.) et passer d'une représentation d'un nombre à une autre.

— Réaliser que certains problèmes relèvent de situations additives, de partages ou de groupements.

— Calculer avec des nombres entiers ou décimaux et des fractions simples, mentalement ou à la main, de manière exacte ou approchée, en utilisant des stratégies adaptées aux nombres en jeu.

Exercice 1. *(Sesamaths 6è, sauf les 2 derniers ...)*

1. Complète chaque suite de nombres avec les quatre entiers qui la poursuivent logiquement.

a) 7 970 – 7 980 – 7 990 – ... b) 111 300 – 111 200 – 111 100 – ... c) 8 725 – 8 750 – 8 775 – ...

2. Effectuer les sommes suivantes :

a) douze-mille-neuf-cent-trente-quatre et quatre-millions-dix-sept

b) neuf-mille-trente-trois et trente-deux centaines.

3. Complète les opérations à trou suivantes :

a) $78 + ... = 345$ b) $... + 14 + 39 = 555$ c) $76 + ... + 24 = 658$

4. Calculer la somme et la différence de :

a) $\frac{46}{5}$ et 0,8 b) 12 345 et $3{,}1 \times 10^3$ c) $a = 187 - 39$ et $b = 13 + 26$

5. Calculer :

a) $287 + 45 - 17 - 115$ b) $54 + 36 - (71 - 23 + 12) - 34 + (14 + 25)$.

Exercice 2. *(idem)*

1. En 1492, Christophe Colomb découvrit l'Amérique, à 41 ans. En quelle année est-il né ?

2. Jeanne d'Arc est née à Domrémy en 1412 et est morte brûlée en 1431 à Rouen. Quel âge a-t-elle quand elle délivre la ville d'Orléans en 1429 ?

Exercice 3. *(idem)*

On considère l'opération $396 + 438$.

1. Décompose chaque nombre sous la forme ... centaines + ... dizaines + ... unités puis aide-toi de cette décomposition pour trouver le résultat de l'addition.

2. Arnaud remarque que $396 = 400 - 4$. En quoi cela aide-t-il à calculer de tête ?

Exercice 4. *(Utilisation du calcul mental et en ligne pour déterminer des ordres de grandeur)*

1. Déterminer les ordres de grandeur

(a) du nombre de voitures que l'on peut stationner le long d'un trottoir de 1 km de long.

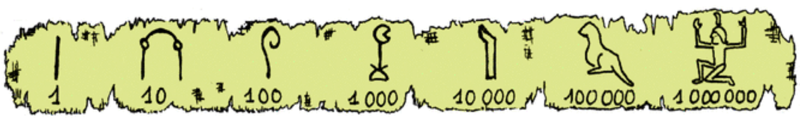
(b) de l'aire de la salle de TD et de son volume.

(c) du volume d'une balle de tennis (dont le rayon est d'environ 3 cm).

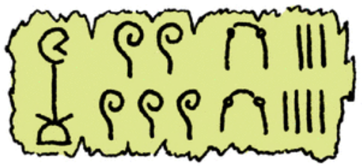
2. Peut-on faire rentrer 300 000 balles de tennis dans la salle de TD ? et 3 millions ?

Exercice 5. *(idem)*

Il y a plus de 5 000 ans, les scribes égyptiens utilisaient des chiffres (hiéroglyphes) :



Ainsi, le nombre 129 s'écrivait : 

1. Déterminer le nombre dont l'écriture en chiffres égyptiens est : 
2. Écrire 8 769 et 145 137 en chiffres égyptiens.
3. Comment doit-on procéder pour lire un nombre écrit avec les chiffres égyptiens ?
4. Que dire des nombres  et  ? Que cela signifie-t-il ?
5. En déduire des avantages et inconvénients de la numération égyptienne.

Exercice 6. *D'après CRPE Gpe 1 du 10 avril 2018*
Les questions portent sur deux pages d'un manuel de CP (Euromaths, Hatier) présentées en page suivante.

1. Analyse de la partie «Découverte» p.46

Dans l'activité préparatoire, les auteurs proposent de comparer les tailles des enfants de la classe en passant par la comparaison de bâtons coupés à leur taille.

(a) Explicitez une procédure plus simple pour comparer la taille de deux enfants.

(b) Proposez une procédure plus simple pour comparer la taille de plusieurs enfants.

(c) Détaillez deux procédures que peuvent réaliser en classe les élèves de CP pour ranger les bâtons en fonction de leur longueur.

2. Analyse de l'« Exercice » p.46

(a) Décrivez une procédure qui permette à des élèves de CP de réaliser la tâche demandée dans cet « Exercice ».

(b) Identifier la variable de la situation de comparaison qui conduit les élèves à mettre en œuvre ce type de procédure.

3. Analyse des activités de la p.47

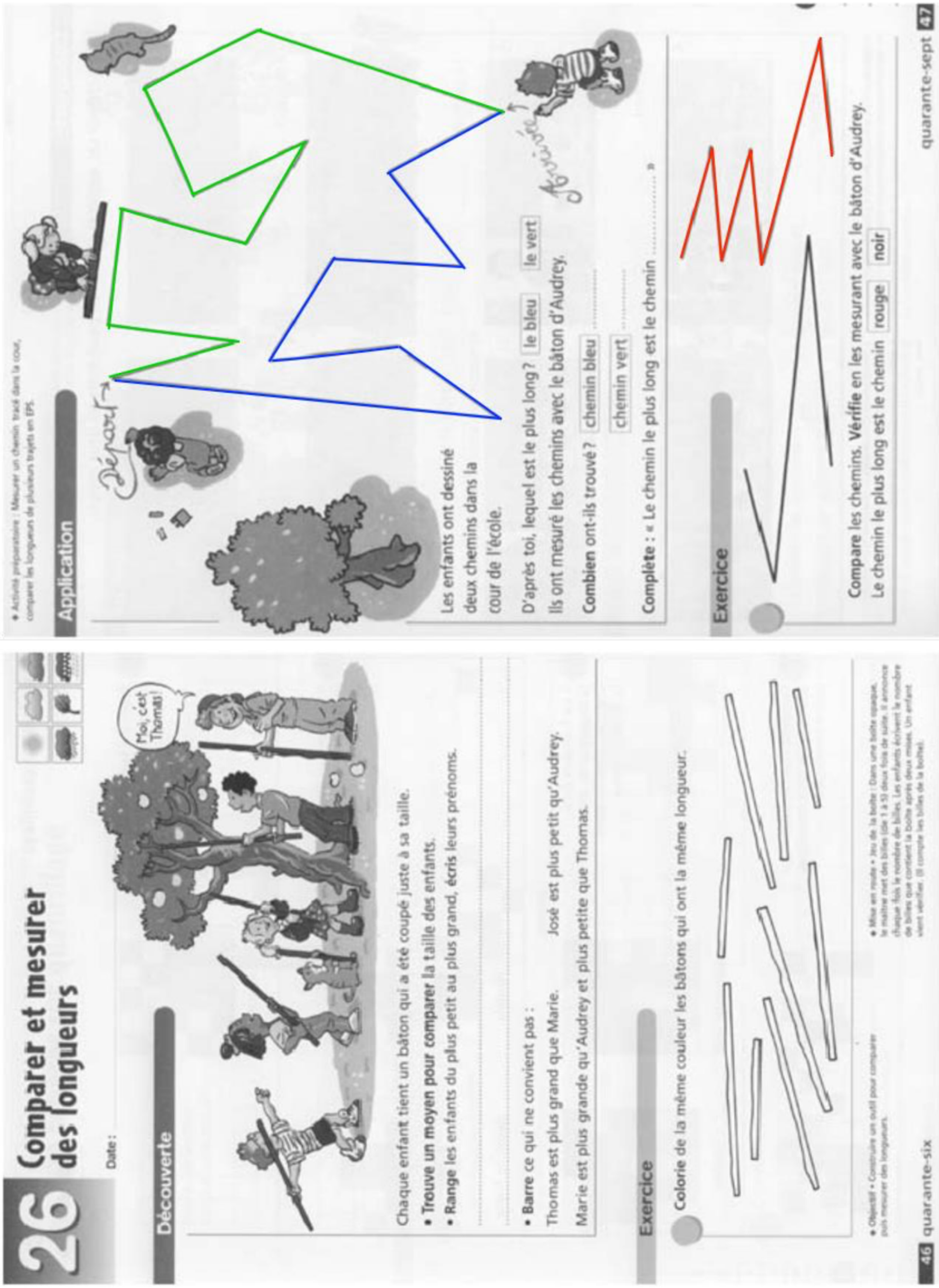
(a) Une deuxième activité préparatoire se déroulant dans la cour est proposée.
Imaginer une procédure permettant de comparer les longueurs de plusieurs trajets dans la cour.

(b) À l'« Application » p.47, certains élèves répondent que le chemin le plus long est le chemin vert (indiqué sur la feuille). Quel a pu être leur raisonnement ?

(c) Si ce raisonnement est mis en œuvre dans l'« Exercice » p.47, cet exercice permet-il de l'invalider ?

(d) Sur quelle propriété mathématique de la mesure s'appuie la recherche du résultat de l'« Exercice » ?

4. Quel type d'activités peut-on envisager pour poursuivre la progression en CP ?



26 Comparer et mesurer des longueurs

Date :

Découverte

Chaque enfant tient un bâton qui a été coupé juste à sa taille.

- **Trouve un moyen pour comparer** la taille des enfants.
- **Range** les enfants du plus petit au plus grand, **écris** leurs prénoms.

- **Barre** ce qui ne convient pas :

Thomas est plus grand que Marie. José est plus petit qu'Audrey.

Marie est plus grande qu'Audrey et plus petite que Thomas.

Exercice

Colorie de la même couleur les bâtons qui ont la même longueur.

● Objectif • Construire un outil pour comparer puis mesurer des longueurs.

● Mise en route • Jeu de la boîte : Dans une boîte opaque, le maître met des billes (de 1 à 5) deux fois de suite. Il annonce chaque fois le nombre de billes. Les enfants écrivent le nombre de billes que contient la boîte après deux mises. Un enfant vient vérifier. (Il compte les billes de la boîte).

46 quarante-six

● Activité préparatoire : Mesurer un chemin tracé dans la cour, comparer les longueurs de plusieurs trajets en EPS.

Application

Les enfants ont dessiné deux chemins dans la cour de l'école.

D'après toi, lequel est le plus long ? le bleu le vert

Ils ont mesuré les chemins avec le bâton d'Audrey.

Combien ont-ils trouvé ? chemin bleu ....

chemin vert ....

Complète : « Le chemin le plus long est le chemin .... »

Exercice

Compare les chemins. **Vérifie** en les mesurant avec le bâton d'Audrey.

Le chemin le plus long est le chemin rouge noir

quarante-sept 47

Exercice 7.
Voici un extrait du programme de cycle 2 (**Calculer avec des nombres entiers**).

Calcul mental : Calculer sans le support de l'écrit, pour obtenir un résultat exact, pour estimer un ordre de grandeur ou pour vérifier la vraisemblance d'un résultat. Résoudre mentalement des problèmes arithmétiques, à données numériques simples. En particulier : ➢ Calcul sur les nombres 1, 2, 5, 10, 20, 50, 100 en lien avec la monnaie ➢ Calcul sur les nombres 15, 30, 45, 60, 90 en lien avec les durées. **Calcul en ligne :** calculer avec le support de l'écrit, en utilisant des écritures en ligne additives, soustractives, multiplicatives, mixtes.
Calcul posé : mettre en œuvre un algorithme de calcul posé pour l'addition, la soustraction, la multiplication.

1. Donner deux raisons pour lesquelles l'apprentissage du calcul en ligne est complémentaire à celui du calcul posé.
2. Le calcul suivant est proposé à des élèves de cycle 2 qui pratiquent régulièrement le calcul en ligne : $28 + 17 = ?$.
Expliciter trois stratégies qu'un élève de cycle 2 pourrait mettre en œuvre pour effectuer ce calcul en ligne.

Exercice 8.
Un enseignant propose un calcul à effectuer en ligne à des élèves de cycle 3 et relève deux productions.

Calcul 1 L'enseignant écrit au tableau : 12,42 – 6,8 et dit aux élèves : « Calculer la différence, entre 12 unités et 42 centièmes et 6 unités et 8 dixièmes ».	
Élève 1 12,42 – 6,8 = 6,42 – 0,8 = 6 – 0,38 = 5,62	**Élève 2** 12 unités et 42 centièmes moins 6 unités et 8 dixièmes = 1242 centièmes moins 68 dixièmes = 1242 centièmes moins 680 centièmes 1242 – 680 = 1262 – 700 = 562 Résultat : 562 centièmes

1. Analyser les productions des élèves au regard des connaissances mobilisées sur les nombres et sur les propriétés des opérations.
2. Préciser ce qui distingue les productions des deux élèves.

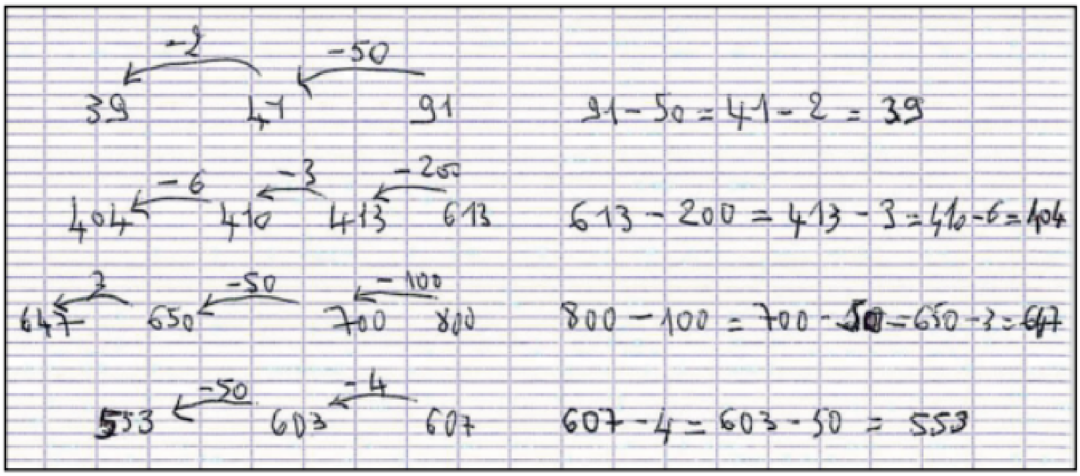
Exercice 9.
On considère l'exercice suivant (Manuel scolaire « Cap maths »Hatier, édition 2016) :

Calcule avec la méthode de ton choix
a. $91 - 52 = \ldots$ *b.* $613 - 209 = \ldots$ *c.* $800 - 153 = \ldots$ *d.* $607 - 54 = \ldots$

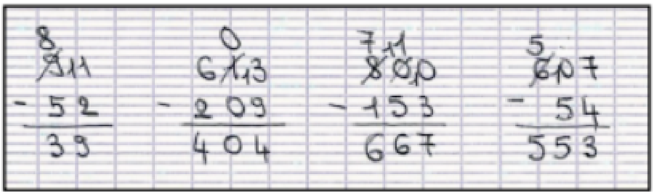
1. Quelle est la notion abordée ? Citer deux connaissances et savoir-faire que cette situation met en jeu.

On considère les 4 productions d'élèves suivantes :

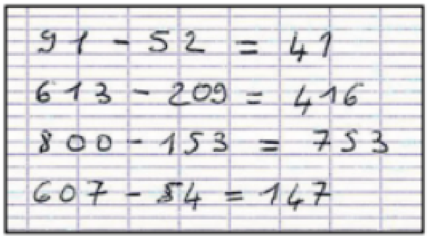
Antoine



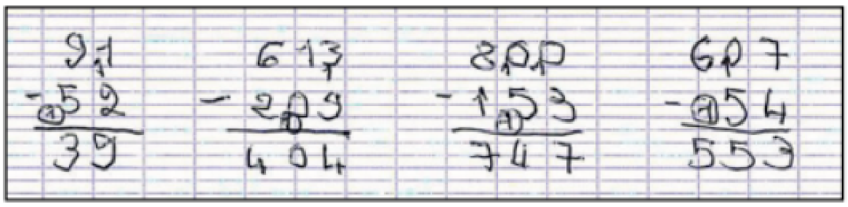
Barbara



Clara



Dominique

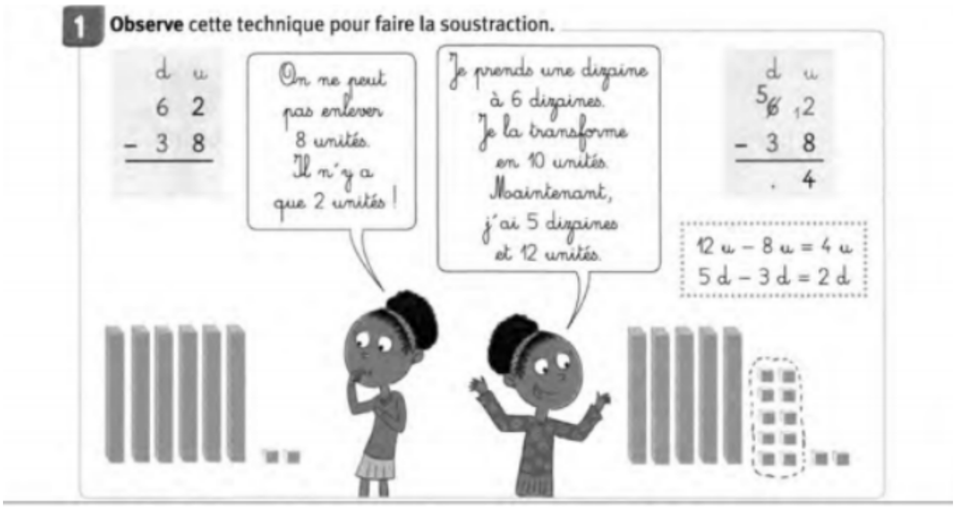


2. (a) Quelles sont les différentes procédures utilisées par Antoine, Barbara et Clara ?
   (b) Qu'est-ce qui différencie les procédures utilisées par Barbara et Dominique ?
   (c) Relever les réussites et les erreurs de Barbara et Clara.
   (d) Quel accompagnement pédagogique mettriez-vous en œuvre pour remédier aux difficultés rencontrées par Clara ?

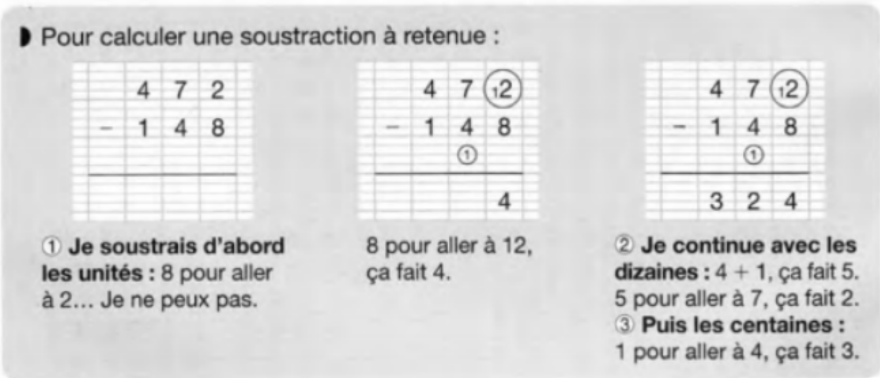
Exercice 10.

1. Sur quelle(s) connaissance(s) mathématique(s) s'appuie chacune des méthodes proposées pour effectuer une soustraction dans les deux présentations des manuels ci-dessous ?

« Vivre les maths CE1 » Nathan, éditions 2015, chapitre 119, la soustraction posée à retenue.



« Pour comprendre les mathématiques CE1 » Hachette éducation, éditions 2014, chapitre 136, la soustraction posée à retenue.



2. Quelle propriété mathématique justifie la méthode proposée dans le document suivant ?

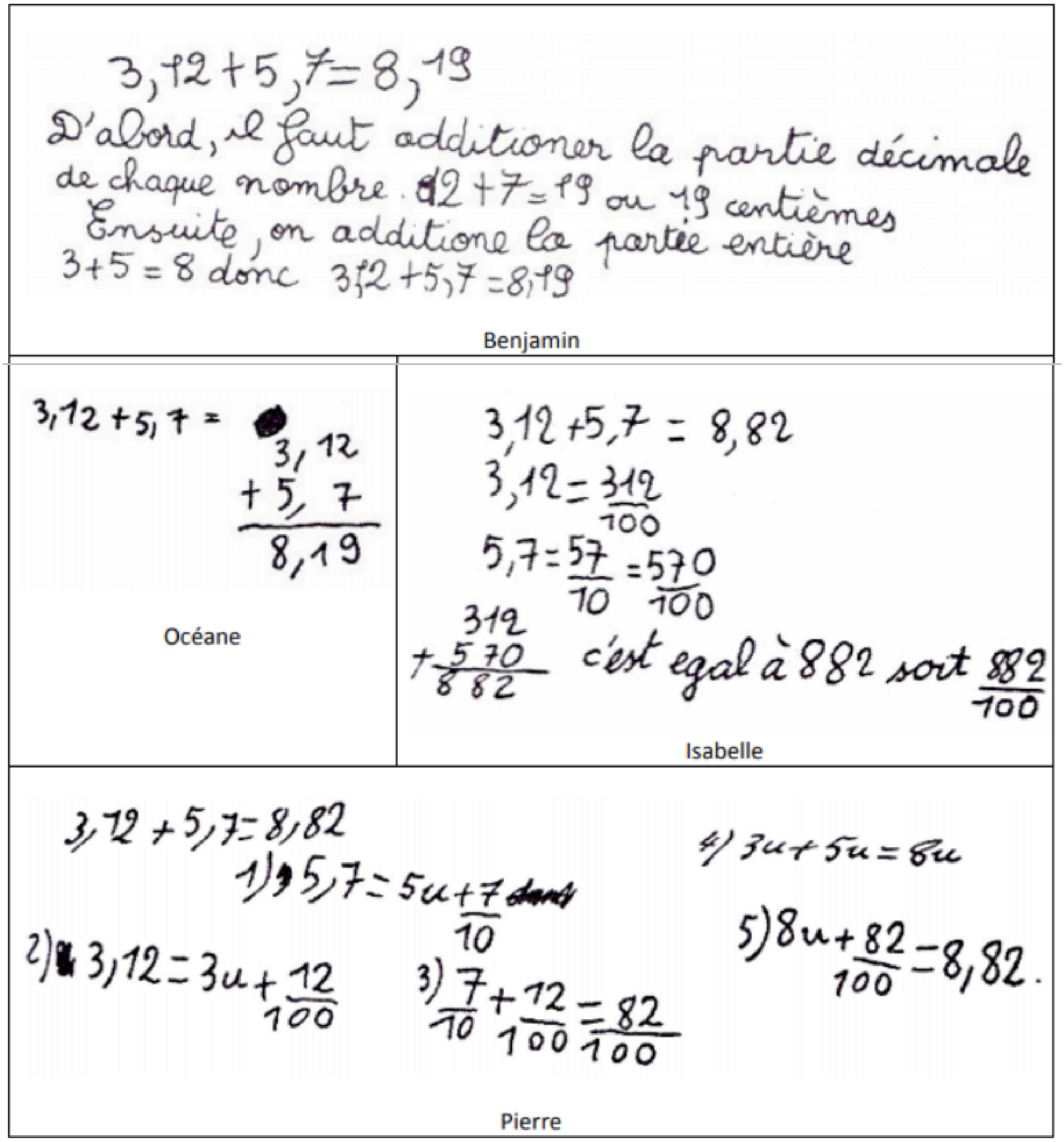
Copie d'une trace écrite du cahier de leçons d'un élève de CE1.

Calcul en ligne

$85 - 18 = 87 - 20$ $= 67$	Enlever 18 c'est difficile mais enlever 20 c'est plus facile ! On ajoute 2 à 85 et à 18. On effectue l'opération 87 – 20 « dans sa tête ».
$289 - 47 = 282 - 40$ $= 242$	Enlever 47 c'est difficile mais enlever 40 c'est plus facile ! On enlève 7 à 289 et à 47 On effectue l'opération 282 – 40 « dans sa tête ».
$472 - 148 = 474 - 150$ $= 424 - 100$ $= 324$	On ajoute 2 aux deux nombres On enlève 50 aux deux nombres On effectue l'opération « dans sa tête ».

3. Dans le cadre de l'apprentissage de la soustraction, donner un avantage et un inconvénient de chacune des présentations de la technique opératoire de la soustraction proposées dans les trois documents.

Exercice 11.
Des élèves d'une classe de cycle 3 doivent calculer $3{,}12 + 5{,}7$ et expliquer comment ils procèdent. Voici un échantillon de productions d'élèves.



3,12 + 5,7 = 8,19
D'abord, il faut additioner la partie décimale de chaque nombre. 12 + 7 = 19 ou 19 centièmes
Ensuite, on additione la partie entière 3 + 5 = 8 donc 3,12 + 5,7 = 8,19

Benjamin

3,12 + 5,7 =

$$\begin{array}{r} 3{,}12 \\ +\ 5{,}7\ \ \\ \hline 8{,}19 \end{array}$$

Océane

$3{,}12 + 5{,}7 = 8{,}82$

$3{,}12 = \frac{312}{100}$

$5{,}7 = \frac{57}{10} = \frac{570}{100}$

$$\begin{array}{r} 312 \\ +\ 570 \\ \hline 882 \end{array}$$ c'est egal à 882 soit $\frac{882}{100}$

Isabelle

$3{,}12 + 5{,}7 = 8{,}82$

1) $5{,}7 = 5u + \frac{7}{10}$ ~~dans~~

2) $3{,}12 = 3u + \frac{12}{100}$

3) $\frac{7}{10} + \frac{12}{100} = \frac{82}{100}$

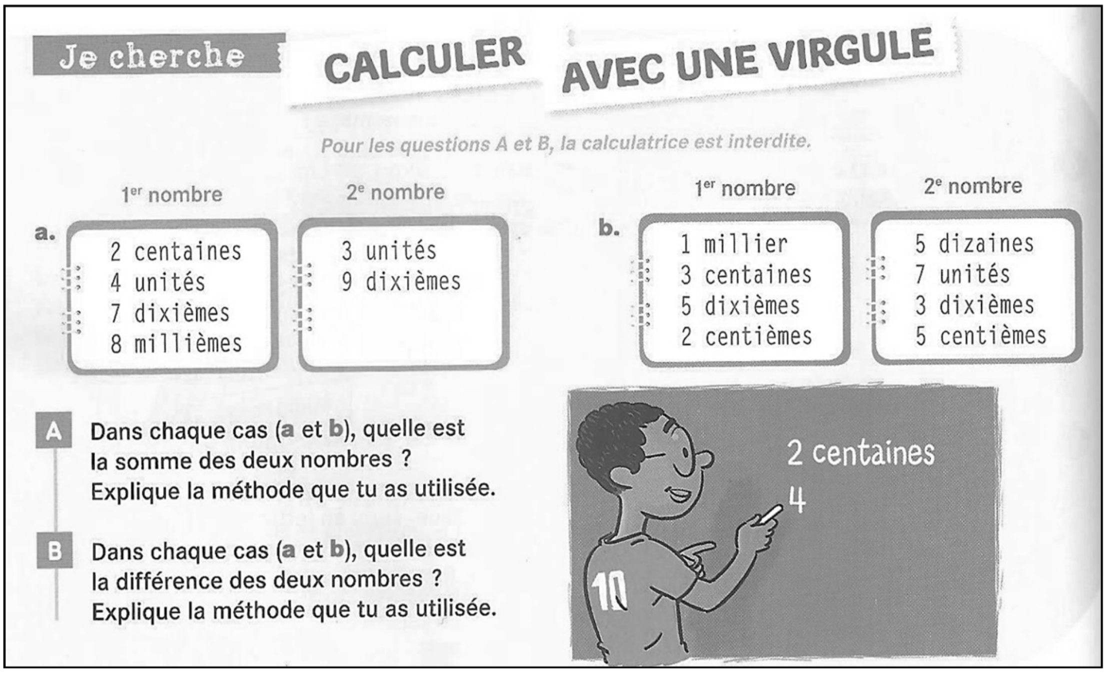
4) $3u + 5u = 8u$

5) $8u + \frac{82}{100} = 8{,}82$.

Pierre

1. À partir de l'analyse des différentes productions, expliquer les différentes démarches proposées.
2. Quelle représentation erronée des nombres décimaux pourrait causer les erreurs des élèves ?
3. Proposer trois tâches ou activités que pourrait mettre en place l'enseignant pour remédier à ce type d'erreurs.

Exercice 12.
L'activité de recherche ci-dessous est un extrait de la page 106 du manuel Cap Maths CM2, Éditions Hatier, 2017.


Je cherche

CALCULER AVEC UNE VIRGULE

Pour les questions A et B, la calculatrice est interdite.

a. 1er nombre : 2 centaines, 4 unités, 7 dixièmes, 8 millièmes — 2e nombre : 3 unités, 9 dixièmes

b. 1er nombre : 1 millier, 3 centaines, 5 dixièmes, 2 centièmes — 2e nombre : 5 dizaines, 7 unités, 3 dixièmes, 5 centièmes

A Dans chaque cas (**a** et **b**), quelle est la somme des deux nombres ? Explique la méthode que tu as utilisée.

B Dans chaque cas (**a** et **b**), quelle est la différence des deux nombres ? Explique la méthode que tu as utilisée.

Le livre du maitre associé rappelle que l'addition et la soustraction de nombres décimaux ont, en général, été travaillées au CM1.
Pour cette activité de recherche, il suggère de :

— mettre à disposition des élèves qui le souhaitent du matériel (par exemple des étiquettes centaine, dizaine, unité, dixième, ...) ;

— préciser « Toutes les méthodes sont admises et l'usage du matériel n'est pas une obligation. » ;

— ne donner aucune indication sur la méthode à utiliser.

Il préconise ensuite au cours des phases de mise en commun, de faire expliciter :

— d'abord les procédures qui n'ont pas consisté à poser l'opération (premier temps) ;

— seulement ensuite la ou les procédures avec calcul posé (second temps).

Au sujet de ces calculs posés, le livre du maitre indique : « De plus, pour la soustraction, la difficulté se trouve encore accrue du fait qu'il existe plusieurs techniques possibles, comme pour les nombres entiers. Chaque élève doit donc adapter aux nombres décimaux celle qu'il utilise pour les entiers, les justifications étant identiques ».

1. Cette question porte sur le premier temps des mises en commun.

(a) Proposer une procédure ne consistant pas à poser l'opération et permettant dans le cas a de l'exercice de déterminer la somme des deux nombres.

(b) Proposer une procédure ne consistant pas à poser l'opération et permettant dans le cas b de l'exercice de déterminer la différence des deux nombres.

2. Cette question porte, dans le cas de la soustraction, sur le second temps de la mise en commun.

Poser la soustraction permettant dans le cas a de l'exercice de déterminer la différence des deux nombres.

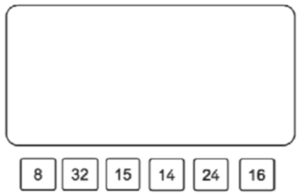
(a) En utilisant la méthode dite « par emprunt ».

(b) En utilisant la méthode par « conservation des écarts » (dite aussi méthode «usuelle»). Vous expliciterez dans ce dernier cas le sens des différentes « retenues »

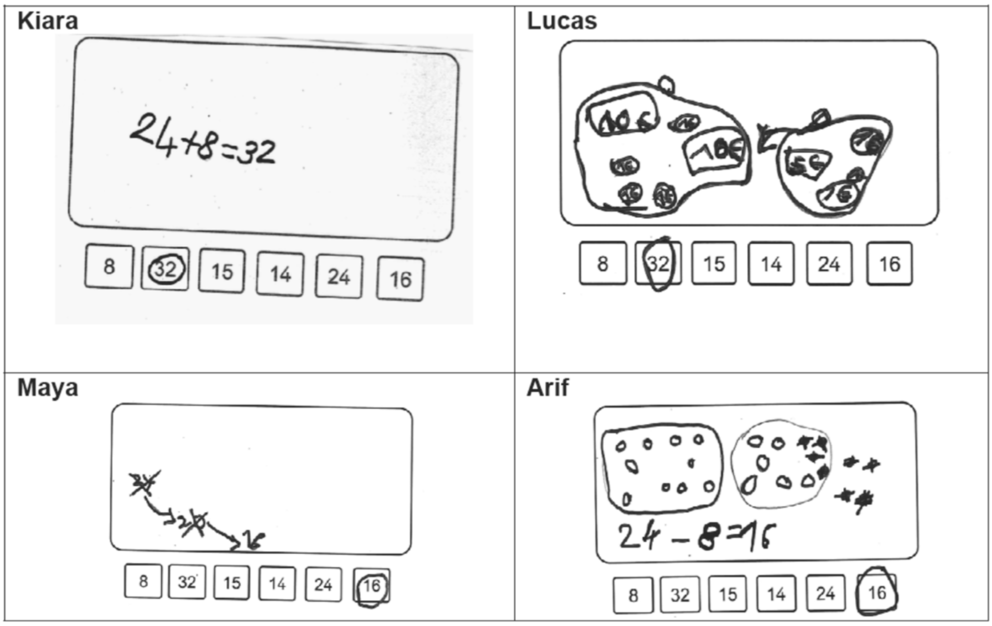
Exercice 13. L'exercice ci-dessous est proposé dans une classe de CE1. Les élèves doivent écouter l'énoncé du problème lu par l'enseignant puis rechercher une réponse numérique à la question du problème pour l'entourer parmi 6 propositions. Ils doivent produire des traces de leur recherche.

Léo a 24 € dans son porte-monnaie.
Il a 8 € de plus que Lilou.

Combien d'euros Lilou a-t-elle ?



1. En quoi les compétences *modéliser* et *calculer* sont-elles mobilisées pour résoudre ce problème ?
2. Donner deux difficultés que les élèves pourraient rencontrer pour résoudre ce problème.
3. Voici les productions de quatre élèves.



Pour chacun de ces travaux :

(a) Analyser la trace écrite (procédures suivies, compétences mises en œuvre, erreurs éventuelles).

(b) Proposer une remédiation ou un accompagnement que l'enseignant pourrait mettre en place pour aider Lucas et Kiara à résoudre le problème.

4. Au cours du CE1, l'enseignant propose à nouveau l'exercice avec d'autres nombres afin de faire évoluer les représentations schématiques utilisées par les élèves.

Léo a 322 € dans son porte-monnaie. Il a 46 € de plus que Lilou.

Combien d'euros Lilou a-t-elle ?

Proposer une représentation schématique que l'enseignant peut présenter aux élèves pour les aider à modéliser la situation.

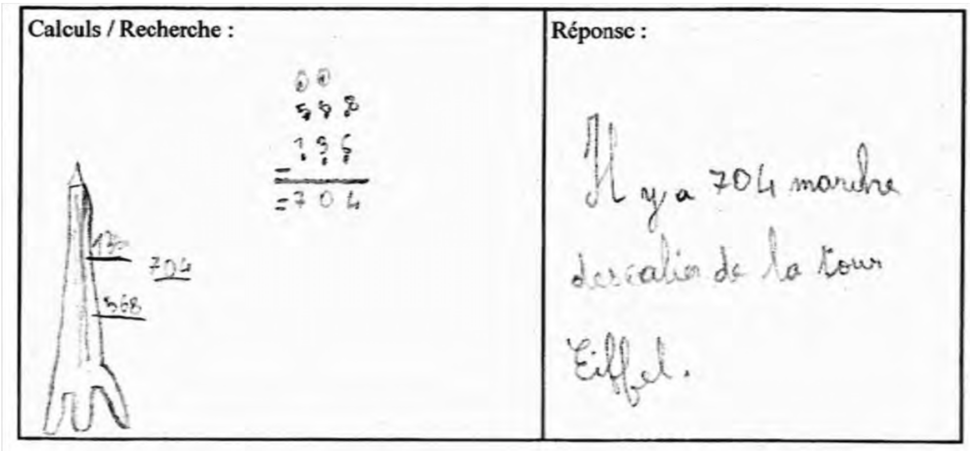
Exercice 14.
Le problème suivant, inspiré des propositions de la banque outil Eduscol, a été proposé à des élèves de CE2.

> *Jade monte au deuxième étage de la tour Eiffel. Elle a déjà monté 568 marches. Il reste 136 marches. Combien de marches y a-t-il pour monter au deuxième étage ?*

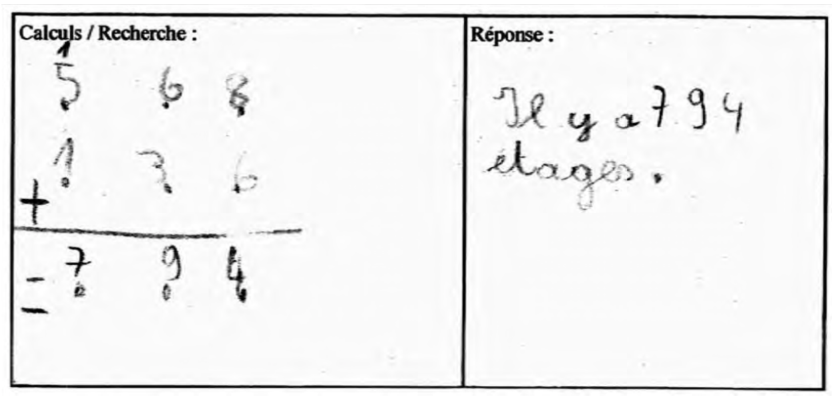
1. Sur quel type de problèmes porte cet exercice ?

Voici les productions de quatre élèves.

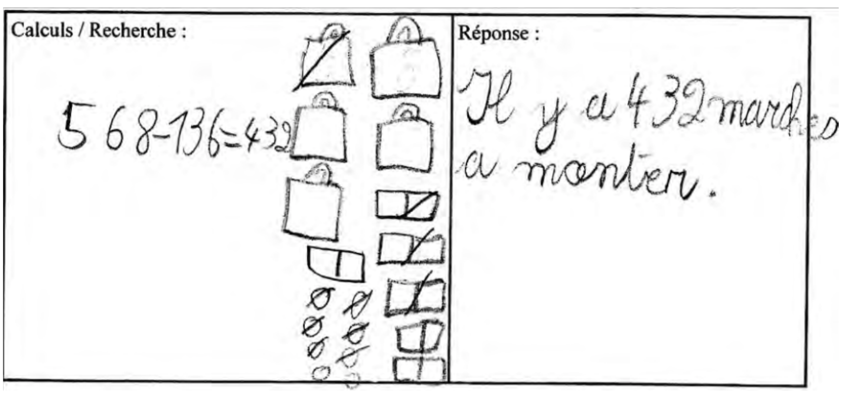
Élève A :



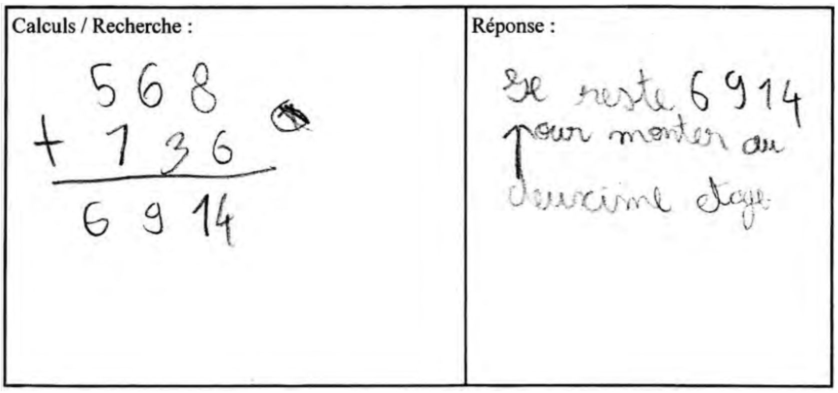
Élève B :



Élève C :



Élève D :



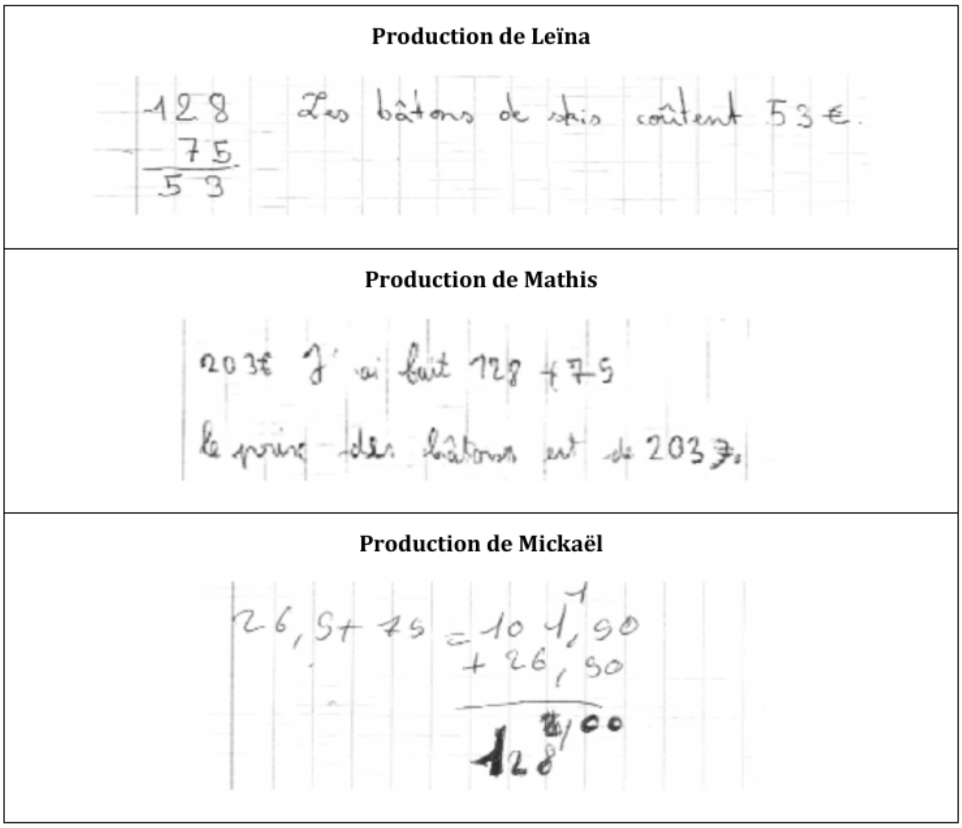
2. Les élèves A et C recourent à des schémas de la situation. Expliciter leur intérêt dans la procédure de l'élève.
3. Analyser chacune des productions des élèves B, C et D. Émettre une hypothèse sur l'origine des erreurs éventuelles.
4. (a) Quelle aide peut-on proposer à l'élève C pour qu'il comprenne mieux la situation ?
(b) Quelle aide peut-on proposer aux élèves B et D pour qu'ils puissent progresser ?

Exercice 15.
Le problème ci-dessous est proposé à des élèves de CM1.

Une paire de bâtons et une paire de skis coûtent 128 euros. Sachant que les skis coûtent 75 euros de plus que les bâtons, retrouve les prix des bâtons.

D'après un exercice proposé au concours math'isère

Voici les réponses de trois élèves : Leïna, Mathis et Mickaël.



1. Indiquer en quoi les compétences « modéliser » et « calculer » vont être mobilisées dans ce problème.

2. Analyser chacune des trois productions ci-dessus en repérant les réussites et les erreurs éventuelles.

3. Indiquer une autre démarche que des élèves de cycle 3 auraient pu entreprendre pour arriver à la solution.

4. Proposer un schéma que l'enseignant pourrait proposer aux élèves lors de la mise en commun pour aider les élèves à mobiliser la situation.

Exercices supplémentaires

Exercice 16. *(Pour aller plus loin : la base 5)*
Voici le descriptif rapide d'un jeu appelé le jeu du banquier, très souvent proposé aux élèves de CP :

> *Les élèves sont répartis en équipes de quatre : trois joueurs et un « banquier » qui dispose d'une boîte contenant des jetons jaunes, rouges, bleus et verts. Chaque joueur jette un dé (à tour de rôle) et le banquier lui donne autant de jetons jaunes qu'il y a de points sur la face supérieure du dé. De plus, dès qu'un joueur possède 5 jaunes, il doit les échanger auprès du banquier contre un jeton rouge ; de même il devra échanger 5 rouges contre un bleu, puis 5 bleus contre un vert.*
>
> *5 jaunes* $\longrightarrow$ *1 rouge*   *5 rouges* $\longrightarrow$ *1 bleu*   *5 bleus* $\longrightarrow$ *1 vert*

Le maître fait jouer les élèves pendant environ 10 minutes puis demande à chaque équipe de regrouper l'ensemble des jetons obtenus et de procéder aux échanges. À partir d'une mise en commun des résultats il va s'agir ensuite de désigner en le justifiant l'équipe gagnante.
Voici les collections de jetons obtenues par six équipes après le déroulement d'un jeu ; tous les échanges ont été correctement effectués :

Équipe 1	Équipe 2	Équipe 3	Équipe 4	Équipe 5	Équipe 6
B J B V B J J J	J R R J	B B	J R B R J B	J J V	J R R B J B

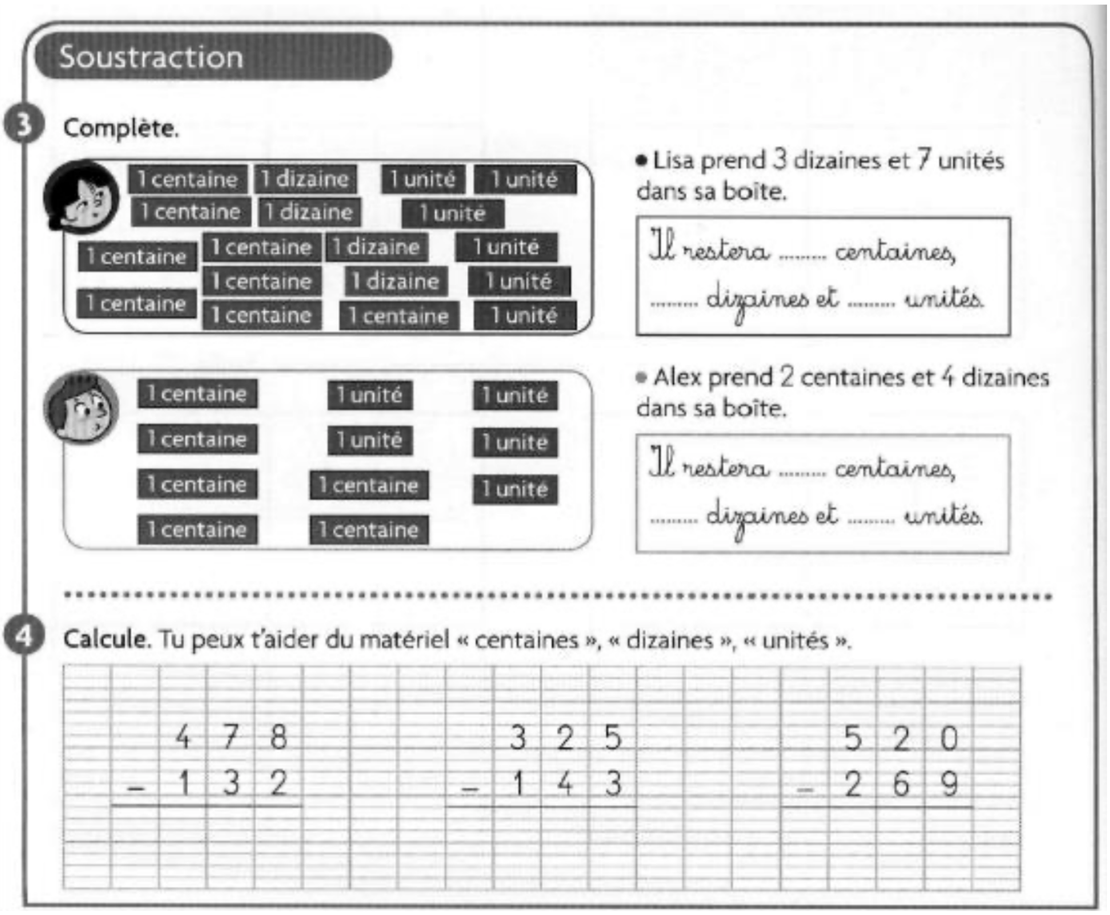
1. En faisant appel uniquement au nombre de jetons de chaque couleur (c'est-à-dire sans réaliser aucun échange supplémentaire), ordonner ces résultats du 1er au 6e en explicitant votre méthode.

2. Montrer que l'on peut construire à partir de la donnée de cette règle d'échange un système de numération en base cinq ; écrire alors le score de chaque équipe en utilisant les chiffres 0, 1, 2, 3 et 4 et retrouver la réponse donnée à la question précédente.

3. En ne travaillant qu'avec les écritures chiffrées des scores en base cinq, déterminer l'écriture en base cinq de la quantité totale de jetons obtenue en regroupant tous les jetons des six équipes.

4. En jouant à ce jeu, un élève n'a pas respecté la consigne et possède en fin de partie 37 jetons jaunes. Quelle aurait dû être sa collection de jetons en fin de partie ?

Exercice 17.
Voici un extrait du manuel Cap Maths CE1 (Hatier) :



Soustraction

3 Complète.

1 centaine	1 dizaine	1 unité	1 unité
1 centaine	1 dizaine	1 unité	
1 centaine	1 centaine	1 dizaine	1 unité
	1 centaine	1 dizaine	1 unité
1 centaine	1 centaine	1 centaine	1 unité

• Lisa prend 3 dizaines et 7 unités dans sa boîte.

Il restera .... centaines, ... dizaines et .... unités.

1 centaine	1 unité	1 unité
1 centaine	1 unité	1 unité
1 centaine	1 centaine	1 unité
1 centaine	1 centaine	

• Alex prend 2 centaines et 4 dizaines dans sa boîte.

Il restera .... centaines, ... dizaines et .... unités.

4 **Calcule.** Tu peux t'aider du matériel « centaines », « dizaines », « unités ».

$$\begin{array}{r} 478 \\ -\ 132 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 325 \\ -\ 143 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 520 \\ -\ 269 \\ \hline \end{array}$$

1. Étude de l'exercice 3
(a) Indiquer la procédure qui semble attendue en CE1 pour résoudre l'exercice 3.
(b) Sur quelle(s) propriété(s) de notre système de numération écrit cette procédure s'appuie-t-elle ?
(c) Quelle aide pourrait-on proposer à des élèves en difficulté sur cet exercice ?
2. Étude de l'exercice 4

L'exercice 3 sert à préparer le travail sur une technique opératoire de la soustraction de l'exercice 4. De quelle technique s'agit-il ? Vous justifierez votre réponse en vous appuyant sur l'exemple de la soustraction posée 325 – 143.

Thème 3 | Géométrie élémentaire

Memo

• **Distinction dessin/figure**

Définitions :
Une **figure** est un objet géométrique théorique, idéal défini par un énoncé ou un schéma codé. Elle n'a pas de matérialité.
Un **dessin** est une **représentation**, la trace matérielle d'un objet géométrique sur un support plan (feuille, tableau, écran d'ordinateur...).
Une **figure** peut être dessinée de plusieurs façons mais cela reste la même figure (comme un nombre qui a une infinité de représentations mais une seule valeur).
Dans l'enseignement de la géométrie de la maternelle au collège, on va donc représenter les objets géométriques du mieux possible avec des objets de la vie courante, des schémas, des dessins, des constructions avec matériel, et on peut toujours en parler même si on ne les voit pas explicitement.

• **Évolution des géométries**

En **cycle 1**, l'enseignement permet aux élèves de reconnaître, d'explorer des formes, d'organiser des collections d'objets en fonction de différents critères, catégories, propriétés (forme / grandeur : longueur, masse, contenance / couleur / usage / fonction). Ces compétences seront travaillées dans un prochain TD sur les figures usuelles. Ce qu'il est important de comprendre est que les apprentissages de cycle 1 sont basés sur **la perception visuelle**.

En **cycle 2** : Les notions de géométrie plane et les connaissances sur les figures usuelles s'acquièrent à partir de **manipulations** et de **résolutions de problèmes** (reproduction de figures, activités de tri et de classement, description de figures, reconnaissance de figures à partir de leur description, tracés en suivant un programme de construction simple). La reproduction de figures diverses, simples et composées est une source importante de problèmes de géométrie dont on peut faire varier la difficulté en fonction des figures à reproduire et des **instruments disponibles**. Les concepts généraux de géométrie (droites, points, segments, angles droits) sont présentés à partir de tels problèmes.

En **cycle 3** : Les activités géométriques pratiquées s'inscrivent dans la continuité de celles fréquentées au cycle 2. Elles s'en distinguent par une part plus grande accordée au **raisonnement et à l'argumentation** qui complètent la perception et l'usage des instruments.

• **Les connaissances de base**

La géométrie étudiée ici se situe dans le plan : on parle de géométrie plane.
Le plan est symbolisé par la feuille de papier. Le plan est une surface infinie. La feuille que l'on utilise est bien sûr limitée à ses bords.

— **Points et lignes**

1. **Le point** : Un point du plan est un lieu, un endroit qui n'a ni longueur ni épaisseur. Il existe partout des points, qui ne sont pas nécessairement marqués ou encore moins nommés.
Pour les utiliser, on les marque au moyen de
deux traits qui se croisent.
Pour pouvoir en parler on les nomme au moyen
d'une **lettre majuscule**.

2. **La droite** : Si l'on a marqué et nommé A et B deux points du plan, on peut tracer autant de traits que l'on veut qui passent par ces deux points : on obtient des lignes. Une droite est un ensemble d'une **infinité de points, qui se trace à la règle**.

Propriété : Par deux points, il passe une et une seule droite.

Pour l'utiliser, on en trace **une partie en faisant comprendre cette idée d'infini** : on va aussi loin qu'on peut sur la feuille.
Pour pouvoir en parler on la nomme au moyen de **deux points entre parenthèses** ou de **deux directions entre parenthèses** ou d'une **lettre entre parenthèses**.

3. **Points alignés** : Des points sont alignés s'il existe une **droite qui passe par tous ces points**. (La question ne se pose qu'à partir de trois points.)

Pour dire qu'un point est situé sur une droite ou qu'une droite passe par un point, on utilise le mot **appartenir** qui se symbolise par « $\in$ » et sinon « $\notin$ ».

4. **La demi-droite** : Une demi-droite est une partie de droite délimitée par un point en une extrémité : son origine.

Pour l'utiliser, on trace une **portion de droite délimitée par un point**.
Pour pouvoir en parler on la nomme au moyen de **deux points** (d'un point et d'une direction) **entre crochet du côté de l'origine et parenthèse de l'autre côté**.

5. **Le segment** : Un segment est une partie de droite délimitée par deux points : ses extrémités.

Pour l'utiliser, on trace **une portion de droite délimitée par deux points**.
Pour pouvoir en parler on le nomme au moyen de **deux points entre crochets**.

6. **L'angle** : Un angle est **une portion de plan délimitée par deux demi-droites de même origine**.

Pour l'utiliser, on trace **les demi-droites**, ses côtés, **de même origine**, son sommet, et on indique par un petit arc de cercle la portion de plan.
Pour pouvoir en parler on le nomme au moyen de **trois points** (ou de deux directions et d'un point) **surmontés d'un chapeau circonflexe**.

— **Positions relatives de droites**

1. **Droites sécantes, concourantes** : Deux droites sécantes ou trois droites (ou plus) concourantes sont des droites qui **passent par un même point** : leur **point d'intersection** ou de **concours**.

2. **Droites perpendiculaires** : Des droites perpendiculaires sont des **droites sécantes qui forment quatre angles parfaitement superposables : des angles droits**.

3. **Droites parallèles** : Des droites parallèles sont des droites qui n'ont **aucun point commun**. Elles ne se croisent jamais aussi loin qu'on les prolonge.

Propriété : Des droites sont parallèles si et seulement si la distance entre deux points de ces droites obtenus par intersection avec une droite perpendiculaire, est constante (toujours la même).

Propriété : Par un point donné, il passe une et une seule droite perpendiculaire à une droite donnée.
On utilise cette propriété pour tracer l'unique droite perpendiculaire à l'aide de l'équerre : un côté de l'angle droit longe la droite, l'autre côté de l'angle droit passe par le point.

Propriété : Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième droite, alors elles sont parallèles entre elles.
On utilise cette propriété pour tracer une droite parallèle à une autre : on trace une perpendiculaire commune.

Propriété : Si deux droites sont parallèles, alors toute droite perpendiculaire/parallèle à l'une est perpendiculaire/parallèle à l'autre.

— **La médiatrice d'un segment**
Le segment étant une portion de droite délimitée par deux points, il est le seul à avoir une longueur.

On peut **mesurer la longueur d'un segment** à l'aide d'une règle graduée en positionnant le zéro de la graduation sur une de ses extrémités et en lisant la graduation correspondant à la seconde extrémité. Cela reste une mesure : donc une valeur approchée.
On peut trouver **le milieu d'un segment** : c'est le point qui se trouve à la **même distance des deux extrémités** du segment. On code les deux moitiés de segment de même longueur pour indiquer qu'on a placé son milieu.
La médiatrice d'un segment est **la droite perpendiculaire à ce segment et qui passe en son milieu**.

Propriété : Un point est sur la médiatrice d'un segment si et seulement si il est équidistant des extrémités de ce segment.

— **Distance d'un point à une droite** : La distance d'un point à une droite est **la longueur du plus court segment qui relie le point à un point de la droite** : ce dernier est le segment porté par la perpendiculaire à la droite passant par le point.

TD

Cette fiche d'exercices porte sur l'apprentissage des éléments de base de la géométrie plane même si l'enseignement de la géométrie commence par des solides...

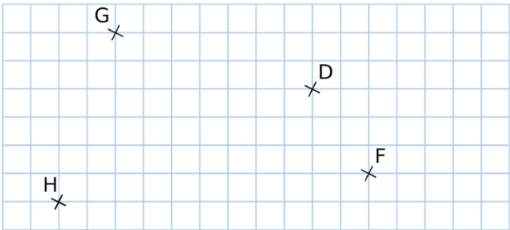
Compétences :

— Reconnaître et utiliser les notions d'alignement, d'appartenance, de perpendicularité, de parallélisme, d'égalité de longueurs, de milieu.

— Reconnaître, nommer, décrire, reproduire, représenter, construire quelques figures géométriques usuelles.

— Utiliser les instruments de construction et de mesure.

Exercice 1. *(d'après iParcours 6è)*
Placer quatre points comme ci-dessous en respectant le quadrillage.

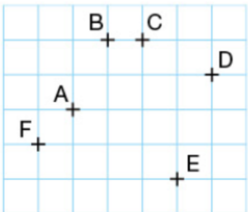


1. Tracer le segment [GD], la demi-droite [DF) la droite (HF).
2. Les segments [HG] et [DF] se croisent-ils ? Les droites (HF) et (DG) se croisent-elles ? Les demi-droites [DF) et [GH) se croisent-elles ? Si oui, nommer P, Q et R les points d'intersection.
3. Construire les points suivants :

(a) A est le point d'intersection des droites (HD) et (GF). Donner deux autres façons de nommer la droite (GF).

(b) U est le point d'intersection des droites (GH) et (DF). Nommer toutes les demi-droites possibles avec les trois points U, G et H.

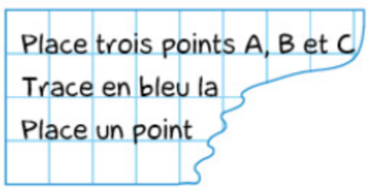
Exercice 2. *(d'après Transmaths 6è)*
Placer six points comme ci-dessous. Dans chaque cas, écrire avec des notations mathématiques et compléter la figure.

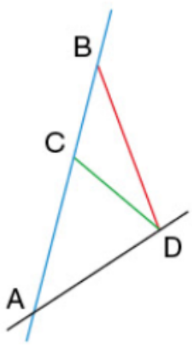


1. Le segment d'extrémités les points A et B.
2. La droite passant par les points C et D.
3. La demi-droite d'origine B passant par E.
4. Un point I appartenant à la droite qui passe par les points E et F.
5. Un point J appartenant à la droite (AD) mais pas au segment [AD].

Exercice 3. *(d'après Transmaths 6è)*
Les points A, M, N, P et B sont alignés dans cet ordre. Recopier chaque expression en complétant par $\in$ ou $\notin$.
M...[AB]   P...[MN]   B...(AN)   N...(BP)   M...[AN]   A...[PM]   B...(NP)   A...(MB]

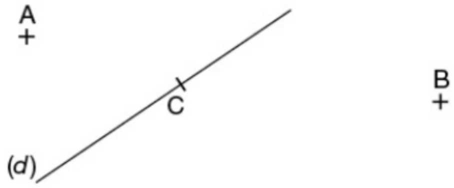
Exercice 4. *(d'après Transmaths 6è)*
Alexis a décrit la figure ci-contre, mais sa feuille a été déchirée. Voici une partie du début de son texte.
Recopier ces lignes, les compléter et écrire la suite.





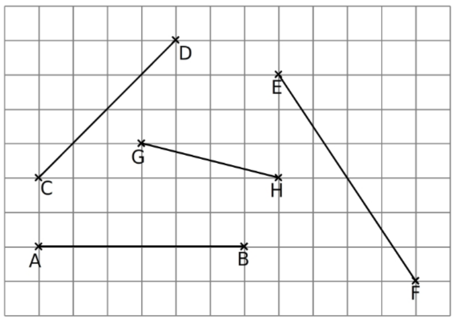
Exercice 5. *(d'après Transmaths 6è)*

1. Tracer cette figure où (d) passe par C.

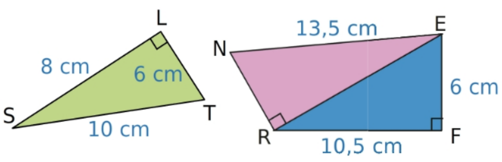


2. Tracer la droite perpendiculaire à la droite (d) qui passe :
a. par A ; b. par B ; c. par C.
3. Tracer la droite parallèle à (d) qui passe par B.
4. Tracer la droite parallèle à (BC) qui passe par A.

Exercice 6. *D'après iParcous 6ème*
Trouver les milieux de chaque segment sans instrument. Construire les médiatrices de [CD] et [EF]. Coder la figure.

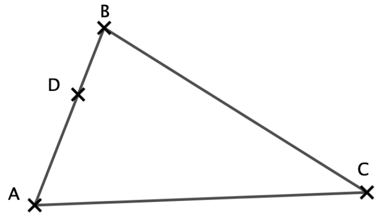


Exercice 7. *D'après iParcous 6ème*
Observer et compléter les phrases ci-contre.

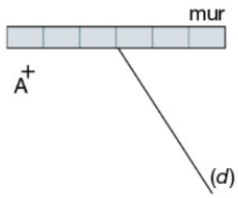


La distance du point S à la droite (LT) est ....
La distance du point T à la droite ...... est 6 cm.
Le point ...... est situé à 10,5 cm de la droite ......
Le point ...... est situé à ...... de la droite (RF).
La distance du point E à la droite (NR) est comprise entre ...... et ....

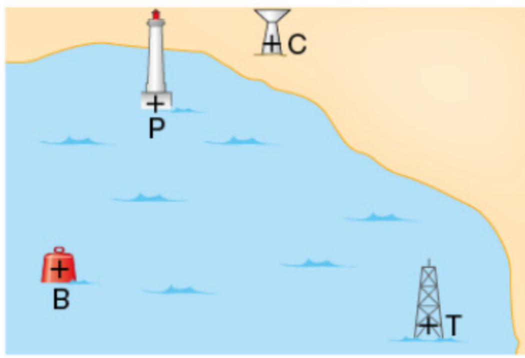
Exercice 8. *D'après Transmaths 6ème*
Amélie a caché un point L sur cette figure. Trouver l'emplacement du point L avec les indices suivants : (DL)//(AC) et (DL)⊥(CL)



Exercice 9. *(d'après Transmaths 6è)*
Sur la figure ci-dessous, tracer la perpendiculaire à la droite (d) passant par A sans franchir le mur. Expliquer.

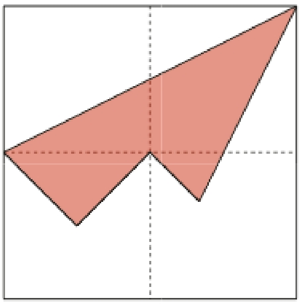


Exercice 10. *D'après Transmaths 6ème*
Une éolienne, E, doit être installée en mer. Elle doit être équidistante d'une part du phare, P, et de la bouée, B et d'autre part du château d'eau, C, et de la tourelle, T. Placer E.



Exercice 11. *D'après iParcours 6ème*
1. Un point M étant donné, construire une droite (d_1) telle que M soit situé à 4 cm d'elle.
2. Construire en vert tous les points situés à 4 cm de (d_1)

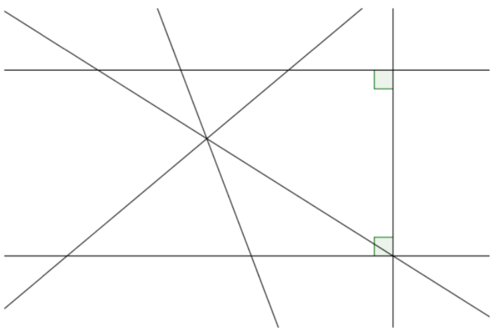
Exercice 12. *D'après iParcours 6ème*
Regarder attentivement la figure ci-dessous. Les pointillés relient les milieux des côtés du grand carré.
À partir d'un carré de côté 8 cm et avec la règle, reproduire la figure.



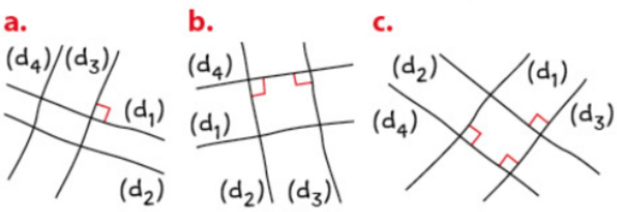
Exercice 13. *D'après Transmaths 6ème*
A, B, C sont trois points alignés, pas nécessairement dans cet ordre. On sait que AB $=$ 17 cm et AC $=$ 25 cm.

1. Calculer les valeurs possibles de la distance entre les points B et C.
2. Que peut-on dire des médiatrices de [AB] et [AC] ? Justifier.

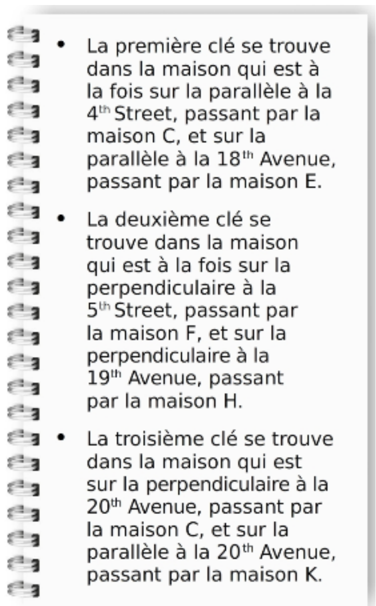
Exercice 14. *D'après Transmaths 6ème*
Retrouver les noms des huit points ci-dessous grâce à ces informations :
Les points A, B, G sont alignés.
Les droites (CG) et (BE) sont sécantes en H.
(DF) et (BD) sont perpendiculaires.
(AB) et (CE) sont parallèles.
F appartient à [CE] et C appartient à [EF].



Exercice 15. *(d'après Transmaths 6è)*
Pour chaque figure, donner les positions relatives des droites en utilisant les termes sécantes, parallèles, perpendiculaires.



Exercice 16. *D'après iParcours 6ème*
Alice a placé un trésor dans un coffre à trois serrures. Elle a caché chaque clé dans une maison différente.
À l'aide des informations suivantes, détermine dans quelle maison se trouve chaque clé.



- La première clé se trouve dans la maison qui est à la fois sur la parallèle à la 4th Street, passant par la maison C, et sur la parallèle à la 18th Avenue, passant par la maison E.
- La deuxième clé se trouve dans la maison qui est à la fois sur la perpendiculaire à la 5th Street, passant par la maison F, et sur la perpendiculaire à la 19th Avenue, passant par la maison H.
- La troisième clé se trouve dans la maison qui est sur la perpendiculaire à la 20th Avenue, passant par la maison C, et sur la parallèle à la 20th Avenue, passant par la maison K.

Exercice 17. CERPE académie de Dijon mai 2004

Le sujet ci-dessous s'appuie sur des fiches de manuels de CE1 et de CP faisant partie de la collection Euro-maths publiée chez Hatier.

L'absence de couleur dans la reproduction des ouvrages n'a aucune incidence dans le traitement des questions de ce volet.

Première partie : ouvrage de CE1

Annexes 1.1 ; 1.2 ; 1.3 (fiches 7, 17 et 88).

1. On commence par la fiche 7 (Annexe 1.1).

(a) Quel peut être l'intérêt d'un tracé à main levée par rapport à un tracé à la règle ?

(b) En tenant compte de la question a), réécrire l'objectif cité par les auteurs, lequel n'est qu'une reprise du titre.

2. Citer trois variables didactiques intervenant dans les tracés demandés sur la fiche 17 (Annexe 1.2).

3. Dans la fiche 88 (Annexe 1.3),

(a) Considérer d'abord la situation de découverte.

• Reproduire la figure du milieu sur la copie (l'échelle n'a pas d'importance).

• La compléter ensuite comme l'indique le modèle, en un nombre minimal d'étapes. On n'effectuera que des tracés à la règle sans gommer.

• Numéroter sur celle-ci les étapes du tracé.

• Expliquer ces différentes étapes.

(b) Sur l'ensemble de la fiche, citer trois compétences que l'élève doit exercer dans ses tracés à la règle ?

Deuxième partie : ouvrage de CP

Annexes 2.1 ; 2.2 ; 2.3 (fiches 13, 20 et 21).

Ces fiches préparent les fiches de CE1 précédemment citées.

4. Indiquer en quoi chacun des exercices de la fiche 13 de CP (Annexe 2.1) prépare l'enfant à la réalisation de la fiche 7 de CE1 (Annexe 1.1).

5. Décrire la progressivité des apprentissages entre les quatre fiches suivantes : fiches 20 et 21 de CP, 17 et 88 de CE1 (Annexes 2.2, 2.3, 1.2, 1.3). Autrement dit, d'une fiche à la suivante, indiquer quels sont les pas supplémentaires franchis.

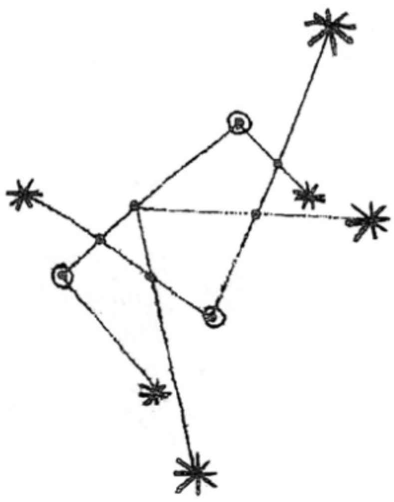
Annexe 1.1

7 Reproduire, à main levée, à la règle

Date : ....
....

Découverte

Reproduis à main levée.



Pablo Picasso
Dessin n° 14, extrait du cahier 92, 1926.
Photo Bill Jacobson studio, New York.

Exercice

Reproduis le dessin.

modèle — à main levée — à la règle

◆ Objectif • Tracer des traits à main levée, à la règle.

◆ Mise en route • Jeu de bataille (cf. activité préparatoire p. 14).

Annexe 1.2

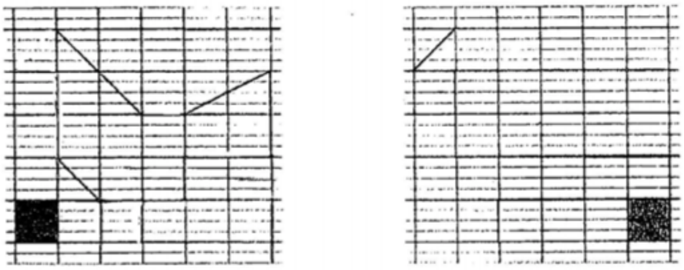
17 Reproduire sur quadrillage

Date : ....

....

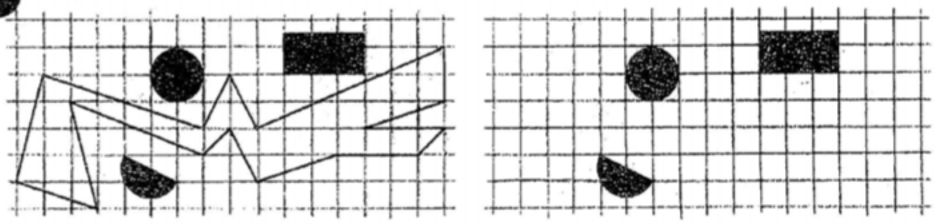
Découverte

Complète dans les deux quadrillages pour que les dessins soient identiques.

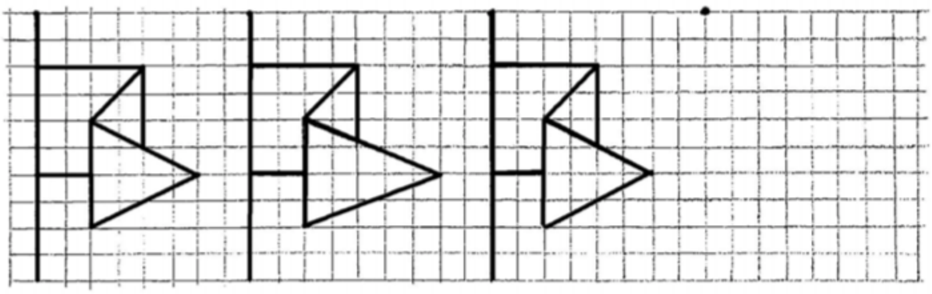


Exercices

Reproduis la figure.



Observe les dessins de Marie et de Nicolas. Repasse en vert celui qui correspond au modèle. À ton tour, reproduis le modèle à partir du point bleu.



modèle Marie Nicolas

◆ Objectif • Repérer les cases ou les nœuds d'un quadrillage pour reproduire un dessin, une figure.

◆ Mise en route • Jeu de piste (cf. p. 25) : le maître écrit le numéro d'une case au tableau (de 1 à 50). Il lance le dé du jeu de piste et annonce la couleur de la face et le nombre. Les enfants écrivent le numéro de la case d'arrivée. Un enfant vérifie sur le jeu de piste.

Annexe 1.3

88 Constructions géométriques (1)

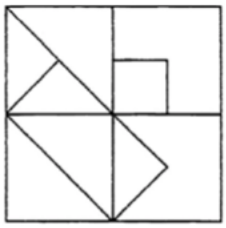
Date :

....

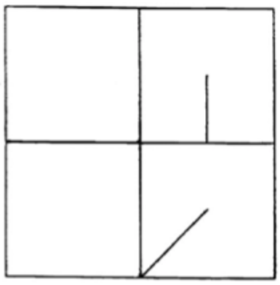
....

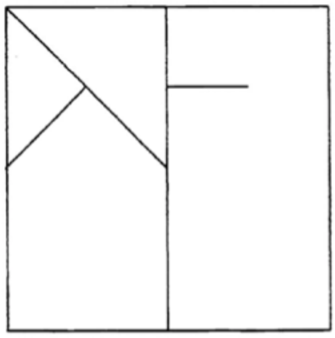
Découverte

Complète les figures pour qu'elles soient semblables au modèle.



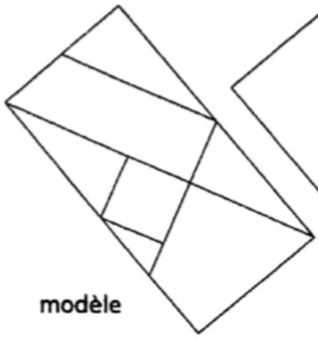
modèle



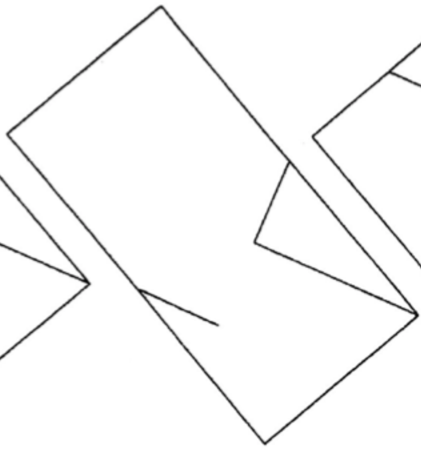


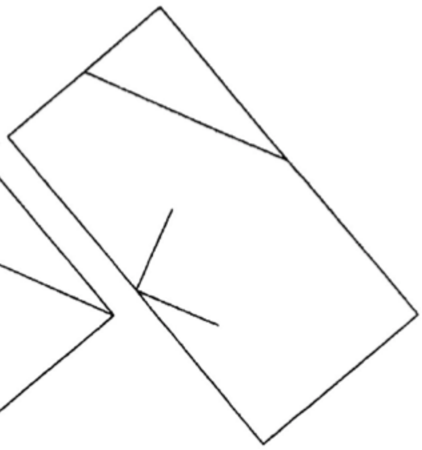
Exercices

Complète les figures pour qu'elles soient semblables au modèle.



modèle



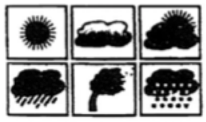


◆ **Objectifs** • Utiliser les instruments de géométrie pour reproduire ou compléter des figures. • Décrire des figures, des assemblages de figures.

◆ **Mise en route** • Dictée de nombres sur calculatrice : le maître dit un nombre ou l'écrit en lettres au tableau, les enfants le tapent sur leur calculatrice. • Jeu d'étiquettes sur les mots-nombres (cf. activité préparatoire p. 144).

Annexe 2.1

13 Tracer à main levée



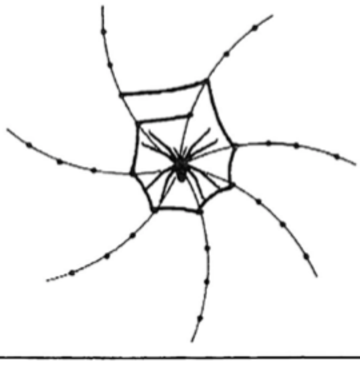
Date :

Exercices

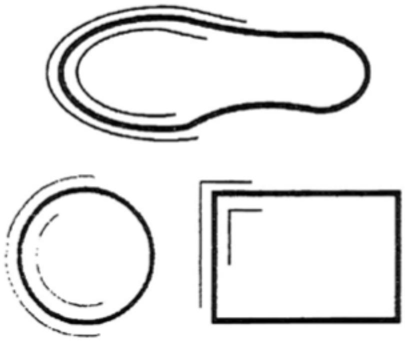
(1) **Reproduis** à main levée.

Pablo Picasso.
Dessin extrait
du cahier 92, 1926.
Photo Bill Jacobson
Studio, New York.

(2) **Continue** de tracer les fils de la toile d'araignée à main levée.



(3) **Continue** les tracés à main levée.

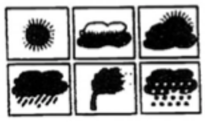


◆ **Objectifs** • Tracer des traits droits ou curvilignes à main levée. • Reproduire une figure à main levée.

◆ **Mise en route** • L'appel • La date • Jeu du furet : Les enfants disent la suite des nombres aussi loin qu'ils le peuvent à partir de 1, puis d'un autre nombre. Les enfants décomptent à partir de 12. Les enfants continuent à remplir leur accordéon numérique.

Annexe 2.2

20 Alignements de cases



Date :

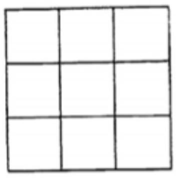
◆ **Activité préparatoire :** Le jeu du Tic Tac Toe.

Application

Règle du jeu de Tic Tac Toe

- **2 joueurs**

Des jetons ronds et des jetons triangulaires.
Chaque joueur choisit une forme de jetons.
Les joueurs placent à tour de rôle un de leurs jetons dans une case du quadrillage.
Le gagnant est le premier qui aligne 3 jetons de même forme.



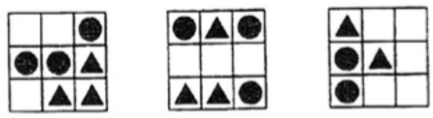
Joue avec un camarade.
Représente une autre partie terminée sur le quadrillage.

Qui a gagné ? ▲ ●

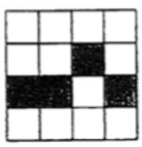
Exercices

(1) Qui a gagné ? Entoure le jeton.

(2) Tu peux gagner en plaçant dans chaque quadrillage un ▲.
Dessine-le.

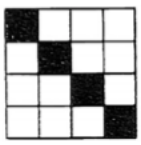


(3) Les cases vertes sont-elles alignées ?



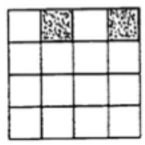
oui **non**

(4) Les cases **bleues** sont-elles alignées ?



oui **non**

(5) **Colorie** pour que les cases jaunes soient alignées.



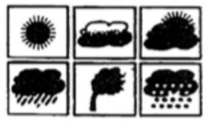
◆ **Objectifs** • Repérer des cases alignées. • Élaborer une stratégie.

◆ **Mise en route** • Jeu du furet : les enfants disent les nombres le plus loin possible à partir de 1, puis d'un autre nombre. Ils décomptent à partir de 22. Puis, ils continuent à remplir leur accordéon numérique.

(corrigé page 196)

Annexe 2.3

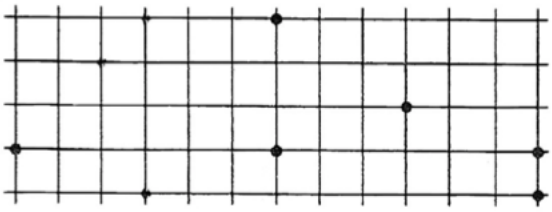
21 Alignements de nœuds



Date : ....

Découverte

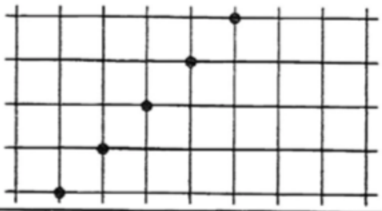
Si les trois points
de même couleur
sont alignés,
joins-les à la règle.



Exercices

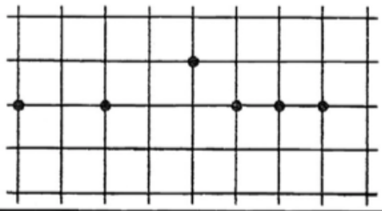
1. Les points sont-ils alignés ?

oui | non

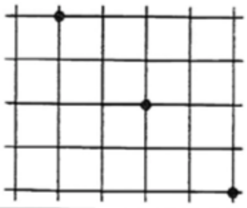


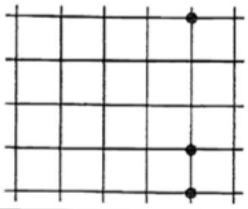
2. Les points sont-ils alignés ?

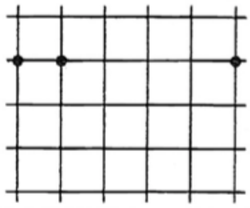
oui | non



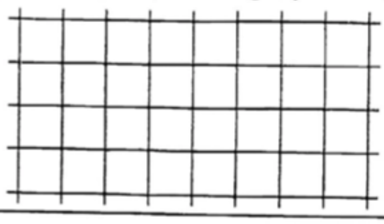
3. **Continue de placer** des points pour qu'ils soient alignés. **Vérifie** avec ta règle.

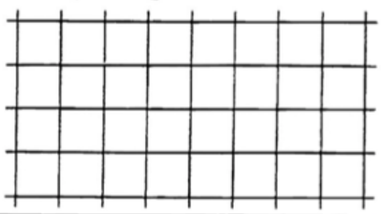






4. Sur chaque quadrillage, **place 3** points qui ne soient pas alignés.



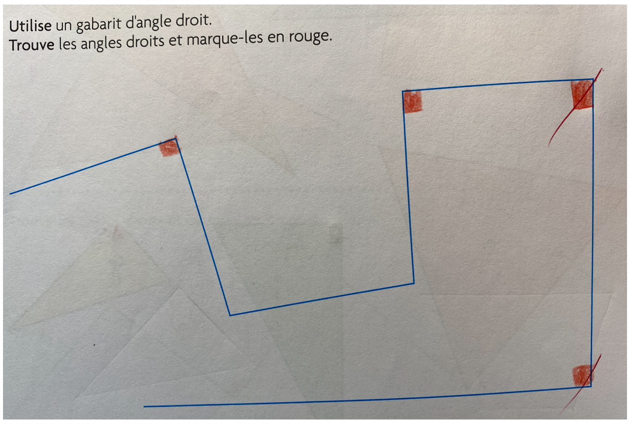


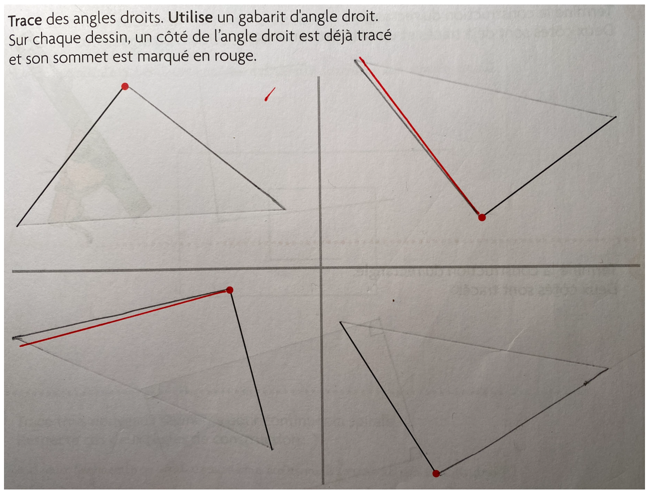
◆ **Objectif** • Repérer des nœuds alignés.

◆ **Mise en route** • Le maître dit un nombre dans le champ numérique de 1 à 22, les enfants disent ou écrivent le nombre juste avant ou le nombre juste après.

Exercices supplémentaires

Exercice 18. Les deux productions suivantes sont issues du cahier de Géométrie-Longueurs CapMaths CE1





1. Dans quelles catégories se classent ces problèmes ?
2. Qu'est-ce qu'un gabarit d'angle droit ?
3. Quelle est la définition d'un angle ? Quelle définition d'un angle droit peut-on donner à des élèves de cycle 2 ?
4. Quelle peut-être la difficulté pour utiliser une équerre ?
5. Pourquoi les sommet des angles sont marqués en rouge dans le deuxième exercice ?
6. Qu'est-ce qu'être précis en géométrie ?

Exercice 19. Sujet CERPE mai 2006 grp3
Étude des documents 1 et 2 ci-après.

1. On considère d'abord le document 1.

(a) Décrire deux procédures possibles des élèves en réponse à la question 1.

(b) Quelle propriété le professeur des écoles souhaite-t-il faire émerger en proposant cette situation ? Citer une difficulté qui peut faire obstacle à l'émergence de cette propriété.

(c) Pourquoi la consigne préalable aux questions 2, 3 et 4 précise-t-elle que la droite tracée ne doit pas être parallèle aux bords de la feuille ?

(d) En prolongement de la question 4 du document 1, indiquer quel est l'ensemble constitué par tous les points situés à 7 cm de la droite.

2. On considère maintenant le document 2 (copie d'écran).

Pour procéder à une synthèse de l'activité précédente, l'enseignant décide de projeter sur tableau blanc une figure réalisée avec un logiciel de géométrie dynamique. Le point P peut alors être déplacé sur la droite, et la distance AP s'afficher, comme sur la copie d'écran. Le point A et la droite peuvent également être déplacés. Quel avantage peut apporter ce support, pour la connaissance visée, par rapport au dessin sur feuille des élèves ?

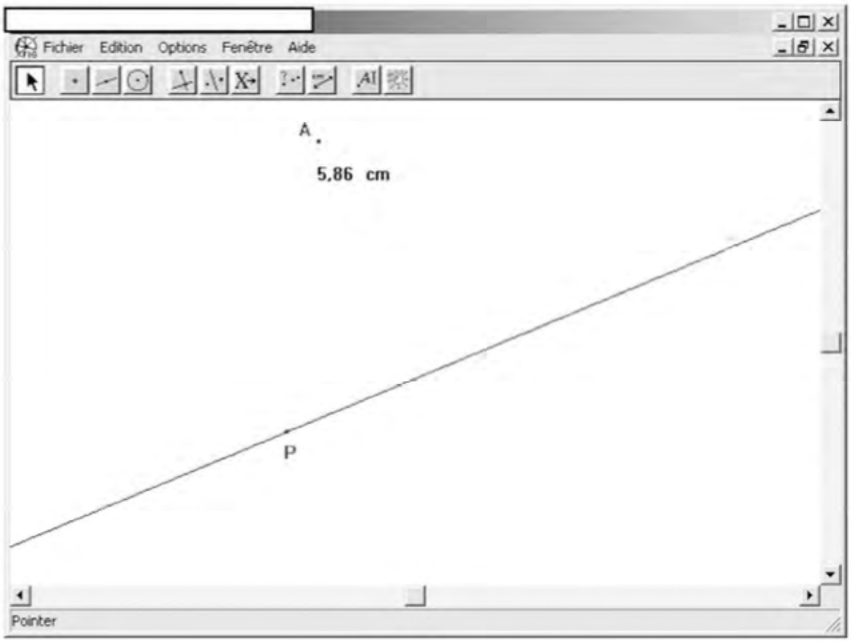
Document 1 : Extrait d'un manuel de cycle 3 (Cap Maths, éd. Hatier, 2004.)

1. Place, sur la droite, le point qui est le plus proche du point A (le dessin ci-dessous est une réduction d'une fiche format A4 fournie aux élèves) :

Pour les questions 2, 3 et 4, utilise à chaque fois une feuille de papier uni et trace une droite. La droite que tu traces ne doit pas être parallèle aux bords de la feuille.

2. Avec ton équipe, propose une méthode qui permet de placer, du premier coup, un point qui est exactement à 7 cm de la droite.
3. Place un point en dehors de la droite, nomme-le A.
   Comment faire pour déterminer rapidement le point de la droite qui est le plus proche du point A ?
4. Place rapidement et avec précision 24 points à 7 cm de la droite.

Document 2 : Copie d'écran (logiciel de géométrie dynamique)



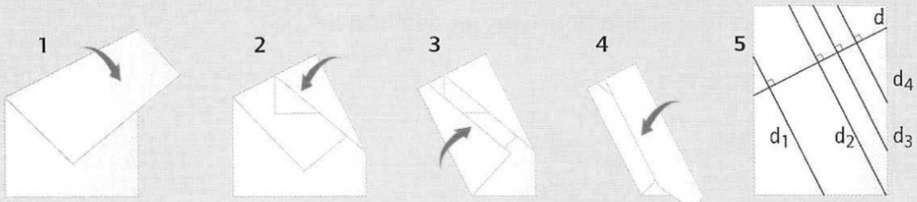
Exercice 20. D'après un sujet du CERPE mai 2008 grp5
Pour chacune des deux parties de l'activité suivante, indiquer :

1. l'objectif visé par le maître,
2. la procédure mise en œuvre,
3. la connaissance mathématique sous-jacente.

Extrait du livre « À portée de maths », CM1, hachette, 2006

PARTIE 1

a) Prends une feuille de papier et réalise le pliage en suivant les étapes 1 à 4.



Déplie la feuille et repasse les 5 plis au crayon (étape 5). Tu as tracé 5 droites : d, d_1, d_2, d_3 et d_4.

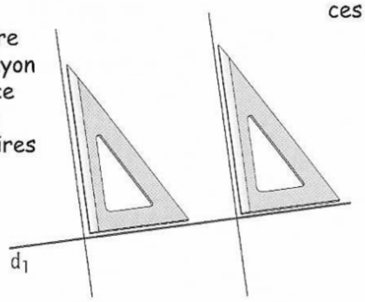
b) Que peux-tu dire des droites d et d_1 ? d et d_2 ? d_1 et d_2 ? d_2 et d_3 ? d_3 et d_4 ?

PARTIE 2

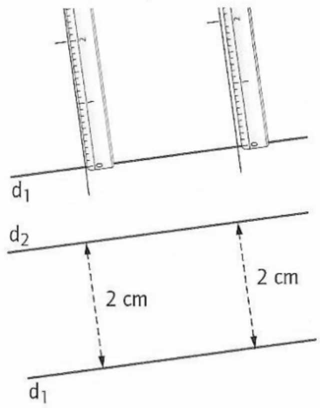
Des droites parallèles sont des droites dont l'écartement est constant.

Comment construire deux droites parallèles ?

1) Trace une droite d_1. Puis à l'aide de ton équerre et de ton crayon à papier, trace deux droites perpendiculaires à d_1.



2) En utilisant ta règle graduée, marque sur ces deux droites un point situé à 2 cm de d_1.



3) Avec ta règle, trace la droite d_2 passant par les deux points marqués.
d_1 et d_2 sont deux droites parallèles distantes de 2 cm l'une de l'autre. On note $d_1 // d_2$.

Thème 4 | Grandeurs, mesures, agrandissement

Memo

• Grandeurs et mesures

Une grandeur est une caractéristique physique qu'on peut estimer de manière quantitative pour pouvoir comparer, ajouter, augmenter/diminuer, diviser, etc. Elle permet de mesurer les caractéristiques d'un objet et pour un même objet plusieurs grandeurs de nature différente peuvent être étudiées.

Exemple. On considère une citerne cylindrique : on peut estimer sa longueur, sa capacité, la surface de métal utilisée, sa masse...

Les mesures sont des valeurs numériques associées à ces grandeurs physiques. Pour les évaluer on doit leur choisir une *unité*. Une unité est un étalon qui permet de comparer une grandeur pour des objets différents.

⚠ Deux mesures d'une même grandeur sont égales *indépendamment* de l'unité choisie, en revanche il est *indispensable* d'indiquer les unités de part et d'autre de l'égalité. Deux grandeurs de nature différente n'ont jamais de mesures égales, ni comparables : on appelle cela *l'homogénéïté*.

Exemple. L'égalité "1 Litre = 2 Euros" n'est pas homogène car le terme de gauche représente un volume et celui de droite un prix. Cette égalité n'a pas de sens.

Les grandeurs et leurs mesures sont évidemment au centre des programmes de l'école primaire, parce qu'elles apparaissent naturellement dans le quotidien de chacun, qu'elles sont par conséquent une porte d'entrée vers de nombreuses notions, et parce qu'elles permettent de faire des ponts entre les apprentissages (mathématiques, sciences en général, informatique mais aussi EPS, etc). En maths, elles apparaissent naturellement dans les trois compétences *modéliser*, *représenter* et *raisonner*.

Les grandeurs de l'école primaire sont la longueur, la durée, la masse, l'angle, la température, le prix ainsi que des grandeurs composées (produit ou quotient des grandeurs de base) : la vitesse, l'aire, le volume (ou la capacité).

N.B. Il y en a d'autres : débit, densité, accélération, tension, intensité, énergie...

Au *cycle 1* : l'accent est mis sur *l'intuition* des (formes et) grandeurs : longueur, contenance, masse, aire, etc. Les élèves commencent à fabriquer des repères et de connaissances via les manipulations etla coordination d'actions sur des objets.

Au *cycle 2*, apparaît une approche mathématique aux grandeurs et leurs liens à l'**unité** : « ils déterminent combien de fois une grandeur à mesurer « contient » une grandeur de référence (l'unité). Ils s'approprient ensuite les unités usuelles et apprennent à utiliser des instruments de mesure (...). » Explicitées peu après, ces unités usuelles sont pour la longueur : m, dm, cm, mm, km, pour la masse : g, kg, tonne, et pour la contenance : L, dL, cL.

Au *cycle 3*, ces connaissances sont complétées et structurées : unités du Système International, notion d'angle, notions de périmètre et d'aire de surfaces, et de volume (et son lien avec la contenance). Il est clair que les grandeurs et leus mesures ont donc également une place importante dans l'étude de la géométrie (dès le cycle 2).

⚠ Lire les sections *Grandeurs et mesures* du programme des cycles 2 et 3.

• Unités de numération et unités de mesure

— **Le système métrique et l'écriture décimale :** Le système métrique est apparu, il y a plus de 200 ans. C'est un ensemble d'unités de référence qui sont liées à notre système d'écriture décimale.

Exemple. Les égalités : 1 mètre = 10 décimètres = 100 centimètres correspondent aux égalités numériques : 1 unité = 10 dixièmes d'unité = 100 centièmes d'unité. L'unité est alors le mètre et 1 *centi*mètre est 1 *centième* de l'unité "mètre".

CM1/CM2	Les nombres et les unités de grandeur														
	Les multiples												Les sous–multiples		
	x100 000 000 000	x10 000 000 000	x1 000 000 000	x100 000 000	x10 000 000	x1 000 000	x 100 000	x 10 000	x 1000	x 100	x 10		: 10	: 100	: 1000
La numération	centaines	dizaines	unités	centaines	dizaines	unités	centaines	dizaines	unités	centaines	dizaines	unités			
	les milliards			les millions			les milliers			les unités simples					
Les préfixes									kilo	hecto	déca		déci	centi	milli
mesures de longueurs									km	hm	dam	m	dm	cm	mm
mesures de masses						t	q		kg	hg	dag	g	dg	cg	mg
mesures de contenance										hL	daL	L	dL	cL	mL

On parle ainsi d'*unités à base 10* ou *décimales*. Elles permettent d'illustrer le passage à l'écriture décimale des nombres. Elles sont donc essentielles pour accompagner la compréhension des "écritures à virgule" en CM.

N.B. Il y a des unités qui ne sont pas à base 10 comme certaines unités classiques de temps : heures, minutes, secondes à base 60.

— **Changement d'unités :** Toutes les mesures d'une même grandeur sont proportionnelles (sauf pour la température). On parle alors de *conversion*.

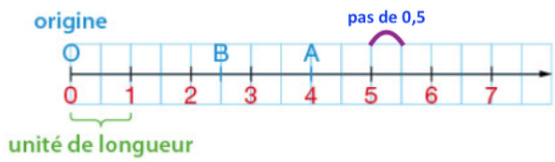
Exemple.

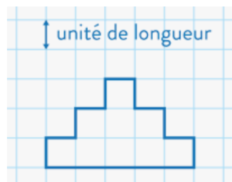
1. *Convertir* une longueur des mètres aux kilomètres revient à changer l'unité "mètre" par l'unité "kilomètre". Le *mètre* devient ainsi le millième de la nouvelle unité.

2. De même, convertir une durée de 39 minutes en heures nécessite de changer l'unité "minutes" en unité "heure" : 60 minutes = 1 heure, donc 1 minute = $\frac{1}{60}$ heures (retour à l'unité "minute"), et donc 39 minutes = $\frac{39}{60}$ heures = $\frac{13}{20}$ heures = 0,65 heures.

— **Unités (quelconque) et fractions :** Les deux exemples ci-dessus illustrent également le lien entre unités et fractions. Dans le cas des unités standard, il existe des noms pour certaines fractions de l'unité : $\frac{1}{100}$ du mètre est le centimètre, $\frac{1}{60}$ de la minute est la seconde.
Pour mesurer les longueurs (par exemple), il peut également être pratique d'utiliser une unité non standard : la longueur du côté (ou de la diagonale) d'un carreau de la feuille, la longueur d'une bande arbitraire, etc. Une fois l'unité fixée, c'est elle qui sert pour *toutes* les longueurs.

Exemple.





Dans de tels cas, certaines fractions de l'unité peuvent apparaître naturellement (comme 0,5 = $\frac{1}{2}$ dans l'exemple central ci-dessus).

• Valeurs exactes, valeurs approchées, ordre de grandeurs.

— **Erreur :** Toute mesure physique réelle est accompagnée d'une *erreur*, dont la taille est donnée par la précision de l'outil de mesure. Une mesure réelle donne une valeur approchée, tandis que la mesure théorique est une valeur exacte.

⚠ *Les erreurs s'accumulent* lorsqu'on utilise des valeurs approchées dans les calculs. C'est pourquoi on travaille *toujours* avec des valeurs exactes.

Exemple. 3,14 est une valeur arrondie de π *au centième*, mais 314 est une valeur arrondie de $100\,\pi$ *à l'unité* : l'erreur au centième est devenue une erreur à l'unité à cause du calcul. (On perd 20 km dans le calcul de la longueur de l'équateur terrestre !)

— L'**ordre de grandeur** d'un nombre est l'unité qui correspond le mieux à sa taille : on peut choisir l'unité correspondant à son premier chiffre (différent de 0) en écriture décimale (parfois on garde aussi le premier chiffre).

Déterminer l'ordre de grandeur d'un calcul permet d'obtenir une estimation de la taille d'une grandeur et permet de contrôler la cohérence d'un résultat. Le calcul nécessaire étant en règle générale facile, on l'effectue mentalement.

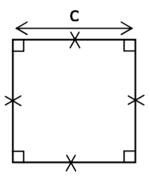
Exemple. L'ordre de grandeur de 312×643 c'est celui de 300×600, c'est à dire celui de $180\,000$: c'est de l'ordre de la centaine de mille (ou 10^5).
Si je roule à 120 km/h et qu'un mile vaut 1,6 km, ma vitesse en mile/h sera de l'ordre de ma vitesse en km/h (un peu moins) : je ne peux pas trouver 750 mile/h ni 7,5 mile/h.

• Périmètre d'une figure

Le *périmètre* d'une figure ou d'une courbe est la mesure de la longueur de son contour. Les grandeurs qui lui sont associées sont donc des **longueurs**.

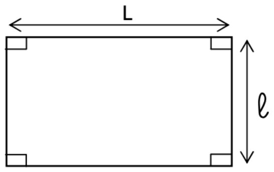
Formulaire des périmètres usuels

Le carré



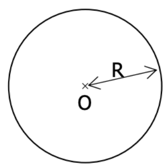
Périmètre $= 4 \times c$
Aire $= c^2$

Le rectangle



Périmètre $= 2 \times (L + l) = 2L + 2l$
Aire $= L \times l$

Le cercle/disque

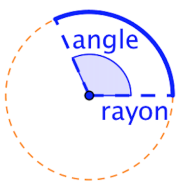


Périmètre du cercle $= 2\pi \times R$
Aire du disque $= \pi \times R^2$

• Cercle et angles

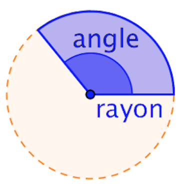
L'*angle* est une grandeur qui rend compte d'une fraction de tour autour d'un point fixé. Sa mesure (en degré) varie entre 0 et 360 et est proportionnelle à la longueur de l'arc de cercle qui lui correspond. Un angle de 1° (lire *un degré*) correspond donc à $\frac{1}{360}$ du tour d'un point fixé et l'arc associé a pour longueur $\frac{1}{360}$ du périmètre du cercle entier.

L'arc de cercle



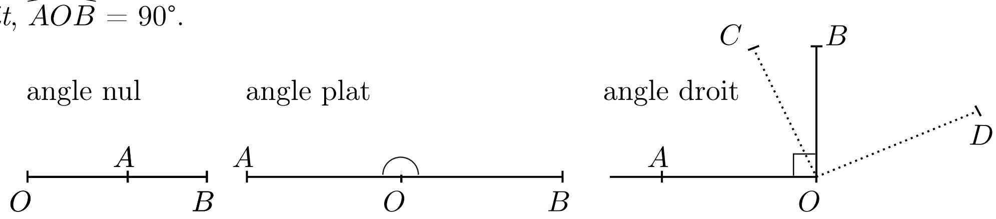
$$\text{Longueur de l'arc} = \frac{angle}{360} \times 2\pi \times R$$

Le secteur de disque



$$\text{Aire du secteur} = \frac{angle}{360} \times \pi \times R^2$$

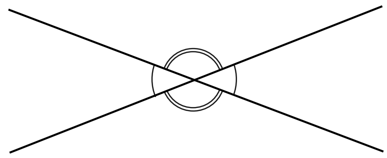
Ci-dessous sont illustrés trois angles particuliers : l'angle *nul*, $\widehat{AOB} = 0°$; l'angle *plat*, $\widehat{AOB} = 180°$; l'angle *droit*, $\widehat{AOB} = 90°$.



Les angles de mesure inférieure à 90° sont dits *aigus* (exemple $\widehat{AOC}$), les angles dont la mesure est supérieure à 90° sont dits *obtus* (exemple $\widehat{AOD}$).

Deux angles autour d'un même point fixe sont dits *adjacents* s'ils sont de part et d'autre d'un côté commun, comme les angles $\widehat{AOC}$ et $\widehat{COB}$ ci-dessus. Dans ce cas, la mesure de $\widehat{AOB}$ est la somme des mesures de $\widehat{AOC}$ et $\widehat{COB}$.

Finalement, deux droites sécantes déterminent deux paires d'angles dits *opposés par leur sommet*. La mesure de deux tels angles est la même.



• **Agrandissement réduction**

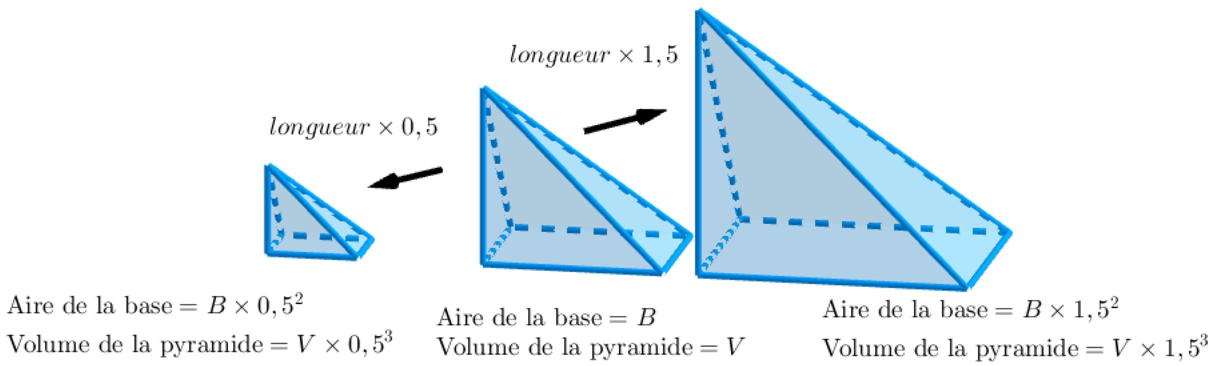
— **Agrandir ou réduire** un objet revient à multiplier toutes ces longueurs par un même coefficient k strictement positif.

- ⋆ Si $k > 1$, il s'agit d'un *agrandissement*.
- ⋆ Si $k < 1$, il s'agit d'une *réduction*.
- ⋆ Si $k = 1$, il s'agit d'une *reproduction*.

Dans tous les cas, k est le *facteur d'agrandissement, réduction*.

— **Effet d'un agrandissement/réduction sur les mesures de grandeurs.**

- ⋆ Les angles sont conservés.
- ⋆ Les longueurs sont multipliées par k.
- (⋆ Les aires sont multipliées par k^2.)
- (⋆ Les volumes sont multipliés par k^3.)



— **Une échelle** sur une carte ou un plan représente le facteur d'agrandissement ou de réduction du dessin par rapport à la réalité. Le dessin est donc un agrandissement ou une réduction du réel.

Exemple. Une échelle au 25e (ou $\frac{1}{25}$) signifie que les longueurs du dessin sont le 25e des longueurs réelles : elles sont donc multipliées par $\frac{1}{25}$ ou divisées par 25. On dit aussi que 1 cm représente 25 cm dans la réalité, ou encore "1 cm pour 25 cm".

TD

Les notions de ce thème ont pour objectif de compléter et structurer vos connaissances sur les grandeurs, de vous permettre de disposer de références concrètes (savoir, par exemple, que la circonférence de la Terre est environ 40 000 km) et être capables d'estimer l'ordre de grandeur d'une mesure ainsi que d'utiliser un répertoire de formules.

Compétences :

— Comparer, estimer, mesurer des grandeurs géométriques avec des nombres entiers et des nombres décimaux : longueur, périmètre, angle.

— Utiliser le lexique, les unités, les instruments de mesures spécifiques de ces grandeurs.

— Résoudre des problèmes et mener des calculs impliquant des grandeurs mesurables notamment des grandeurs composées (géométriques, physiques, économiques) ; exprimer les résultats dans les unités adaptées et cohérentes.

— Effectuer des conversions d'unités.

— Utiliser un rapport de réduction ou d'agrandissement (architecture, maquettes) ; faire le lien avec la proportionnalité.

Exercice 1. *(D'après Sésamath 6è)* Dans le tableau suivant, placer les chiffres des distances proposées à leur place puis convertir dans l'unité demandée.

	km	**hm**	**dam**	**m**	**dm**	**cm**	**mm**	
524 m	....	....	....	....	....	....	....	.... dm
130 004 cm	....	....	....	....	....	....	....	.... dam
2 km et 425 mm	....	....	....	....	....	....	....	.... dm
12 hm et 6 m	....	....	....	....	....	....	....	.... dam
2,095 dam	....	....	....	....	....	....	....	.... dm

Exercice 2. *(idem)* Pour faire une salade de fruits, Capucine a besoin d'un demi-kilogramme de pommes, de 750 g de poires, de 300 g d'oranges, de 0,4 kg de bananes et d'un citron. Quand elle pèse tous les ingrédients ensemble, elle obtient 2 kg. Combien pèse un citron ?

Exercice 3. *(idem)* Convertir chacune des mesures ci-dessous dans une unité plus adaptée :
a) 55 000 mL ; b) 120 000 cL ; c) 0,0015 hL ; d) 0,0332 daL ; e) 4 500 L ; f) 1 300 000 mL

Exercice 4. *(idem)* Lors d'une course de relais, quatre athlètes réalisent les temps suivants : 28 min 54 s, 29 min 12 s, 27 min 58 s, 28 min 1 s. Exprimer en heures, minutes et secondes la durée totale de leur course. Donner ensuite le résultat en heures, au centième d'heure près.

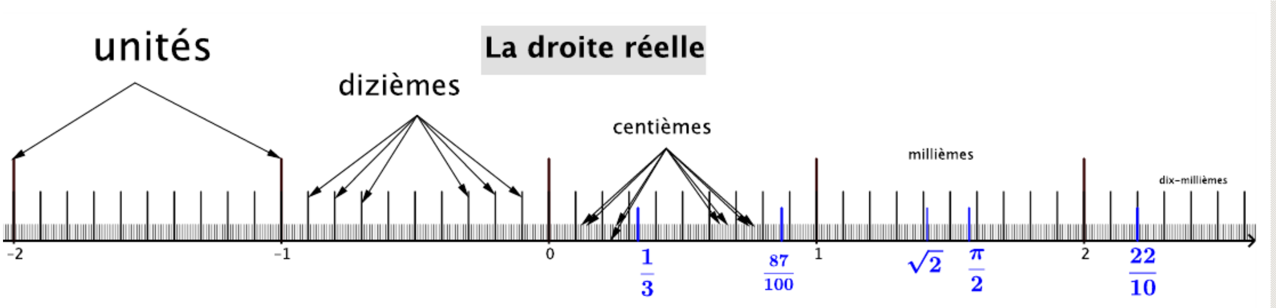
Exercice 5. La vitesse du son est d'environ 340 m/s.

1. Quelle est la distance parcourue par le son en 2 s ; 25 s ; 1 min ?
2. En combien de temps le son parcourt-il 1 km ?
3. Convertir la vitesse du son en km/h.

Exercice 6. Un train de 80 m de long roule à vitesse constante et parcourt 108 km par heure. Ce train traverse un tunnel et depuis le moment où la locomotive s'engage jusqu'au moment où le wagon de queue sort, il s'est écoulé 2 min 30 s.

1. Quelle est la distance franchie par la locomotive pendant ce temps ?
2. Quelle est la longueur du tunnel ?

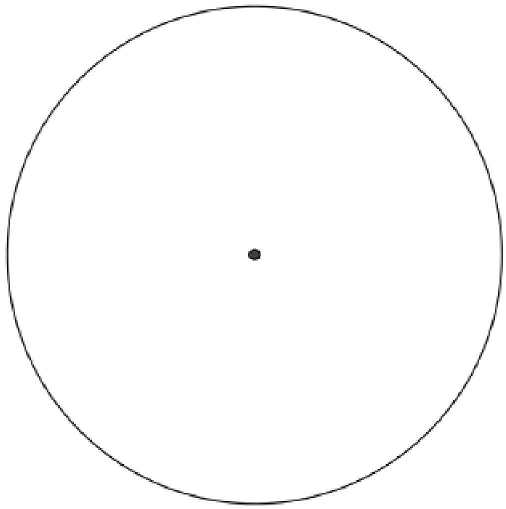
Exercice 7. Estimer, au dixième près, la valeur des nombres indiqués sur la droite réelle ci-dessous. Pour les fractions, vérifier le résultat.



Exercice 8. (On peut utiliser la calculette). Dans un exercice de fin de cycle 3, on trouve l'énoncé suivant :

"À l'aide d'une règle graduée, calcule au mm près le périmètre du cercle dessiné."

Préciser l'erreur commise sur la mesure et commenter.



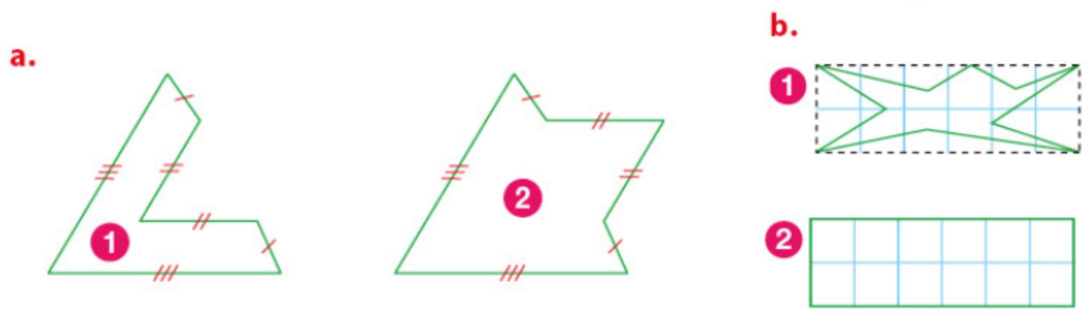
Exercice 9. Le système Terre-Soleil
La distance de la Terre au Soleil est de 150 millions de km. Le rayon du Soleil est de 700 000 km et la circonférence de la Terre de 40 000 km.

1. Quel est l'ordre de grandeur de la distance Terre-Soleil en rayons terrestres ? en rayons solaires ?
2. Si j'imagine que la Terre a la taille d'une orange, quelle serait la taille du Soleil ? À quelle distance se trouverait-il de la Terre ?
3. Déterminer la vitesse à la surface de la terre due à sa rotation sur elle-même.
4. Déterminer la vitesse de la Terre due à sa rotation autour du soleil.

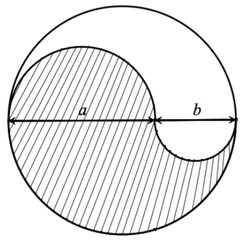
Exercice 10. *(D'après Sésamath 6è)* Compléter avec l'unité de masse la plus adaptée.

a) Un hélicoptère : 1,9 .... b) Une orange : 180 .... c) Une bouteille d'eau : 1 ....
d) Un iceberg : 180 000 .... e) Une fourmi : 18 .... f) Un grain de maïs : 35 ....

Exercice 11. *D'après Transmaths 6ème*
Dans chaque cas, sans calcul ni mesure, comparer les périmètres et les aires des deux figures.



Exercice 12. Le diamètre du disque ci-contre est partagé en deux segments de longueurs a et b. Deux demi-cercles sont construits respectivement sur chacun des deux segments de longueur a et b. Le disque initial est ainsi partagé en deux surfaces, l'une hachurée, l'autre non.

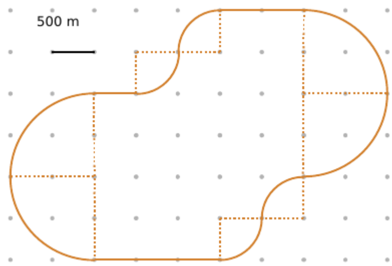


Répondre par VRAI ou FAUX à l'affirmation suivante puis justifier :

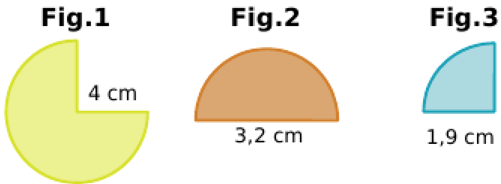
« *Le rapport entre le périmètre de la figure hachurée et le périmètre de la figure non hachurée est égal à* $\frac{a}{b}$. »

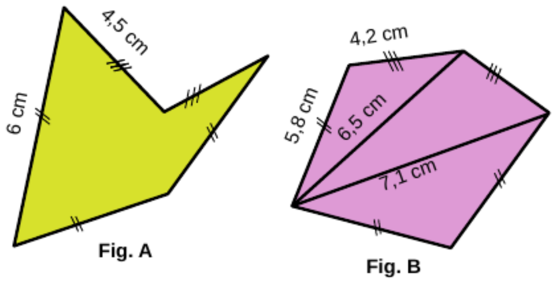
Exercice 13. *(D'après Sésamaths 6è)* Un « parcours santé » est représenté sur la figure ci-contre.

Déterminer la longueur réelle du parcours.



Exercice 14. Calculer le périmètre de chacune des sections de disque ci-dessous et de chacun des polygones ci-contre.





Exercice 15. Dans chacun des cas suivants, tracer une figure à la main, la coder, puis

1. calculer le périmètre :

(a) Un triangle GTU, isocèle en G, tel que GU = 30 mm et TU = 4 cm.

(b) Un triangle équilatéral RTF de côté 40 mm.

2. calculer la longueur des côtés :

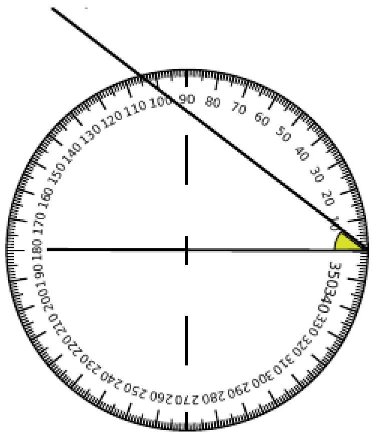
(a) Un triangle ERF, équilatéral, de périmètre 12 cm.

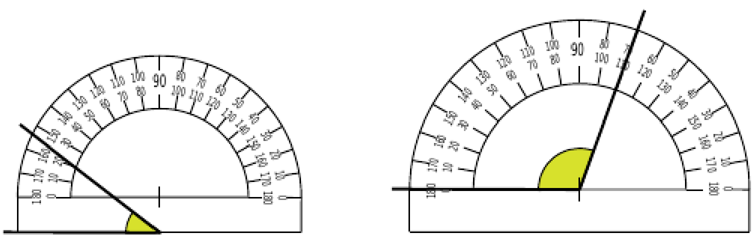
(b) Un carré KGJF, de périmètre 12 cm.

(c) Un rectangle a pour périmètre 12 cm et pour largeur 2 cm.

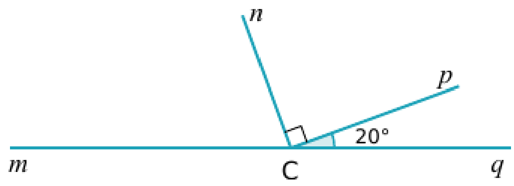
Exercice 16. Michel a 42 cubes identiques dont la longueur d'une arête est de 1 cm. Il construit un pavé en utilisant tous les cubes. Le périmètre de la face posée sur la table est de 18 cm. Quelle est la hauteur du pavé ?

Exercice 17. Les élèves ont trouvé, dans les trois cas représentés ci-dessous, les valeurs suivantes pour les angles : 20°, 70° et 115°. Expliquer leurs erreurs.





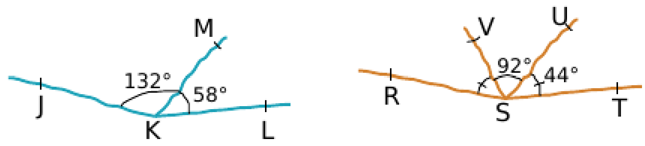
Exercice 18. Sachant que le point C appartient à la droite (mq), déterminer la mesure des angles $\widehat{nCq}$, $\widehat{mCp}$ et $\widehat{mCn}$.



Exercice 19. VRAI/FAUX. Les affirmations suivantes sont-elles correctes ? Justifier.

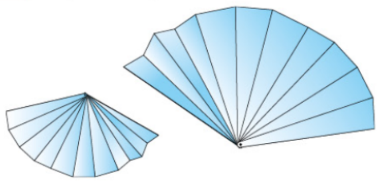
1. Les points J, K et L sont alignés.
2. Les points R, S, T sont alignés.

(Attention. Les figures ne sont pas correctes !)



Exercice 20. *D'après Transmaths 6ème*

1. Comparer les angles d'ouverture de ces éventails.

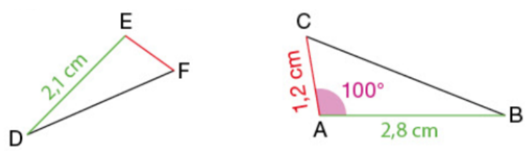


2. (a) À vue d'oeil, donner une mesure de cet angle marqué en vert.
   (b) Mesurer cet angle avec un rapporteur.
   (c) Construire un angle $\widehat{BAC}$ de même mesure avec le rapporteur.

Exercice 21. Le tableau ci-contre donne les estimations de la population mondiale par continent en 2020 (Source : World Population Prospects. Nations Unies. 2019). Construire un diagramme circulaire représentant la répartition de cette population.

Pays	Population totale en milliers
AFRIQUE	1 340 598
AMÉRIQUE LATINE ET CARAÏBES	653 962
AMÉRIQUE SEPTENTRIONALE	368 870
ASIE	4 641 055
EUROPE	747 636
OCÉANIE	42 678
MONDE	7 794 799

Exercice 22. Le triangle DEF est une réduction de rapport k du triangle ABC.



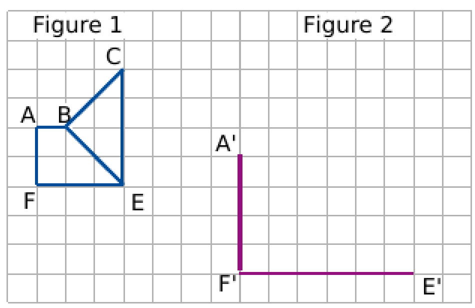
1. (a) Calculer la longueur du segment [EF].
   (b) Donner la mesure de l'angle $\widehat{DEF}$
2. Le triangle ABC est un agrandissement de rapport k' du triangle DEF. Donner la valeur exacte de k'.

Exercice 23. Dessiner deux rectangles qui ne peuvent pas être obtenus par agrandissement/réduction l'un de l'autre.

Que pensez-vous de la question similaire où l'on remplace *rectangles* par *carrés* ?

Exercice 24. Sur le quadrillage ci-contre, la figure 2 est le début de l'agrandissement de la figure 1.

Compléter la figure 2.

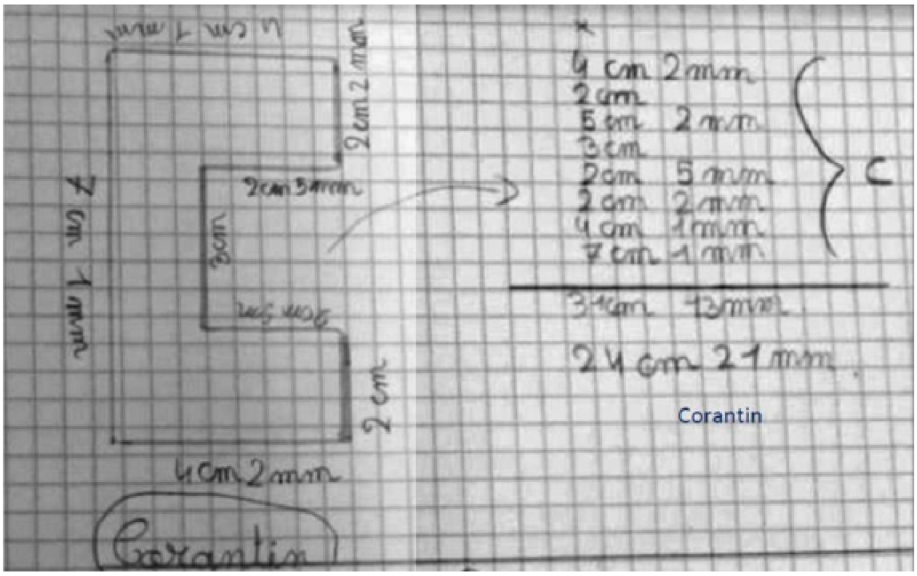


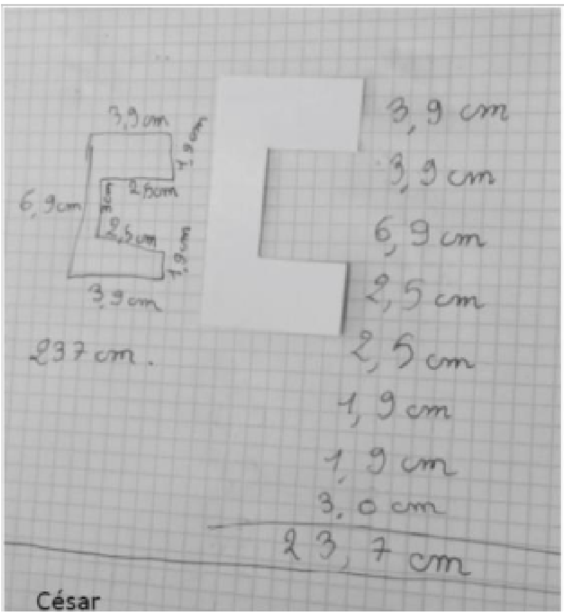
Exercice 25.

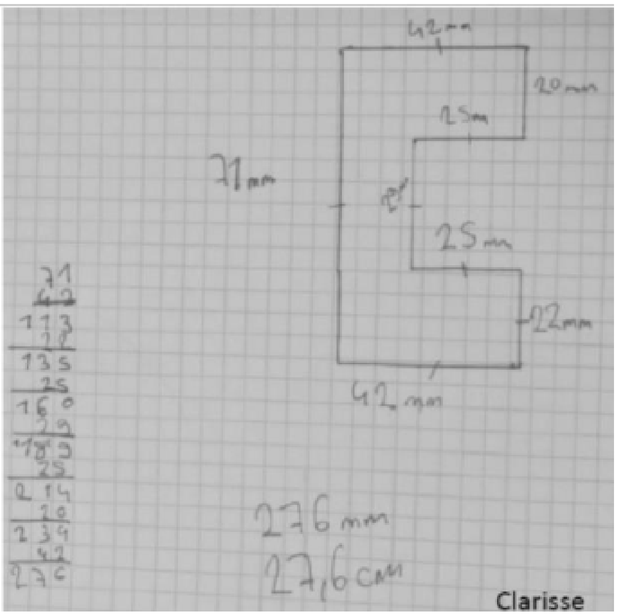
Un maître a distribué à ses élèves de CM1 des gabarits de lettres et leur a demandé de retrouver la longueur de leur contour. Un groupe de trois élèves est chargé de travailler sur le gabarit de la lettre C.

1. Donner quatre compétences nécessaires pour déterminer la longueur du contour.
2. Donner deux difficultés que les élèves pourraient rencontrer pour cette tâche.

Voici les productions de trois élèves (Corantin, César et Clarisse) :







3. Pour chacun de ces travaux :
   (a) Analyser la trace écrite (procédures suivies, compétences mises en œuvre, erreurs éventuelles).
   (b) Proposer une remédiation que le professeur pourrait mettre en place pour César et Corantin.

Exercice 26.
Les deux productions suivantes (élève n° 1 et élève n° 2) sont extraites des cahiers d'évaluation nationale de début de 6^e. Les compétences évaluées sont :

— Mesurer l'aire d'une surface grâce à l'utilisation d'un réseau quadrillé.

— Calculer le périmètre d'un polygone.

— Différencier aire et périmètre (en particulier savoir que deux surfaces peuvent avoir le même périmètre sans avoir nécessairement la même aire).

— Formuler et communiquer sa démarche par écrit.

— Argumenter à propos de la validité d'une solution.

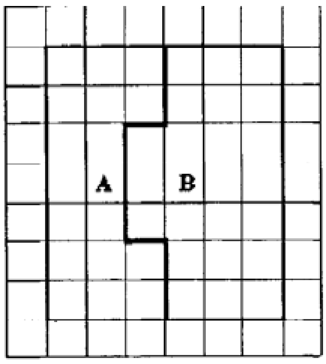
1. Pour la comparaison des aires et des périmètres des parcelles A et B de l'évaluation :

(a) donner une solution utilisant des mesures (valeurs numériques),

(b) donner une solution n'utilisant pas de mesures.

2. Comment peut-on expliquer que les élèves privilégient les solutions numériques ?
3. Comment interpréter les réponses de l'élève n° 1 ?
4. Comment interpréter les réponses de l'élève n° 2 ?

Élève n° 1



Un terrain a été partagé comme l'indique la figure ci-contre.

Entoure dans chaque cas la réponse qui convient :

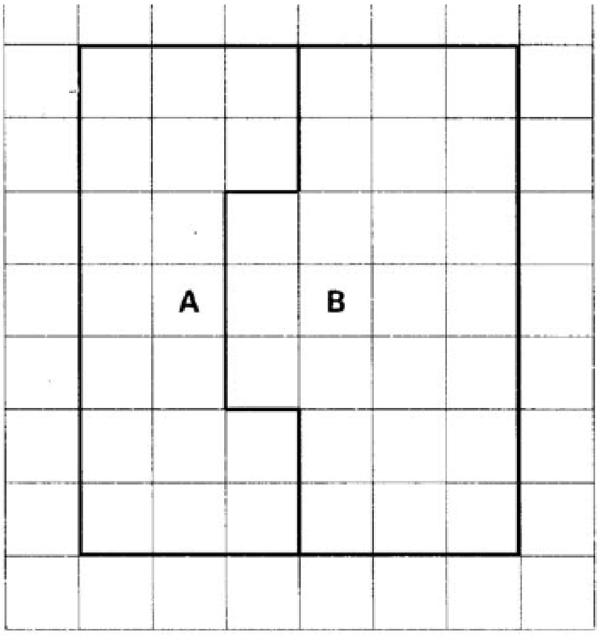
a. L'aire de la parcelle A est la plus grande. — Les deux parcelles ont la même aire. — L'aire de la parcelle B est la plus grande.

Explique ton choix : parce qu'il y a plus de carreaux dans la parcelle B.

b. Le périmètre de la parcelle A est le plus grand. — Les deux parcelles ont le même périmètre. — Le périmètre de la parcelle B est le plus grand.

Explique ton choix : Parce qu'il y a 17 carreaux dans la parcelle A

Élève n° 2



Un terrain a été partagé comme l'indique la figure ci-contre.

Entoure dans chaque cas la réponse qui convient :

a. L'aire de la parcelle A est la plus grande. Les deux parcelles ont la même aire. L'aire de la parcelle B est la plus grande.

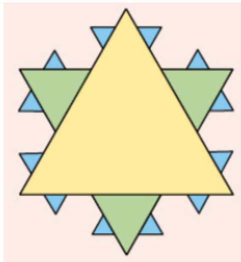
Explique ton choix : Si le terrain serait coupé en deux au milieu, elles auraient toutes les deux la même aire mais comme la parcelle B possède un morceau de plus que A elle est plus grande

b. Le périmètre de la parcelle A est le plus grand. Les deux parcelles ont le même périmètre. l'aire Le périmètre de la parcelle B est le plus grand.

Explique ton choix : Comme la parcelle B est plus grande que A : le périmètre de la parcelle B est aussi plus grand.

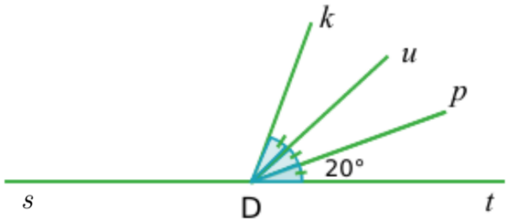
Exercices supplémentaires

Exercice 27. On considère le flocon ci-contre. Il a été dessiné ainsi. À l'étape 1, c'est un triangle équilatéral (jaune) de côté 1. Sur chacune de ses arêtes, on a enlevé à l'étape 2 le tiers central que l'on a remplacé par un triangle équilatéral (vert). Sur chaque segment de la figure obtenue (triangles jaune et verts), on a de nouveau retiré à l'étape 3 le tiers central que l'on a remplacé par un triangle équilatéral.

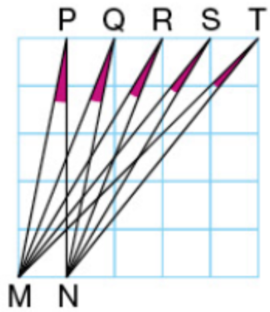


1. Déterminer le périmètre de la figure obtenue à chaque étape.
2. Imaginer la figure obtenue à l'étape suivante. Déterminer son périmètre.

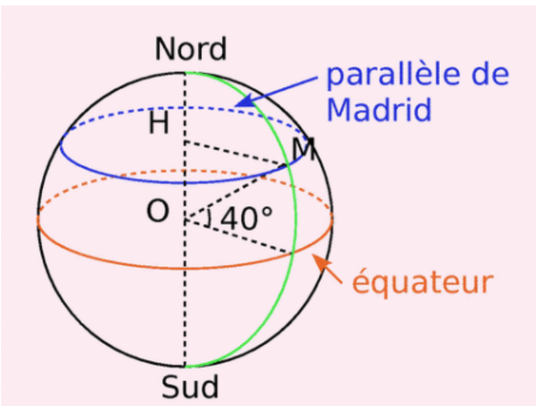
Exercice 28. Sachant que le point D appartient à la droite horizontale (st), déterminer la mesure de chacun des angles représentés sur cette figure.



Exercice 29. *D'après Kangourou des mathématiques*
Un carré est divisé en 25 petits carrés. Quelle est la somme des cinq angles $\widehat{MPN}$, $\widehat{MQN}$, $\widehat{MRN}$, $\widehat{MSN}$ et $\widehat{MTN}$?



Exercice 30. *D'après Sésamaths 3ème*
On assimile la Terre à une boule de centre O et de rayon 6 378 km. La ville de Madrid est située sur le parallèle de latitude 40° Nord. H est le centre du cercle correspondant à ce parallèle.



1. Calculer la longueur d'un méridien terrestre (ligne imaginaire qui rejoint les deux pôles).
2. La longitude de Madrid est 3° Ouest comme Tombouctou qui est située au Mali à une latitude de 16,8° Nord. Placer approximativement un point T correspondant à Tombouctou sur la représentation ci-contre. Calculer la distance séparant ces deux villes sur leur méridien.
3. Sur le continent américain, Sydney au Canada et Chivilcoy en Argentine sont situées sur le méridien 60° Ouest à une latitude de 46° N et 35° S respectivement. Placer approximativement ces villes sur la représentation ci-contre et calculer la distance séparant ces deux villes sur ce méridien.

Exercice 31.

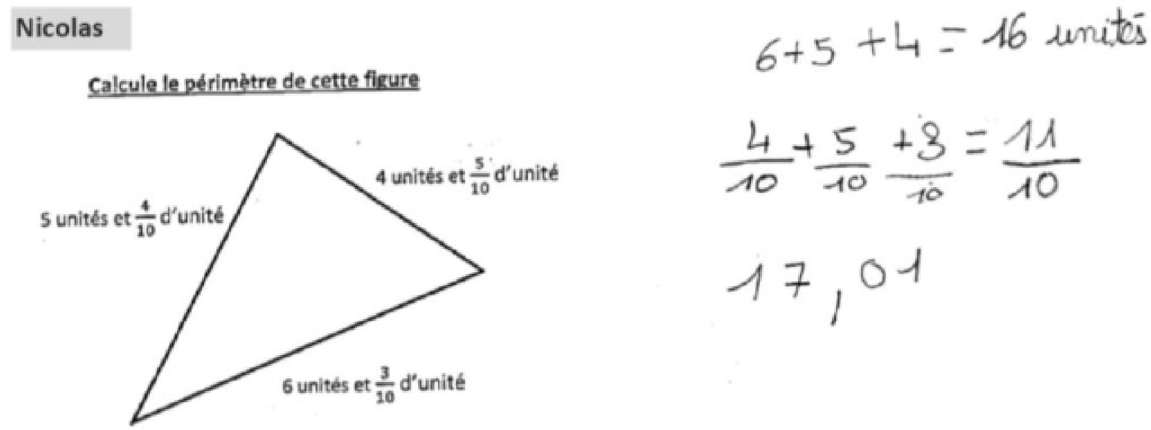
1. À partir des trois productions d'élèves de CM2 présentées ci-dessous, expliquer pour chacune d'elles :

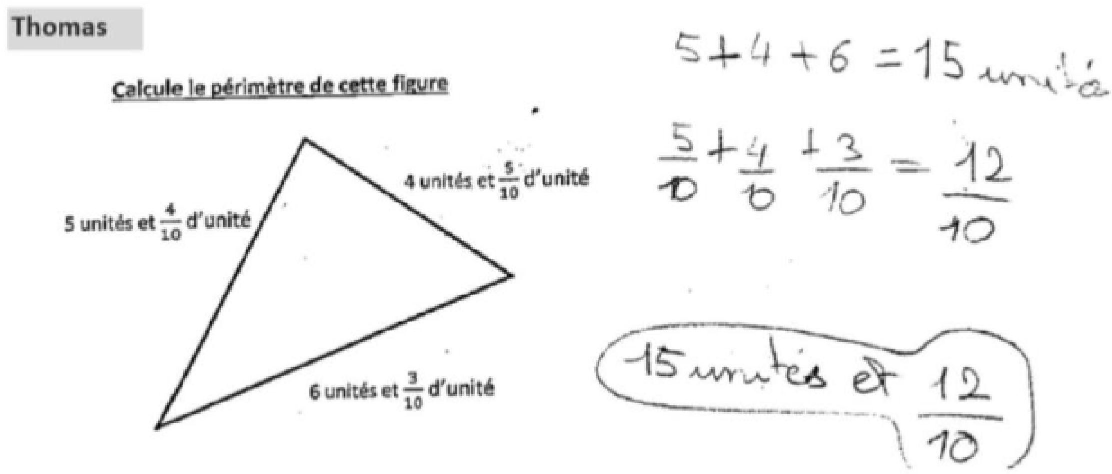
(a) la démarche utilisée,

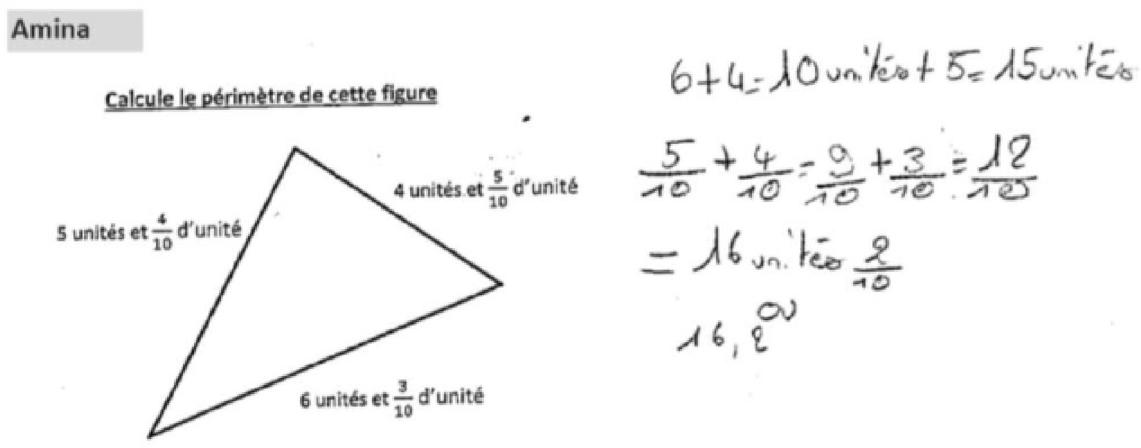
(b) les compétences qui semblent acquises,

(c) les éventuelles erreurs.

2. Que peut proposer l'enseignant pour amener Thomas à rédiger sa réponse sous forme d'écriture à virgule ?







Thème 5 | Fractions, proportionnalité et pourcentages

Memo

• **Fractions :**

Rappel : soient a et b deux nombres avec $b \neq 0$, l'écriture fractionnaire $\dfrac{a}{b}$ représente le **quotient** (résultat de la division) de a par b, c'est à dire le nombre de fois où la valeur b se trouve dans a.

Quand on manipule des grandeurs, on parle souvent du rapport des mesures ou de la proportion des mesures (quand il s'agit de deux mesures dans une même unité d'une même grandeur).

Exemples :
La proportion d'un temps de 23 minutes sur une heure, soit 60 min, est $\frac{23}{60}$ *d'heure.*
La proportion d'une réduction de 12€ sur un prix de 50€ est $\frac{12}{50}$ *du prix.*
La proportion d'une distance de 4,5 km sur un trajet de 9 km est $\frac{4,5}{9}$ *du trajet soit la moitié du trajet.*
Le rapport entre une distance parcourue de 120 km sur un temps de parcours de 3h est $\frac{120}{3} = 40$ *km/h. C'est une vitesse moyenne.*

Propriété. Un quotient de deux nombres ne change pas quand on multiplie ou divise le numérateur **et** le dénominateur par un **même nombre non nul**. On parle de fractions équivalentes.
Soient a, $b \neq 0$ et $c \neq 0$ trois nombres, $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a \times c}{b \times c} = \dfrac{a \div c}{b \div c}$

Exemples :

$$\frac{12}{50} = \frac{12 \times 2}{50 \times 2} = \frac{25}{100} \qquad \frac{12}{50} = \frac{12 \div 2}{50 \div 2} = \frac{6}{25} \qquad \frac{4,5}{9} = \frac{4,5 \div 4,5}{9 \div 4,5} = \frac{1}{2}$$

Propriété : égalité des produits en croix. Soient a, $b \neq 0$, c et $d \neq 0$ quatre nombres. Les deux fractions $\dfrac{a}{b}$ et $\dfrac{c}{d}$ sont équivalentes si et seulement si les produits en croix $a \times d$ et $b \times c$ sont égaux : $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ ssi $a \times d = b \times c$.

Exemples :

$$\frac{2,7}{300} = \frac{9}{1000} \ \textit{car}\ 2,7 \times 1000 = 2700 \ \textit{et}\ 300 \times 9 = 2700$$

Conséquence : calcul de quatrième proportionnelle. Quand dans une égalité entre deux fractions, on connait trois des valeurs en jeu, on peut trouver la quatrième.

Si $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ alors $a = \dfrac{b \times c}{d}$, $b = \dfrac{a \times d}{c}$, $c = \dfrac{a \times d}{b}$ et $d = \dfrac{b \times c}{a}$

⚠ Attention, cette propriété est du niveau 4ème, elle n'est pas enseignée en cycle 3 !

Exemples : On cherche le nombre x tel que $\frac{356}{156} = \frac{x}{33}$. *D'après l'égalité des produits en croix :* $356 \times 33 = x \times 156$, *c'est à dire* $x = \frac{356 \times 33}{156} = 77$ *on a donc* $\frac{356}{156} = \frac{77}{33}$.

Dans toute la suite, on considère deux grandeurs G_1 et G_2 proportionnelles et leurs mesures M_1, M_1', M_1'' et M_2, M_2', M_2'' deux-à-deux correspondantes.

• Situation de proportionnalité :

On dit que 2 grandeurs sont proportionnelles lorsque le rapport de leurs mesures ne change pas. Les mesures restent dans les mêmes proportions. *Souvent cette situation est implicite, c'est à nous de la préciser.*

On appelle **coefficients de proportionnalité** les deux rapports entre deux mesures correspondantes de ces grandeurs : $k = \frac{M_1}{M_2}$ et $k' = \frac{M_2}{M_1}$.
Il y en a deux possibles, ils correspondent chacun à la valeur de la mesure d'une grandeur pour une unité de l'autre grandeur.
Ils sont inverses l'un de l'autre : $k' = \frac{1}{k}$ soit $M_1 = kM_2$ et $M_2 = k'M_1 = \frac{1}{k}M_1$.

Exemples :

Le prix des tomates et leur masse : un coefficient de proportionnalité représente le prix en euros pour un kilogramme de tomates, l'autre est la masse de tomates en kilogramme pour un euro (moins utilisé mais il existe).

La consommation d'essence et la distance parcourue : le volume consommé en litres pour 1 km parcouru et la distance parcourue en km avec un litre d'essence.

La distance parcourue et la durée du trajet : la vitesse représente la distance en km parcourue en une heure et l'autre coefficient représente le temps en heure pour parcourir un km (utilisé par les coureurs, cyclistes, etc : temps en min au km).

D'autres exemples sont ceux des **conversions d'unités** *: litres et m³ : 1000 L = 1 m³, mètres et centimètres : 1 m = 100 cm, minutes et heures : 60 min = 1 h, changements d'échelle, etc.*

• Retour à l'unité :

Le principe du retour à l'unité est le fait de déterminer la mesure d'une des deux grandeurs pour une unité de l'autre, sans parler de coefficient de proportionnalité. Il s'agit de donner du sens au calcul de coefficient.

Exemple :

5 crayons identiques coûtent 3 €, combien coûtent 7 de ces crayons ?

On calcule le prix d'un crayon pour pouvoir répondre : $3 \div 5 = \frac{3}{5} = 0{,}60$ € *puis on multiplie par 7 ce prix :* $0{,}60 \times 7 = 4{,}20$ €.

Faire le calcul sans l'étape du retour à l'unité mais directement : $7 \times 3 \div 5 = 7 \times \frac{3}{5} = \frac{7 \times 3}{5}$ *s'appelle* ***la règle de trois****, elle a moins de sens pour les élèves.*

Application aux calculs de durée : Il y a 60 minutes dans 1 heure, donc il y a 1 minute dans $\frac{1}{60}$ *d'heure.*

⚠ **Un peu de pédagogie** : lorsqu'on introduira des notions de proportionnalité, on insistera sur les grandeurs en jeu en précisant qu'elles sont proportionnelles et on choisira un vocabulaire explicite. Par exemple, on dira que **le prix est proportionnel à la masse** et on parlera du prix **pour un** kilogramme, plutôt que du "prix au kilo".

• Propriétés :

Quotients équivalents : Les rapports de deux mesures correspondantes des grandeurs sont tous égaux. C'est même une condition nécessaire et suffisante pour avoir une situation de proportionnalité :

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{M_1'}{M_2'} = \frac{M_1''}{M_2''} \text{ si et seulement si G1 et G2 sont proportionnelles.}$$

Linéarité multiplicative : On peut multiplier ou diviser deux mesures correspondantes des grandeurs G_1 et G_2, par un même coefficient non nul afin d'obtenir une nouvelle paire de mesures correspondantes :

$$\text{Soit } a > 0 \text{ si } M_1' = a \times M_1 \text{ alors } M_2' = a \times M_2.$$

Exemple : Dans une situation de proportionnalité, si on connaît le prix de 6 kg de tomates, pour calculer le prix de 0,6 kg, on peut diviser le prix de 6 kg par 10 et pour calculer le prix de 12 kg de tomates, on peut multiplier le prix de 6 kg par 2.

⚠ Dans ce cas, les coefficients sont différents des deux coefficients de proportionnalité. Le prix d'un kg peut être de 3 €, les nombres 10 ou 2 n'ont rien à voir avec ce 3.

Linéarité additive : Ajouter ou soustraire deux paires de mesures correspondantes des grandeurs G_1 et G_2 permet d'obtenir une nouvelle paire de mesures correspondantes.

$$\text{Si } M_1 + M_1' = M_1'' \text{ alors } M_2 + M_2' = M_2'' \text{ ; si } M_1 - M_1' = M_1'' \text{ alors } M_2 - M_2' = M_2''.$$

Exemple : pour calculer le prix de 18 kg de tomates, j'ajoute les prix de 6 kg et de 12 kg.

• Tableau de proportionnalité :

Un tableau de proportionnalité est un outil de représentation des valeurs de grandeurs proportionnelles. Il comporte 2 lignes (ou plus) et plusieurs colonnes.

Poids des tomates en kg	1	2	6	0,6	8
Prix des tomates en €	1,5	3	9	0,9	12

$\times 1{,}5$ $\quad$ $\times \frac{2}{3}$

Chaque ligne représente les mesures d'une grandeur, indiquée en légende dans la première colonne. Chaque colonne indique des mesures correspondantes pour les grandeurs.

Un tableau de proportionnalité est un tableau **à règle multiplicative** : c'est la multiplication par un coefficient de proportionnalité qui permet de passer d'une ligne à l'autre. **On doit toujours indiquer cette règle**, dans un sens (pour descendre), et/ou dans l'autre (pour monter).

On remarque que les coefficients sont bien inverses l'un de l'autre : $\frac{1}{1{,}5} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$.

• Pourcentages :

C'est une écriture qui indique qu'on est en situation de proportionnalité. Le symbole % remplace le trait de fraction $\frac{}{100}$ dans l'écriture. Ce terme indique que les 2 grandeurs nommées sont proportionnelles, et que leur coefficient de proportionnalité est égal au pourcentage indiqué.

Exemple : 85% *des personnes sont droitières signifie que le nombre de droitiers est proportionnel au nombre de personnes, et que le coefficient de proportionnalité vaut* 0,85 *:*

$$85\% = \textit{85 pour cent} = \frac{85}{100} = 0{,}85.$$

• Manipulation de pourcentages :

Fractions et pourcentages en tant qu'opérateurs : la règle opératoire liée au pourcentage est **la multiplication**. Cette opération est la traduction du mot "de" séparant la fraction ou le pourcentage de la quantité considérée.

Les expressions "Un demi **de**", "Trois quarts **de**", "30% **de**" (etc) signifient qu'on multiplie la quantité respectivement par $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, et $\frac{30}{100}$.

Réduction, augmentation de... : dans ce cas, la multiplication s'effectue sur la partie qui s'ajoute ou se retranche à la quantité de référence. Pour résumer :

une augmentation de t% revient à multiplier par $(1 + \frac{t}{100})$,
une diminution de t% revient à multiplier par $(1 - \frac{t}{100})$.

Exemples :

Une "augmentation de 30 %" signifie que l'augmentation est de 30 % du prix initial I *et donc que le prix final F est égal au prix initial I auquel on ajoute ces 30 % de I :*

$$F = I + \frac{30}{100} \times I = \left(1 + \frac{30}{100}\right) \times I = 1{,}3 \times I,$$

d'où la multiplication par $(1 + \frac{30}{100})$ du prix initial pour obtenir le prix final.

De même, "diminuer de 46 %" une quantité revient à la multiplier par $1 - \frac{46}{100} = 0{,}54$.

Déterminer un pourcentage : Il s'agit de calculer le coefficient de proportionnalité entre les deux mesures de la même grandeur.

Exemple : Sur 60 étudiants, 24 sont bruns. Le pourcentage d'étudiants bruns dans ce groupe est de : $\frac{24}{60} = 0{,}4 = \frac{40}{100} = 40\%$

• Pourcentages et approximations :

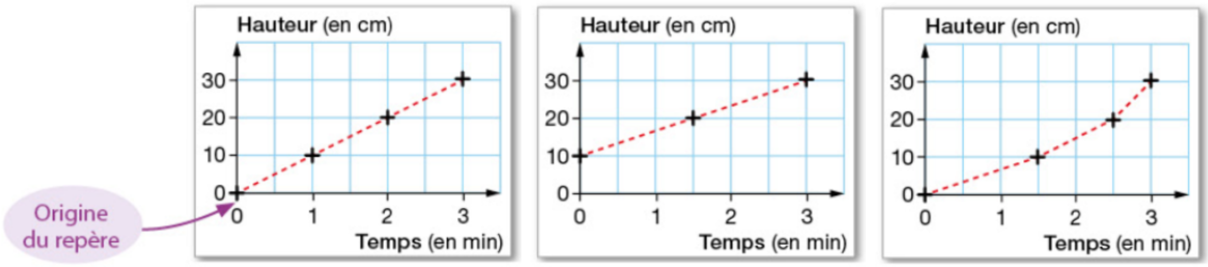
Dans la vie quotidienne, les pourcentages sont souvent des résultats de mesure. Comme tous les résultats de mesure ou presque, ils ne représentent donc qu'une valeur approchée de la mesure théorique. Il conviendra de choisir convenablement dans ce cas la précision du résultat, qui dépend du contexte de l'énoncé.

Exemple : dans une classe de 27 élèves, s'il y a 14 filles, je peux dire qu'il y a 51,9% de filles à 0,1% près, mais il ne faut pas oublier qu'un élève représente $\frac{1}{27}$ = 3,7% (toujours à 0,1% près) : la bonne précision est de l'ordre de l'élève, et on peut donc arrondir $\frac{14}{27}$ à 50% (arrondi à l'élève près !).

• Caractérisation graphique d'une situation de proportionnalité :

Propriété : Toute situation de proportionnalité se représente graphiquement par des points alignés avec l'origine du repère. Réciproquement, tout graphique dont les points sont alignés avec l'origine du repère représente une situation de proportionnalité.

Exemples : seul le premier graphique représente une situation de proportionnalité :



TD

La notion de proportionnalité est une notion transversale en mathématiques, on la retrouve dès le cycle 1 dans des petits exercices multiplicatifs (Une voiture a 4 roues. J'ai deux voitures dans mon coffre à jouets. Combien de roues se trouvent dans mon coffre ?) jusqu'au cycle 4 dans des exercices de calcul de pourcentage et de grandeurs quotients.

Compétences :
— Savoir déterminer des fractions équivalentes.
— Reconnaître une situation de proportionnalité.
— Utiliser et distinguer les procédures de retour à l'unité et de calcul de coefficient de proportionnalité.
— Connaître et utiliser les propriétés de linéarité additive et multiplicative.
— Savoir convertir des mesures de grandeurs quotients.
— Manipuler les proportions et les pourcentages.

Exercice 1. *(Delta 6ème 2016)* Vrai ou Faux ? Justifier.

$$\frac{50}{60}=\frac{52}{62} \qquad \frac{3,4}{4}=\frac{34}{40} \qquad \frac{3,4}{4}=\frac{17}{20} \qquad \frac{35}{25}=\frac{3}{2} \qquad \frac{18}{15}=\frac{18-5}{15-5} \qquad \frac{5}{4}=\frac{25}{16}$$

Exercice 2. *(Delta 6ème 2016)* Recopier et compléter chacune des égalités suivantes :

$$\frac{3}{4}=\frac{3\times 4}{...}=\frac{...}{...} \qquad \frac{36}{42}=\frac{6\times ...}{6\times 7}=\frac{...}{...} \qquad \frac{7}{4}=\frac{...}{16} \qquad \frac{25}{10}=\frac{5}{...} \qquad \frac{28}{63}=\frac{...}{9} \qquad \frac{...}{18}=\frac{5}{3}$$

Exercice 3. *(Transmaths 4ème)* Exprimer chaque nombre sous la forme d'un pourcentage.
a. $\frac{7}{10}$ b. $\frac{39}{50}$ c. $\frac{45}{500}$ d. 0,6 e. $\frac{3}{4}$ f. 0,02

Exercice 4. *(Iparcours 4ème)*
1. À partir des égalités données et en utilisant seulement les quatre nombres qui apparaissent, écrire toutes les égalités d'écritures fractionnaires possibles.
a. $7\times 8=4\times 14$ b. $2,1\times 12=9\times 2,8$
2. Trouver la valeur de x dans les cas suivants.

a. $\frac{12}{56}=\frac{x}{84}$ b. $\frac{x}{23,1}=\frac{0,4}{0,5}$ c. $\frac{19}{x}=\frac{4}{11}$ d. $\frac{25}{0,2}=\frac{333}{x}$

Exercice 5. *(Transmath 6ème 2013)* Dans chaque cas, répondre à la question lorsque c'est possible en précisant quelles grandeurs sont proportionnelles entre elles.
1. Au marché, 1 kg d'oranges coûte 2,60 €. Quel est le prix de 4 kg de ces oranges ?
2. À 5 h il fait 24°C. Quelle température fera-t-il à 15h ?
3. 4 bouteilles identiques contiennent 6 litres d'eau en tout. Combien de litres contiennent 20 de ces bouteilles ?

Exercice 6. *(Transmath 6ème 2013)* Lors d'une marée noire, on a constaté que 5L de pétrole brut recueillis pèsent 4 kg. On souhaite savoir quelle est la masse de 218 L de pétrole brut.
Utiliser le passage par l'unité pour répondre à cette question.

Exercice 7. *(Transmath 6ème 2013)* La superficie de terrain ensemencé est proportionnelle à la masse de gazon semé. Avec 5 kg de gazon, on ensemence 280 m^2 de terrain. On cherche quelle superficie de terrain ensemencera-t-on avec 7,5 kg de gazon, répondre à cette recherche à l'aide de la méthode indiquée :

1. Utiliser un coefficient de proportionnalité.
2. Utiliser la linéarité multiplicative.
3. Utiliser la linéarité multiplicative et additive.

Exercice 8. *(Iparcours 4ème)* Steeve a téléchargé un fichier de 275 Mo en 44 secondes. La durée de téléchargement est proportionnelle à la taille du fichier téléchargé.

Taille du fichier en Mo	275	x	740	z
Durée du téléchargement en s	44	208	y	10

1. Déterminer les valeurs de x, y, et z.
2. En dix minutes, Steeve peut-il télécharger un fichier de 4 Go ?
3. Donner en Mo/s le débit moyen de la connexion Internet de Steeve.

Exercice 9. *(Iparcours 4ème)*

1. Quelle est la durée en heures et minutes d'un trajet de 540 km parcouru à une vitesse moyenne de 81 km/h ?
2. La vitesse orbitale de la Terre autour du Soleil est de 29,783 km/s environ. Quelle distance parcourt la Terre autour du Soleil en un an (soit environ 365,25996 jours) ?
3. Des réflecteurs, posés sur le sol lunaire en 1969, servent à mesure le temps que met la lumière pour effectuer un aller-retour de la Terre à la Lune. Des mesures récentes montrent que la lumière met en moyenne 2,564 s pour faire ce trajet. La distance Terre-Lune est d'environ 384 402 km. Calculer une valeur approchée de la vitesse de la lumière.
4. La Kenyane Brigid Kosgei a battu le record du monde du marathon, le 13 octobre 2019 à Chicago, en 2 h 14 min 04 sec. Quelle est son tempo moyen en min/km arrondi au centième près ? Et sa vitesse moyenne en km/h arrondie à l'unité ?

Exercice 10. *(Iparcours 5ème)* Simona veut réaliser le plan de sa chambre à l'échelle 1/50.

1. Les dimensions de sa chambre rectangulaire sont 4,50 m et 3,8 m. Dessiner le plan de sa chambre.
2. La largeur d'une porte est de 1,8 cm sur son plan. Quelle est sa largeur réelle ?

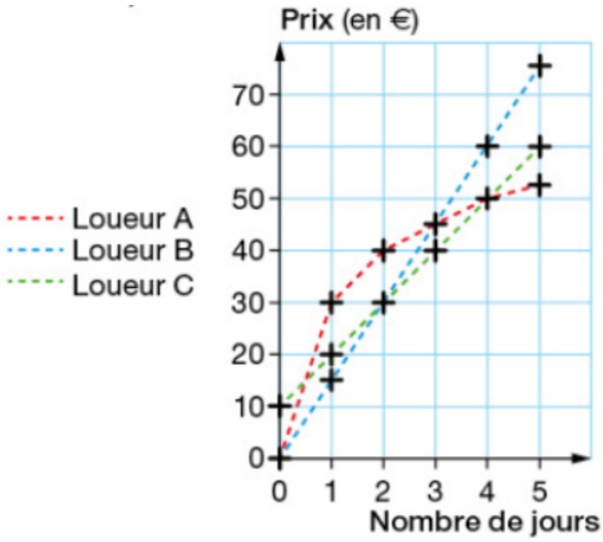
Exercice 11. *(Transmath 6ème 2016)*

En vacances vers Archacon, Adam (A) doit rejoindre en marchant sur la plage son ami Bastien (B) qui l'attend à 19 h pile. Adam pense parcourir chaque heure 5 km. À quelle heure doit-il partir au plus tard ?

Exercice 12. *(Transmaths 4ème)*

Le graphique ci-contre représente le prix de location d'un vélo en fonction du nombre de jours chez trois loueurs (On a rejoint les points par des pointillés pour visualiser les prix correspondants à chaque loueur).

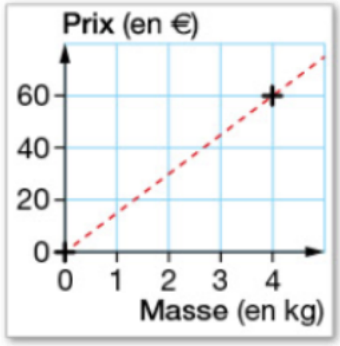
1. Dire, pour chaque loueur, si le prix est proportionnel au nombre de jours de location.
2. Chez quel loueur est-il plus intéressant de louer un vélo pour 5 jours ? 3 jours ? 1 jour ?



Exercice 13. *(Transmaths 4ème)*

Le prix payé est proportionnel à la masse de café acheté. Le fournisseur a représenté cette situation par le graphique ci-contre.

1. Estimer à l'aide du graphique le prix d'achat de 3 kg de café.
2. Déterminer ce prix par le calcul.



Exercice 14. *(d'après concours 2014).* Un particulier a prévu de recevoir 17 personnes et veut faire une ganache au chocolat. Voici la liste des ingrédients pour quatre personnes : "25cL de crème fraiche épaisse, 1 cuillère à soupe de sucre, 50g de beurre et 200g de chocolat".

1. Quelle masse de chocolat doit-il prévoir ?
2. Il a relevé les informations suivantes chez un commerçant :

Tablette Chocolat	Dégustation	Saveur	Patissier	Intense	A cuisiner
Prix d'une tablette (en €)	2,10	2,80	2,62	1,36	2,81
Quantité par tablette (en g)	150	200	200	100	200

Quel type de tablettes de chocolat doit-il acheter s'il veut dépenser le moins possible en achetant un seul type de tablette ? Justifier.

3. Chez le commerçant, les tablettes "chocolat dégustation" sont en promotion avec une réduction du prix de 5%. Choisir ces tablettes devient-il plus avantageux ? Justifier.

Exercice 15. *(Transmath 6ème 2013)* Sur son ordinateur portable, Fred a un disque dur de 500 Go (gigaoctets) de mémoire sur lequel il reste 70 % de place disponible. Combien de gigaoctets de mémoire sont déjà occupés ?

Exercice 16. *(Transmath 4ème)* Un sondage réalisé auprès de 500 jeunes indique que 62% des jeunes interrogés disposent d'un smartphone. Parmi eux, 30% surfent sur leur portable au moins une fois par jour.

1. Combien de jeunes surfent sur leur portable au moins une fois par jour ?
2. Quel pourcentage ces jeunes représentent-ils par rapport à l'ensemble des jeunes interrogés ?

Exercice 17. Le bronze est constitué d'un mélange de cuivre et d'étain, dans un rapport de 3 g de cuivre pour 8g d'étain.

1. Quelle est la proportion de cuivre dans le bronze ? Donner le résultat sous la forme d'un pourcentage. Cette valeur est-elle exacte ? Sinon, donner sa précision.
2. Combien y'a-t-il de cuivre dans une statuette en bronze de masse 2,75 kg ? Cette valeur est-elle exacte ?

Exercice 18. *(D'après CRPE Gpe5 du 10 avril 2018)*
Le problème suivant est proposé à une classe de CM2.

> ***Une boîte de sucres contient des morceaux de sucre tous identiques.***
>
> ***30 morceaux de sucre pèsent 240 grammes.***
> ***50 morceaux de sucre pèsent 400 grammes.***
> ***Dans chaque cas, complète la réponse.***
>
> ***Question 1 : 60 morceaux de sucre pèsent...***
>
> ***Question 2 : 80 morceaux de sucre pèsent...***
>
> ***Question 3 : 20 morceaux de sucre pèsent...***

1. Quelle est la principale notion du programme de cycle 3 abordée par ce problème ?
2. Voici huit réponses d'élèves à ce problème, codées de A à H.

	Réponse de l'élève	**Écrits de recherche**
A	60 morceaux de sucre pèsent ...*480 grammes*	240 × 2 = 480
B	60 morceaux de sucre pèsent ...*480 grammes*	400 + 80 = 480
C	60 morceaux de sucre pèsent ...*24 000 grammes*	400 × 60 = 24 000
D	20 morceaux de sucre pèsent ...*160 grammes*	400 – 240 = 160
E	20 morceaux de sucre pèsent ...*160 grammes*	240 : 30 = 8 20 × 8 = 160
F	20 morceaux de sucre pèsent ...*160 grammes*	60 : 3 = 20 480 : 3 = 160
G	20 morceaux de sucre pèsent ...*230 grammes*	240 – 10 = 230
H	80 morceaux de sucre pèsent ...*640 grammes*	240 + 400 = 640

(a) Deux des réponses sont erronées. Les repérer et les analyser.

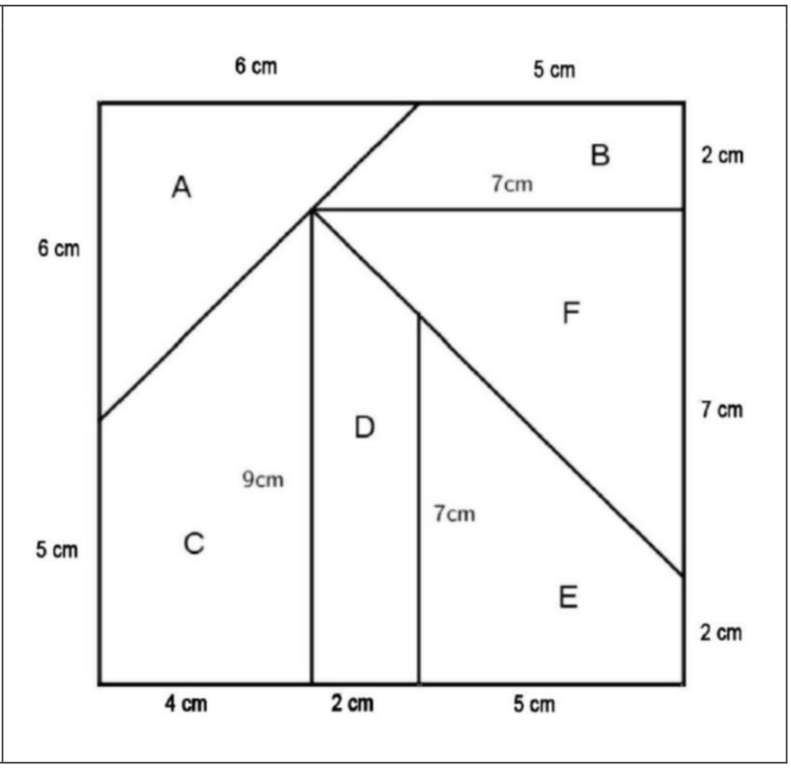
(b) Analyser et classer les procédures des autres réponses.

3. L'enseignant souhaite amener ses élèves à recourir à la procédure de retour à l'unité. Le problème suivant figure dans leur manuel :
"Pour la fête de fin d'année de l'école de rugby, on vend des paquets de chocolat. Karim achète 5 paquets et paie 8 €. Dellia veut acheter 15 paquets, combien va-t-elle payer ?"
Proposer une modification des données de cet énoncé pour lui permettre d'atteindre cet objectif.

Exercice 19. *(D'après CRPE Gpe2 du 10 avril 2018)*
Un enseignant propose la situation suivante en cycle 3 :

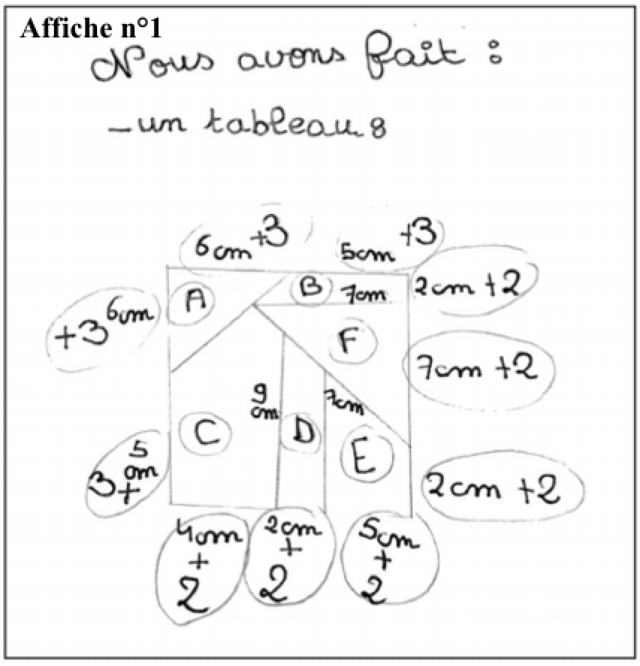
Consignes données oralement :

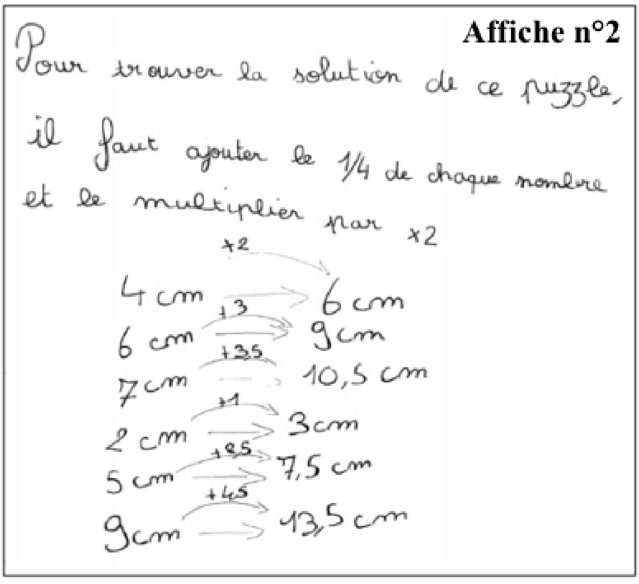
**« Voici un puzzle carré.
Vous allez devoir refaire le même puzzle mais en plus grand. Il faudra le reconstituer exactement avec les pièces agrandies.
Le segment de 4 cm devra mesurer 6 cm sur votre puzzle agrandi.
Le compte-rendu de vos recherches sera présenté sous la forme d'une affiche ».**

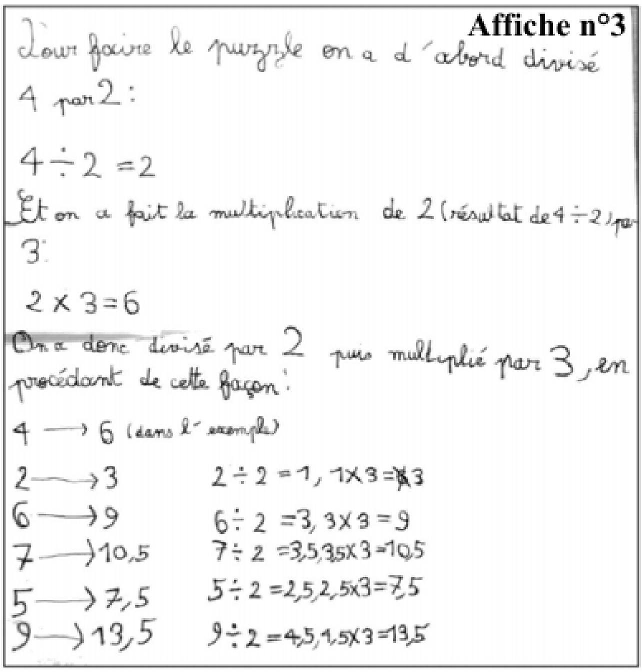


Modalités de mise en œuvre : le professeur demande aux élèves de travailler par groupes de quatre, de s'accorder sur la procédure à adopter pour agrandir les éléments du puzzle, de se répartir la construction des pièces en faisant leurs calculs individuellement puis d'assembler les morceaux pour reconstituer le puzzle agrandi.

1. Quel champ mathématique cette situation permet-elle de travailler ?
2. Analyser les différentes stratégies mises en œuvre en pointant les réussites et les erreurs des groupes ayant produit les affiches 1, 2 et 3.
3. Dans la mesure du possible, indiquer les procédures utilisées pour déterminer chacune des valeurs trouvées par le groupe ayant produit l'affiche 4.






Affiche n°3

Pour faire le puzzle on a d'abord divisé 4 par 2 :

$4 \div 2 = 2$

Et on a fait la multiplication de 2 (résultat de $4 \div 2$) par 3 :

$2 \times 3 = 6$

On a donc divisé par 2 puis multiplié par 3, en procédant de cette façon :

$4 \longrightarrow 6$ (dans l'exemple)

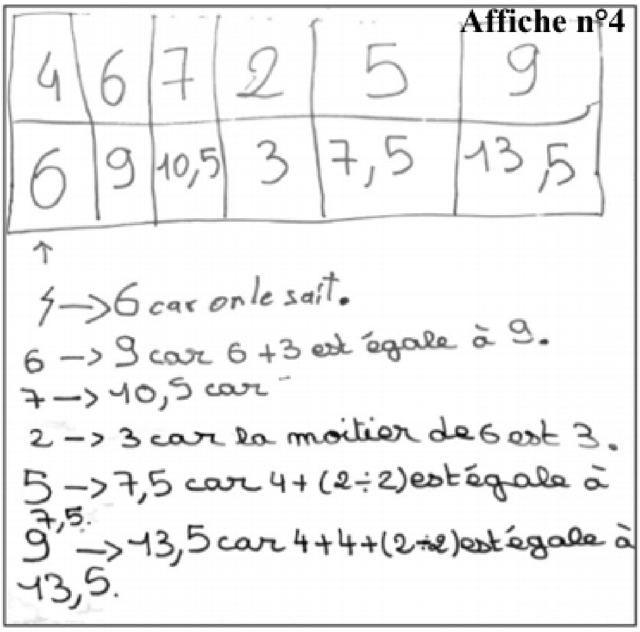
$2 \longrightarrow 3$ $2 \div 2 = 1$, $1 \times 3 = 3$

$6 \longrightarrow 9$ $6 \div 2 = 3$, $3 \times 3 = 9$

$7 \longrightarrow 10{,}5$ $7 \div 2 = 3{,}5$, $3{,}5 \times 3 = 10{,}5$

$5 \longrightarrow 7{,}5$ $5 \div 2 = 2{,}5$, $2{,}5 \times 3 = 7{,}5$

$9 \longrightarrow 13{,}5$ $9 \div 2 = 4{,}5$, $4{,}5 \times 3 = 13{,}5$


Affiche n°4

4	6	7	2	5	9
6	9	10,5	3	7,5	13,5

4 → 6 car on le sait.

6 → 9 car 6 + 3 est égale à 9.

7 → 10,5 car

2 → 3 car la moitier de 6 est 3.

5 → 7,5 car 4 + (2 ÷ 2) est égale à 7,5.

9 → 13,5 car 4 + 4 + (2 ÷ 2) est égale à 13,5.

Exercices supplémentaires

Exercice 20. *(Iparcours 4ème)* Le débit moyen D d'un fluide dépend de la vitesse moyenne v du fluide et de l'aire S de la section d'écoulement. Ce débit est donné par la formule suivante : $D = S \times v$, où D est exprimé en m^3/s, S en m^2 et v en m/s.
Durant le remplissage d'une écluse, la vitesse moyenne d'écoulement de l'eau à travers la vantelle est $v = 2{,}8$ m/s. La vantelle a la forme d'un disque de rayon R = 30 cm.

1. Calculer l'aire S de la vantelle.
2. Déterminer le débit moyen D de cette vantelle durant le remplissage.
3. Pour le remplissage d'une écluse de capacité 756 m^3, doit-on attendre plus de 15 min ?

Exercice 21. V/F :

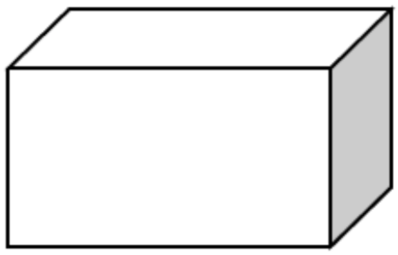
1. Une population de bactéries augmente de 20% par jour. Dans 5 jours, elle aura doublé.
2. Un tempo de 5 min au km correspond à une vitesse de 12 km/h.
3. Un magasin A propose des articles 10% moins chers que dans le magasin B. Les soldes arrivent, et le magasin A affiche une remise de 20% sur ses articles tandis que le magasin B propose 30% de démarque. J'économiserais en allant faire mes achats dans le magasin B.
4. Pour 2 achetés, le troisième est offert : il y a 30% de remise sur ce lot.
5. Ma police d'assurance a augmenté de 5 % au 1er janvier 2011 mais elle a baissé de 5 % au 1er janvier 2012. Ma cotisation en 2012 est identique à celle de 2010.

Exercice 22. *(d'après concours 2012).* Dans Le Monde du 27 mars 2010, on pouvait lire : "Dans l'ensemble des aéroports du monde, en 2009, environ 25 millions de bagages ont été perdus, provisoirement ou définitivement. (...) L'étude note cependant une amélioration puisqu'en 2008, ce sont 32,8 millions de bagages qui avaient été égarés, soit 23,8 % de plus qu'en 2009." Vérifier l'exactitude de cette affirmation.

Exercice 23. *(d'après concours 2014).* "On reconnait une situation de proportionnalité lorsque le rapport entre les nombres ne change pas" (extrait de *Outils pour les maths, CM1 Magnard 2011*) :

1. Expliquer, commenter et critiquer la phrase du manuel.
2. Donner un exemple de tableau de proportionnalité à compléter qui met en jeu toutes les méthodes (coefficient de proportionnalité, passage par l'unité, linéarité additive et multiplicative).
3. Donner un exemple de tableau non proportionnel qui respecte cependant la propriété de linéarité additive. Commenter.

Exercice 24. *(D'après CRPE Gpe1 du 19 avril 2016)*
L'exercice suivant est donné à des élèves de CM2.
Proposer trois résolutions différentes pour la question B qui peuvent être attendues d'un élève de CM2. Expliciter les propriétés mathématiques sous-jacentes.

> **L'aquarium de Pierre a la forme d'un pavé droit.**
>
> **Quand il verse 4 litres d'eau dans l'aquarium, le niveau monte de 2 cm.**
>
> 
>
> **A – De combien monte le niveau d'eau quand il verse 8 litres ?**
>
> **B – De combien monte le niveau d'eau quand il verse 6 litres ?**
>
> **C – Combien de litres doit-il verser pour que le niveau d'eau monte de 14 cm ?**
>
> ***Extrait de l'Évaluation Nationale des Acquis des élèves en CM2, mai 2012.***

Exercice 25. *(D'après CRPE Gpe2 d'avril 2014)*
Un enseignant traite la proportionnalité avec ses élèves de cycle 3.

Partie A

L'enseignant s'interroge sur l'énoncé d'un exercice, pour lequel une phrase (notée [...]) reste à préciser :

> **Pour une visite du Château de Versailles, la coopérative scolaire doit payer 105 € pour une classe de 25 élèves de CE1. Mais un groupe de 20 élèves de CE2 se joint finalement à cette classe.**
> **[...]**
> **Combien la coopérative devra-t-elle payer en tout ?**

1. Proposer une phrase complétant l'énoncé pour que cette situation soit sans ambiguïté une situation de proportionnalité.
2. Proposer une phrase complétant l'énoncé pour que cette situation ne soit pas une situation de proportionnalité.

Partie B

L'enseignant propose l'institutionnalisation de la proportionnalité à partir de celle proposée dans le manuel « Outils pour les maths » - CM1 – Magnard – édition 2011 : document en page 8.

1. Quelle propriété caractéristique de la proportionnalité le traitement de l'exemple 1 illustre-t-il ?
2. Quelle propriété caractéristique de la proportionnalité le traitement de l'exemple 2 illustre-t-il ?

3. Dans cet extrait de manuel, l'expression « rapport entre les nombres » désigne dans le traitement des exemples 1 et 2, des coefficients jouant des rôles différents.
Expliciter ces différents rôles.

4. Quelle propriété caractéristique de la proportionnalité est utilisée dans le traitement de l'exemple 3 ? Donner une autre façon de mettre en évidence que la situation n'est pas une situation de proportionnalité, faisant appel à une autre propriété caractéristique.

Extrait de manuel

On reconnaît une situation de proportionnalité lorsque le rapport entre les nombres ne change pas.

Exemple 1 : ***1 kg de pêches coûte 3 €.***

Nombre de kg de pêches	1	2	5
Prix (en €)	3	6	15

Le prix est proportionnel à la masse .
Pour trouver le prix, il faut multiplier par le même nombre (par 3).

Exemple 2 : ***4 gâteaux coûtent 6 €.***
Pour trouver le prix de 8 gâteaux, je calcule le double. → 6 × 2 = 12 €
Pour trouver le prix de 2 gâteaux, je calcule la moitié. → 6 divisé par 2 = 3 €

Exemple 3 : ***1 stylo coûte 2 €, 3 stylos coûtent 5 €, 6 stylos coûtent 6 €.***
Dans cette situation, 3 stylos ne coûtent pas **3 fois plus cher** qu'un stylo, 6 stylos ne coûtent pas 6 fois plus cher.
Cette situation n'est pas proportionnelle.

Partie C
L'enseignant propose un autre exercice :

> Lorsque je fais une mousse au chocolat pour 8 personnes, j'utilise 6 œufs.
> Quand je fais une mousse au chocolat pour 12 personnes, j'utilise 9 œufs.
> Combien faudra-t-il d'œufs si je fais une mousse au chocolat pour 20 personnes ?

Analyser les quatre productions des élèves en annexe, en précisant les propriétés mathématiques implicitement mobilisées.

Partie D
L'enseignant propose un dernier exercice :

> Dans une ville, il y a deux médiathèques.
> Le service culturel de cette municipalité effectue un recensement des fonds d'ouvrages de chaque établissement. À cette fin, les documentalistes ont relevé les éléments suivants :
> - à la médiathèque Jean JAURÈS, on peut trouver 5000 ouvrages dont 40% de romans ;
> - à la médiathèque George SAND, on peut trouver 4000 ouvrages dont 60% de romans.
> Calculer le pourcentage de romans au sein du service culturel de la ville.

1. Pourquoi cet exercice s'inscrit-il dans une séquence d'apprentissage traitant de la proportionnalité ?

2. Après une phase de recherche individuelle, l'enseignant organise une phase de mise en commun. Paul dit : "J'ai trouvé 50% parce que c'est exactement entre 40% et 60%."

(a) Quelle erreur de raisonnement Paul a-t-il commis ?

(b) Par quel nombre faudrait-il remplacer 5000 pour que 50% soit la bonne réponse ?

Annexe

Auriane Je cherche pour une personne $6 : 8 =$ $6 \mid 8$; $60 \mid 0,75$; 40 ; 0 Je cherche pour 20 personnes $20 \times 0,75 =$ $0,75 \times 20 = 15,00$ Il faut 15 oeufs	Emeric $8 + 12 = 20$ $6 + 9 = 15$ Il faut 15 oeufs
Nicolas $8 + 12 = 20$ $6 + 12 = 18$ Il faut 18 oeufs	Kévin Pour 8 personnes, il faut 6 oeufs. Donc, pour 1 personne il en faut 8 fois moins pour 20 personnes, 20 fois plus. $6 \times 20 : 8 =$ $6 \times 20 = 120$; $120 \mid 8$; $40 \mid 15$; 0 Il faut 15 oeufs.

Thème 6 | Structure multiplicative

Memo

« L'étude des quatre opérations (addition, soustraction, multiplication, division) commence dès le début du cycle à partir de problèmes qui contribuent à leur donner du sens, en particulier des problèmes portant sur des grandeurs ou sur leurs mesures. »
Programme de cycle 2 (qui insiste ensuite sur la pratique quotidienne du calcul mental).

En complément du Thème 2, nous allons donc maintenant aborder la multiplication (et la division !) : ses propriétés et ses liens avec l'addition (et la soutraction !).

• Signification et propriétés

→ *Sens de la multiplication et de la division et réciprocité de ces opérations*
La multiplication par un nombre entier apparaît naturellement lors de l'itération de l'addition d'un même nombre. En effet, pour tout nombre réel a, l'addition itérée n fois, $a+a+a+\ldots+a$ correspond à la multiplication $n \times a$.
De même, la division apparaît lors d'un partage en n parts égales de l'unité ou, par multiplication, de toute autre quantité Q, puisqu'une telle part correspond à $\frac{Q}{n}$.
De ce point de vue, il est clair que multiplication et division sont des opérations *inverses* (ou plutôt *réciproques*) l'une de l'autre, au sens où « partager en n parts égales » une quantité quelconque puis « ajouter ces n parts ensemble » permet de retrouver la quantité initiale : $n \times \frac{Q}{n} = Q$.
Dans le langage courant, cette réciprocité apparaît dans les expressions « fois plus » et « fois moins ». La multiplication se lit « fois » (comme dans « 3 fois 5 ») et « fois plus » évoque immédiatement une multiplication alors que « fois moins » évoque une division.

Exemple. Adam a 3 *fois plus* de billes que Benoît, signifie que la quantité A de billes d'Adam est le triple de (ou trois fois) celle de Benoît B qui, dans ce cas, a *trois fois moins* de billes qu'Adam. Mathématiquement : $A = 3 \times B$ et $B = \frac{A}{3}$.

La réciprocité de ces opérations peut se lire également dans les changements d'unité. Multiplier par 100 (respectivement 60) permet de passer des mètres aux centimètres (respectivement des heures aux minutes) alors que diviser par 100 (respectivement 60) permet le passage inverse.
Ce phénomène est un cas particulier de situation de proportionnalité : si l'on passe des mesures de la grandeur G_1 à celles de la grandeur G_2 par multiplication par k (un coefficient de proportionnalité), l'opération inverse se fait par division par k. Ceci vient de ce que pour passer des mesures de la grandeur G_2 à celles de G_1, il faut multiplier par *l'autre* coefficient de proportionnalité, $k' = \frac{1}{k}$.
Le principe au cœur de la réciprocité entre multiplication et division s'exprime donc ainsi :

« diviser par un nombre revient à multiplier par son inverse (et inversement ...) ».

→ *Propriétés des opérations*
Comme l'addition, la multiplication vérifie les propriétés d'associativité et de commutativité. Elle vérifie de plus une propriété de distributivité par rapport à l'addition.

Associativité	$(4 \times 3) \times 5 = 4 \times (3 \times 5)$ $= 4 \times 3 \times 5$	il n'y a pas d'ordre imposé dans une suite de multiplications qui peut donc être écrite sans parenthèses
Commutativité	$4 \times 7 = 7 \times 4$	la multiplication est symétrique, son résultat est le même quel que soit l'ordre des facteurs
Distributivité	$(3+6) \times 7 = 3 \times 7 + 6 \times 7$, $8 \times (17-4) = 8 \times 17 - 8 \times 4$	la multiplication est distributive sur l'addition : le produit d'une somme est égal à la somme des produits

→ *Ordre des opérations*

L'associativité implique qu'il n'y a pas d'ordre de priorité lorsque l'on fait une suite de multiplications *ou* une suite d'additions. Cependant multiplication et division sont prioritaires sur addition et soustraction. De plus les calculs entre parenthèses sont prioritaires sur tous les autres.

Exemple. $2 - 7 \div 5 + 3^2 \times (5-1) = 2 - \frac{7}{5} + 9 \times 4 = 2 - 1{,}4 + 36 = 0{,}6 + 36 = 36{,}6$.

→ *Les puissances de 10 et la numération*

L'écriture 3^2 dans l'exemple ci-dessus représente l'itération (ici 2 fois) de la multiplication par un nombre (ici 3). Plus généralement multiplier n fois par un nombre réel a s'écrit $a^n = a \times a \times \ldots \times a$.
Quand $a \neq 0$, l'inverse de a s'écrit $\frac{1}{a} = a^{-1}$. Selon le principe reliant multiplication et division, diviser par a revient donc à multiplier par a^{-1}. Itérer n divisions par a coïncide donc avec n multiplications par a^{-1} et peut s'écrire $(a^{-1})^n = a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$.
Quand $a = 10$, ces notations permettent de facilement changer d'unités pour les unités de numération (décimales) usuelles. Elles permettent également d'écrire les nombres décimaux en *notation scientifique* : un nombre réel a, $1 \leq a < 10$, multiplié par une puissance de 10. Celle-ci indique donc l'ordre de grandeur du nombre considéré.

Exemple. Changements d'unités : 10^3 m $= 1$ km ; 10^6 g $= 1$ t ; 10^{-3} m^3 $= 1$ dm^3 ; etc.
Notation scientifique : 2 345 s'écrit $2{,}345 \times 10^3$; 0,00076 s'écrit $7{,}6 \times 10^{-4}$; etc.

• Calcul mental et en ligne

On rappelle (cf. Thème 2) que les calculs mental et en ligne (qu'ils soient additifs ou multiplicatifs) sont intimement liés, que leur pratique vient en amont puis complète celle du calcul posé, même si en tant que procédures calculs posés et calculs mental et en ligne sont extrêmement différentes.

Les procédures disponibles aux élèves dépendent évidemment du cycle d'enseignement. Fouillons un peu les programmes...

→ *Cycle 2*

Tables de multiplications, multiplications par 10 et 100, doubles et moitiés de nombres usuels ; questions du type $7 \times 4 = ?$, $7 \times ? = 28$, $28 = 4 \times ?$ etc ; savoir que 24×10 c'est 24 dizaines soit 240.

Décomposition multiplicative : $25 \times 12 = 25 \times 4 \times 3 = (25 \times 4) \times 3 = 100 \times 3 = 300$. Propriétés de la numération : 4×60 c'est 4×6 dizaines, c'est 240.
Décomposition additive (et distributivité) : $5 \times 12 = 5 \times 10 + 5 \times 2$.

Exemple. (Stratégies de calculs en ligne.) $5 \times 36 = 5 \times 2 \times 18$; $5 \times 36 = 150 + 30$; $5 \times 36u = 15d + 30u = 15d + 3d = 18d = 180$. Écritures $21 = 4 \times 5 + 1$ pour déterminer *quotient* et *reste* de la division de 21 par 4 (ou 5) (voir p.5 pour les définitions).

→ *Cycle 3*

Multiplier et diviser un nombre décimal par 10, 100, 1000 ; multiplier par 5, 25, 50, 0,1, 0,5 ; utiliser les propriétés des opérations : $3{,}2 \times 25 \times 4 = 3{,}2 \times 100$; $45 \times 21 = 45 \times 20 + 45$; $6 \times 18 = 6 \times 20 - 6 \times 2$; $23 \times 7 + 23 \times 3 = 23 \times 10$.

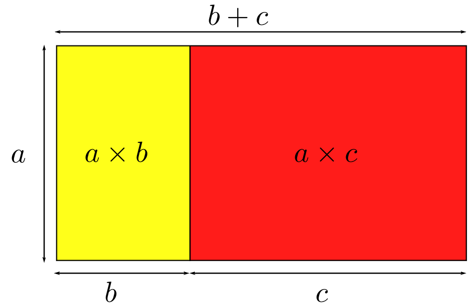
Connaître les critères de divisibilité par 2, 3, 5, 9, 10 ; vérifier la vraisemblance d'un résultat, notamment par estimation avec des ordres de grandeur ; utiliser le parenthésage pour indiquer une chronologie ou expliquer un calcul.

Exemple. On peut expliquer la distributivité de la multiplication sur l'addition (avec des entiers) grâce à la multiplication vue comme itération de l'addition :
$3 \times (4+5) = (4+5)+(4+5)+(4+5) = (4+4+4)+(5+5+5) = 3 \times 4 + 3 \times 5$.

→ *Illustrations, représentations*

Même si ce n'est pas une procédure en tant que telle, une représentation de la situation peut aider à visualiser un calcul ou une propriété mathématique.

Si on reprend l'exemple de la distributivité de la multiplication sur l'addition, le dessin ci-contre peut être tout à fait éclairant. L'aire du grand rectangle, de côtés de longueurs respectives a et $b+c$ est donnée par $a \times (b+c)$. Elle est égale à la somme des aires des rectangles jaune et rouge, respectivement $a \times b$ et $a \times c$.



→ *Tables de multiplication*

Les tables de multiplication et leur apprentissage sont à la frontière entre *faits numériques* et *calcul mental*. Voici de possibles points d'appui pour les mémoriser :

$\times$ 2 (le double)
$\times$ 4 (le double du double)
$\times$ 8 (le double du double du double)

$\times$ 3 (la clé à retenir)
$\times$ 6 (le double de la clé)
$\times$ 9 (le triple de la clé)

$\times$ 10 (nombre dont chaque chiffre a une valeur dix fois plus grande).
$\times$ 5 (le milieu à retenir ou moitié de x 10)

$\times$ 7 (par ajout ou retrait d'une fois le nombre)

• Techniques de calcul posé

◦ <u>La multiplication</u>

⚠ L'algorithme de multiplication posée repose sur la propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition. Pour l'effectuer efficacement, il est impératif de connaître ses tables de multiplication par cœur.

→ *Étape 1 : multiplication par les unités du second nombre*

$$\begin{array}{cccccc} & & & 3 & 8 & 4 \\ \times & & & & 7 & 2 \\ \hline & & & 7 & 6 & 8 \\ + & 2 & 6 & 8 & 8 & 0 \\ \hline = & 2 & 7 & 6 & 4 & 8 \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} & & & {}^{1}3 & 8 & 4 \\ \times & & & & 7 & 2 \\ \hline & & & 7 & 6 & 8 \\ + & 2 & 6 & 8 & 8 & 0 \\ \hline = & 2 & 7 & 6 & 4 & 8 \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} & & & {}^{1}3 & 8 & 4 \\ \times & & & & 7 & 2 \\ \hline & & & 7 & 6 & 8 \\ + & 2 & 6 & 8 & 8 & 0 \\ \hline = & 2 & 7 & 6 & 4 & 8 \end{array}$$

$2u \times 4u = 8u$ $\qquad$ $2u \times 8d = 1c + 6d$ $\qquad$ $2u \times 3c + 1c = 7c$

→ *Étape 2 : multiplication par les dizaines du second nombre*

$$\begin{array}{cccccc} & & & {}^{5}\cancel{{}^{1}}3 & {}^{2}8 & 4 \\ \times & & & & 7 & 2 \\ \hline & & & 7 & 6 & 8 \\ + & 2 & 6 & 8 & 8 & \mathit{0} \\ \hline = & 2 & 7 & 6 & 4 & 8 \end{array} \leftarrow$$

Ce calcul correspond à 384 unités × 7 *dizaines* :
on écrit *0* à droite pour indiquer les dizaines
puis on réitère la multiplication chiffre par chiffre.

→ *Étape finale : Addition des quantités obtenues*

$$\begin{array}{ccccccl} & & & {}^{5}\cancel{{}^{1}}3 & {}^{2}8 & 4 & \\ \times & & & & 7 & 2 & \\ \hline & & {}^{1} & {}^{1}7 & 6 & 8 & \leftarrow\ 2u \times 384u \\ + & 2 & 6 & 8 & 8 & 0 & \leftarrow\ +\,7d \times 384u \\ \hline = & 2 & 7 & 6 & 4 & 8 & \leftarrow\ = 2u \times 384u + 7d \times 384u = (2u + 7d) \times 384u = 72 \times 384\ \checkmark \end{array}$$

Cette dernière étape correspond bien à l'utilisation implicite de la distributivité.

→ *Remarques finales*

– Il y a autant d'étapes que de chiffres dans le nombre posé en 2è ligne (+ l'addition finale !). Il est donc recommandé d'écrire les nombres de sorte que le second soit « le plus petit » *en nombre de chiffres qui le composent*, ce qui est toujours possible du fait de la *commutativité* de la multiplication.

– Lorsque les nombres en jeu sont décimaux (et non seulement entiers), le principe est *exactement* la même que pour des nombres entiers.

Exemple. $3{,}84 \times 7{,}2 = 384$ centièmes $\times$ 72 dixièmes $= \frac{384}{100} \times \frac{72}{10} = \frac{384 \times 72}{10 \times 100} = \frac{384 \times 72}{1000} = 384 \times 72$ millièmes. On obtient donc 27 648 millièmes $= \frac{27648}{1000} = 27{,}648$.

Dans la pratique, on peut faire le calcul comme précédemment :

$$\begin{array}{cccccc} & & & {}^{5}\cancel{{}^{1}}3\,, & {}^{2}8 & 4 \\ \times & & & & 7\,, & 2 \\ \hline & & {}^{1} & {}^{1}7 & 6 & 8 \\ + & 2 & 6 & 8 & 8 & 0 \\ \hline = & 2 & 7\,, & 6 & 4 & 8 \end{array}$$

$\}$ ← On « oublie » les virgules dans les calculs intermédiaires

← On la réintègre à la fin, en suivant comme règle que :

La somme des nombres de chiffres des parties décimales donne le nombre de chiffres de la partie décimale du résultat final.

On a ici : 2 décimales (pour $3{,}\dot{8}\dot{4}$) + 1 (pour $7{,}\dot{2}$) = 3 qui est bien le nombre de chiffres de la partie décimale du résultat final.

∘ <u>La division</u>

→ *Dans les entiers, la* division euclidienne

$$\begin{array}{crrrr|rrr} & 7 & 6 & 4 & 8 & 1 & 2 & \\ \cline{6-8} - & 7 & 2 & & & 6 & 3 & 7 \\ \cline{1-3} = & & 4 & 4 & & & & \\ & - & 3 & 6 & & & & \\ & = & & 8 & 8 & & & \\ & & - & 8 & 4 & & & \\ & & = & & 4 & & & \end{array}$$

← On cherche le plus grand entier n tel que $n \times 12 \leq 76$,
← ici on trouve 6 car $6 \times 12 = 72$ alors que $7 \times 12 = 84$.
← On retire alors 72 à 76 : $76 - 72 = 4$.

$$\begin{array}{crrrr|rrr} & 7 & 6 & 4 & 8 & 1 & 2 & \\ \cline{6-8} - & 7 & 2 & | & & 6 & 3 & 7 \\ \cline{1-3} = & & 4 & 4 & & & & \\ & - & 3 & 6 & & & & \\ & = & & 8 & 8 & & & \\ & & - & 8 & 4 & & & \\ & & = & & 4 & & & \end{array}$$

← On « descend » le 4 et on réitère :
on cherche le plus grand entier n tel que $n \times 12 \leq 44$,
ici on trouve 3 et on calcule $44 - (3 \times 12) = 8$.

$$\begin{array}{crrrr|rrr} & 7 & 6 & 4 & 8 & 1 & 2 & \\ \cline{6-8} - & 7 & 2 & & | & 6 & 3 & 7 \\ \cline{1-3} = & & 4 & 4 & & & & \\ & - & 3 & 6 & & & & \\ & = & & 8 & 8 & & & \\ & & - & 8 & 4 & & & \\ & & = & & 4 & & & \end{array}$$

← Finalement, on « descend » le 8 et on réitère :
$7 \times 12 = 84$ et $88 - 84 = 4$.

Si l'on veut rester dans les entiers ... c'est fini ! Mais qu'avons-nous calculé ?

dividende

$$\begin{array}{crrrr|rrr} & 7 & 6 & 4 & 8 & 1 & 2 & \\ \cline{6-8} - & 7 & 2 & & & 6 & 3 & 7 \\ \cline{1-3} = & & 4 & 4 & & & & \\ & - & 3 & 6 & & & & \\ & = & & 8 & 8 & & & \\ & & - & 8 & 4 & & & \\ & & = & & 4 & & & \end{array}$$

diviseur

quotient

← potence

reste

$$\boxed{\text{dividende} = \text{diviseur} \times \text{quotient} + \text{reste}}$$

ici : $7\,648 = 12 \times 637 + 4$

Le *quotient* est donc le plus grand nombre entier tel que diviseur × quotient ≤ dividende. La différence entre ces deux quantités est alors donnée par le *reste* :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{le } \textit{quotient} = \text{meilleure \underline{approximation par défaut} de } \frac{\text{dividende}}{\text{diviseur}} \text{ par un entier,} \\ \text{et } \frac{\text{reste}}{\text{diviseur}} = \text{erreur entre cette approximation et le résultat exact.} \end{array}}$$

⚠ Pour aider les élèves à identifier à chaque étape l'entier n le plus grand satisfaisant l'inégalité recherchée, on pourra dans un premier temps leur conseiller d'écrire la table de multiplication du diviseur.

Dans l'exemple précédent, on pourra leur faire écrire la table de 12

$1 \times 12 = 12$

$2 \times 12 = 24$

$3 \times 12 = 36$ (...)

→ *Et dans les décimaux ?*

Tout d'abord, remarquons que l'on peut toujours se ramener à un diviseur entier.

Exemple. Je cherche le résultat de la division de 764,8 par 6,37. Comme $\frac{764{,}8}{6{,}37} = \frac{764{,}8 \times 100}{6{,}37 \times 100} = \frac{76480}{637}$, il me suffit de déterminer le résultat de la division de 76480 par 637.

De même, le résultat de la division de 76,48 par 63,7 est le même que celui de la division de 764,8 par 637.

Lorsque le dividende est un nombre décimal (non entier) et que le diviseur est un entier, la technique de division est *exactement* la même que dans les entiers, sinon que la « virgule » apparaît dans le quotient au moment où le chiffre des dixièmes descend.

Exemple.

$$
\begin{array}{cccccc|cccc}
 & & 7 & 6 & 4, & 8 & 1 & 2 & & \\
\cline{7-10}
 & - & 7 & 2 & & & 6 & 3, & & 7 \\
\cline{1-4}
= & & & 4 & 4 & & & \uparrow & & \\
 & & - & 3 & 6 & & & & & \\
\cline{3-5}
 & & = & & 8 & 8 & & \leftarrow & & \\
 & & & - & 8 & 4 & & & & \\
\cline{4-6}
 & & & = & & 4 & & & & \\
\end{array}
$$

Lorsque le chiffre des dixièmes « descend », la , apparaît dans le quotient. Puis on continue comme avant ...

⚠ La formule reliant diviseur, dividende, quotient et reste est toujours valable, mais beaucoup plus rarement utilisée.

Elle donne, dans l'exemple précédent, $764{,}8 = 12 \times 63{,}7 + 0{,}4$: il ne faut pas oublier la virgule à gauche de la potence, c'est-à-dire qu'il ne faut pas oublier que le « reste » (4) est en fait maintenant 4 *dixièmes*.

On en déduit que cet algorithme de division posée permet de déterminer des approximations des résultats de division dont on peut contrôler l'erreur (puisqu'on la connaît !).

Exemple.

On cherche à approcher le résultat de la division de 5 par 12. La première étape consiste à trouver l'entier n le plus grand tel que $n \times 12 \leq 5$.

Ceci n'est vrai que pour $n = 0$! 0 est donc le premier nombre de notre quotient.

Comme 5 = 5,0 = 5,00 = ... , l'algorithme décrit précédemment permet de poursuivre la division à la précision désirée.

$$
\begin{array}{cccccc|cccc}
 & 5, & 0 & 0 & 0 & & 1 & 2 & & \\
\cline{7-10}
- & 0 & & & & & 0, & 4 & 1 & 6 \\
\cline{1-2}
= & 5 & 0 & & & & & & & \\
- & 4 & 8 & & & & & & & \\
\cline{1-3}
= & & 2 & 0 & & & & & & \\
 & - & 1 & 2 & & & & & & \\
\cline{2-4}
 & = & & 8 & 0 & & & & & \\
 & & - & 7 & 2 & & & & & \\
\cline{2-5}
 & & = & & 8 & & & & & \\
\end{array}
$$

<u>Exercice</u>. (i) Quelle est l'erreur de l'approximation $\frac{5}{12} \simeq 0,416$?

(ii) En considérant la suite de l'algorithme, expliquer pourquoi $\frac{5}{12} = 0{,}4166666...$

TD

Cette fiche d'exercices porte sur l'apprentissage de la multiplication, la division ainsi que sur les différentes techniques de calcul.

Compétences :

— Réaliser que certains problèmes relèvent de situations multiplicatives, de partages ou de groupements.

— Calculer avec des nombres entiers ou décimaux, mentalement ou à la main, de manière exacte ou approchée, en utilisant des stratégies adaptées aux nombres en jeu.

— Utiliser le calcul mental (ordre de grandeur, etc) pour estimer le résultat d'une opération.

— Comprendre les spécificités de chacune des techniques de calcul (mental, en ligne, posé).

Exercice 1. *(Sesamaths 6è)*
Sans poser l'opération ni utiliser la calculatrice, déterminer le résultat juste pour chacune de ces multiplications :

calcul / réponses	A	B	C	D
10,3 × 7,5	77,29	68,412	77,25	7,25
11,6 × 29,8	354,578	321,12	512,88	345,68
346 × 0,97	3 263,62	36,62	335,62	348,62
1,03 × 698,4	7 233,352	719,352	687,352	68,352
2,5 × 4,4	8,444	11	33,5	2,2

Exercice 2.

1. Faire les calculs suivants astucieusement, sans poser les opérations :

(a) $5 \times 33 \times 2 =$ ....

(b) $50 \times 33 \times 2 \times 30 =$ ....

(c) $4 \times 1\,725 \times 250 \times 10 =$ ....

(d) $(132 \times 76) - (31 \times 76) =$ ....

(e) $65 \times 11 - 65 =$ ....

(f) $13 \times 87 + 12 \times 13 =$ ....

Exercice 3.

1. Poser la multiplication de 62 avec 597.
2. En déduire les résultats de

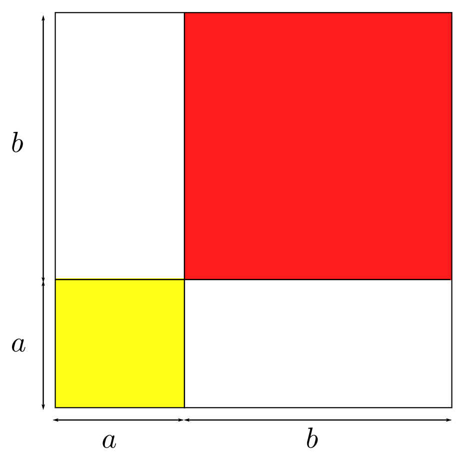
(i) $6{,}2 \times 597$ (ii) $6{,}2 \times 59{,}7$
(iii) $6{,}2 \times 5{,}97$ (iv) $6{,}2 \times 0{,}597$
(v) 620×597

Exercice 4. Compléter ce calcul :

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & 9, & 4 & 6 \\
\times & & & & & \\ \hline
 & & 2 & 8 & 3 & 8 \\
+ & & & & & \\ \hline
= & 5 & 0, & 1 & 3 & 8
\end{array}$$

Exercice 5.
157 326 est-il divisible par 2 ? 3 ? 4 ? 5 ? 9 ?

Exercice 6.
Quelle identité remarquable l'illustration ci-dessous suggère-t-elle ?



Exercice 7.
Déterminer un chemin reliant 1 à 180 sachant qu'on ne peut :
— monter que vers un multiple,
— descendre que vers un diviseur,
— pas se déplacer horizontalement.

180	405	270	108	168	252	945	
60	90	135	54	126	84	126	189
20	45	25	2	42	18	63	
10	56	15	300	300	14	42	9
2	28	3	60	120	7	6	
21	14	42	12	30	45	3	4
7	6	3	5	15	9	1	

Exercice 8.
Je vais à l'épicerie et j'achète :
— 1,5 kg de pommes à 1,46 € le kg,
— 1 ananas à 1,89 € pièce,
— 2 briques de jus d'orange à 1,40 € la brique,
— 2 bouteilles d'eau d'un pack de 6 bouteilles à 6,60 € le pack,
— 3 paquets de 250 g de café moulu à 1,8 € le paquet.
Il y a une réduction de 10% sur le café. Je donne un billet de 20 euro à l'épicier.

1. Déterminer l'expression numérique donnant la monnaie rendue par l'épicier, puis faire le calcul.
2. Modifier l'expression obtenue ci-dessus pour prendre en compte une réduction de 5% supplémentaire accordée par l'épicier sur l'ensemble de ma commande, puis effectuer le calcul.

Exercice 9.

1. Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de 116 par 16.
2. Même question avec 116 et 7.

En posant les divisions :

3. Calculer le résultat exact de $141 \div 8$.
4. Déterminer l'approximation par défaut à 10^{-3} près de $85 \div 6$.
5. Déterminer l'approximation par excès à 10^{-2} près de $510 \div 21$.

Exercice 10.
En procédant par des calculs mentaux, compléter les calculs suivants :

a. $12{,}6 \div 3 =$	d. $10{,}2 \div$ .... $= 5{,}1$	g. .... $\div\, 4 = 8{,}2$
b. $93{,}3 \div 3 =$	e. $6{,}15 \div$ .... $= 2{,}05$	h. .... $\div\, 9 = 1{,}01$
c. $15{,}6 \div 6 =$	f. $8{,}25 \div$ .... $= 1{,}65$	i. .... $\div\, 11 = 12{,}1$

Exercice 11. Compléter :

$$\begin{array}{rrrrr|rrr}
 & 7 & 2 & . & . & . & . & \\
- & . & . & & & 3 & . & . \\
\hline
= & & 3 & . & & & & \\
 & - & . & . & & & & \\
\hline
 & = & 1 & 3 & . & & & \\
 & - & . & . & . & & & \\
\hline
 & = & & 2 & 0 & & &
\end{array}$$

Exercice 12.
Dans un collège 163 élèves sont inscrits à l'UNSS. Le responsable veut acheter un maillot pour chacun des inscrits. Les maillots sont vendus par lots de 14.

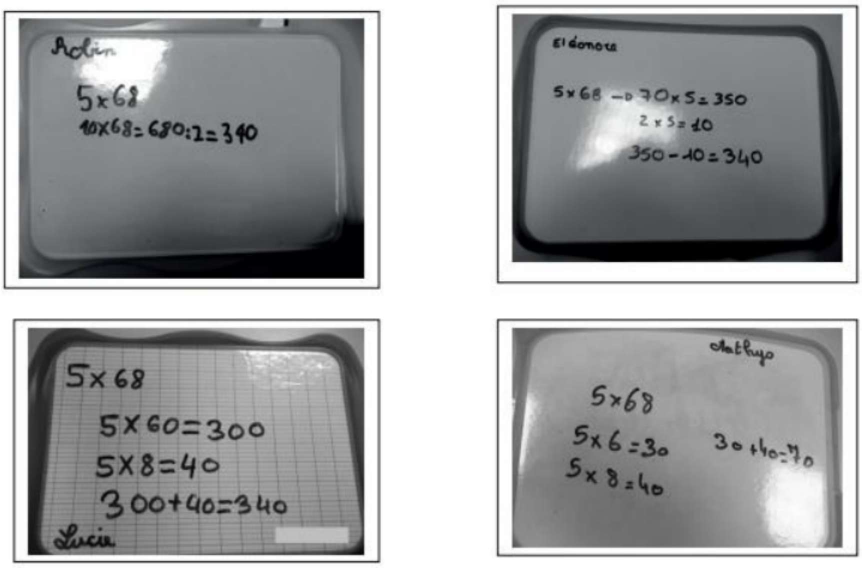
En effectuant une division euclidienne, déterminer :

1. combien de lots il doit acheter, et
2. combien de maillots ne seront pas distribués.

Exercice 13.
Simon veut distribuer des sacs contenant 12 bonbons chacun. Il a 1 000 bonbons en tout.

1. Combien lui manque-t-il de bonbons pour réaliser un sac supplémentaire ?
2. Simon n'a que 60 sacs. Combien de bonbons peut-il répartir *équitablement* dans chaque sac ?

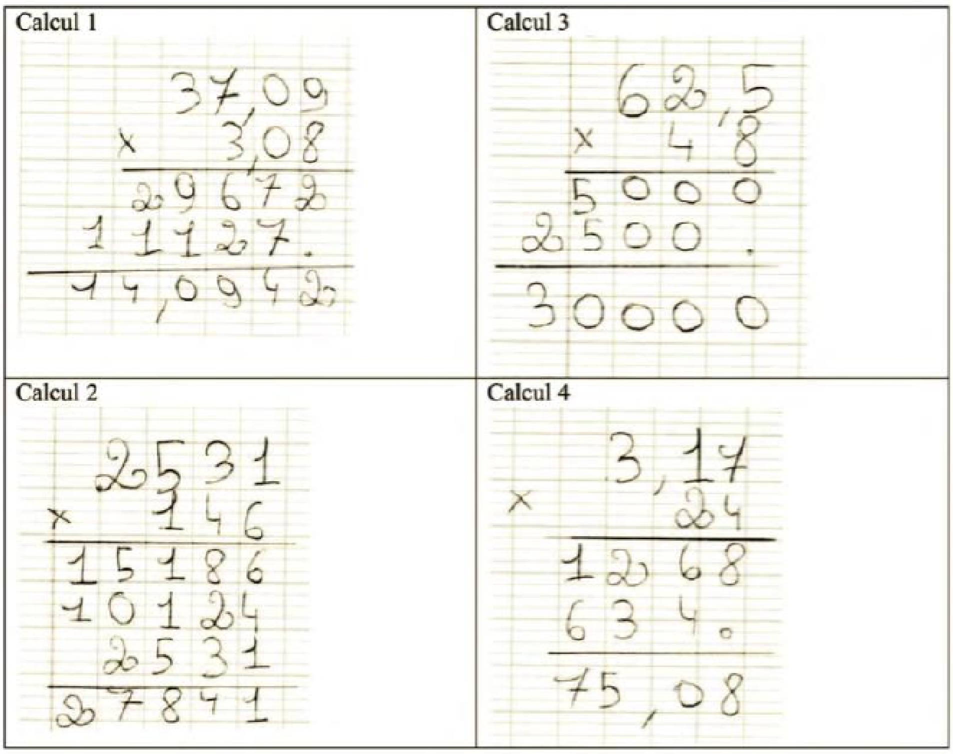
Exercice 14. *(CRPE 2018)*
Lors d'un travail sur le calcul en ligne, un enseignant propose la situation suivante à ses élèves : « Calculer 5×68 ». Voici les productions de Robin, Éléonore, Lucie et Mathys.



1. Analyser chacune des productions, en explicitant les procédures mises en œuvre et en relevant les éventuelles erreurs.

2. Donner trois démarches pouvant être attendues d'un élève de cycle 3 pour calculer en ligne 25×28. Pour chacune de ces démarches, indiquer les connaissances en jeu.

Exercice 15. *(CRPE 2017)*
Techniques opératoires de la multiplication. Voici 4 opérations posées.



1. Dans chacun des cas, décrire les erreurs éventuelles.

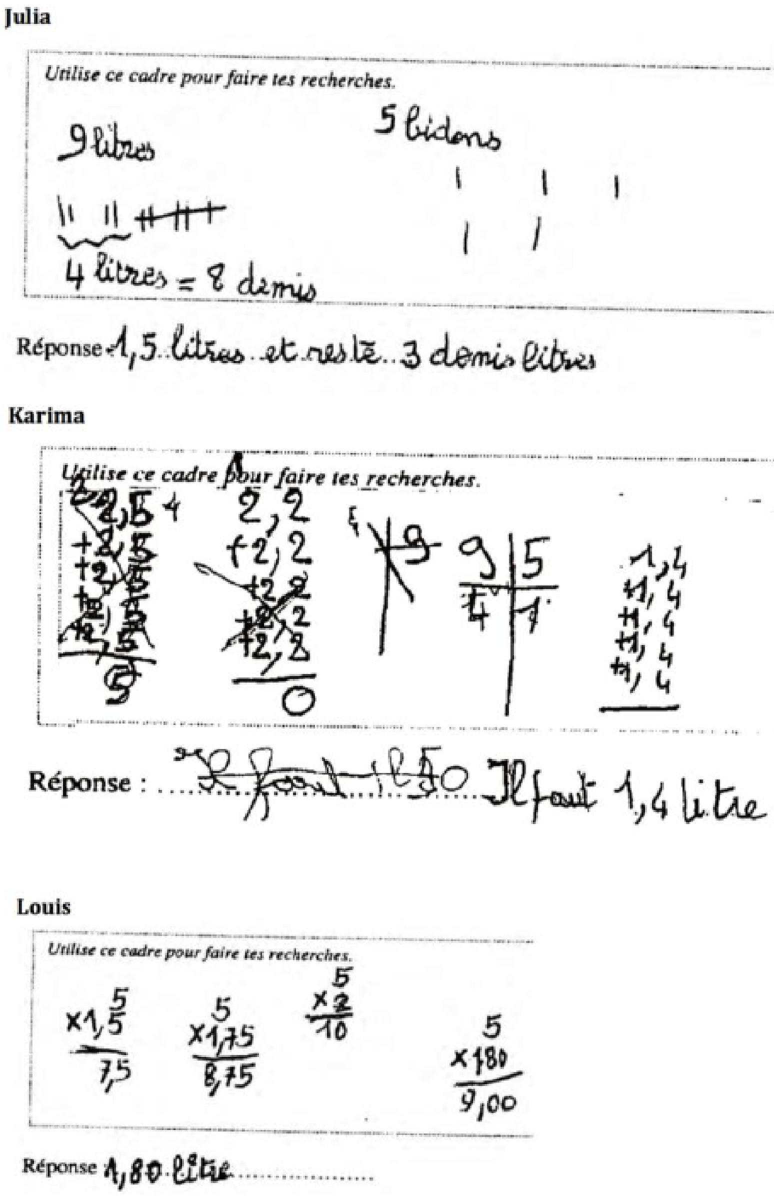
2. Que pourrait proposer le professeur aux élèves ayant produit les calculs 1 et 3 pour leur permettre de contrôler leur résultat ?

Exercice 16. *(d'après CRPE 2017, amendé RL)*
L'exercice ci-dessous est extrait des évaluations nationales CM2 de 2012.

Il faut 9 litres d'huile pour remplir complètement 5 bidons identiques. Quelle est la contenance, en litre, de chacun de ces bidons ?

1. Quelle opération permet de répondre à cette question ?

Voici les productions de Julia, Karima et Louis.



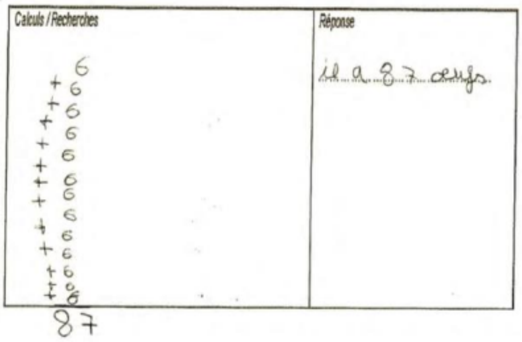
2. Pour chacune d'entre elles, expliquer la procédure utilisée.
3. Sur quelle variable didactique l'enseignant peut-il jouer pour encourager Louis à changer de procédure ?
4. Proposer une (de) telle(s) modification(s).

Exercice 17. *(CRPE 2017)*
Exercice extrait des évaluations nationales à l'entrée au CE2.

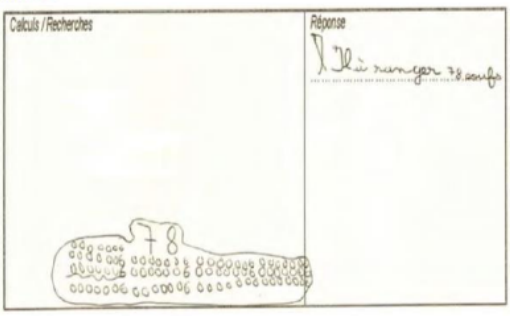
Un fermier range 6 œufs dans chaque boîte. Quand il a fini, il compte ses boîtes et en trouve 13. Combien a-t-il rangé d'œufs ? Écris tes calculs dans le cadre de gauche et ta réponse dans celui de droite.

Voici les productions de 6 élèves :

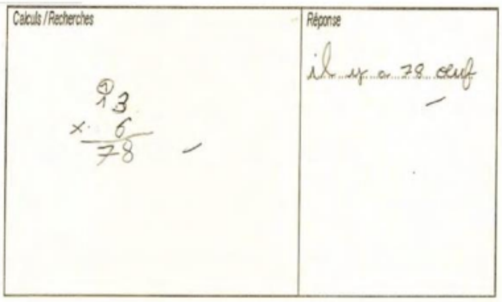
Élève 1



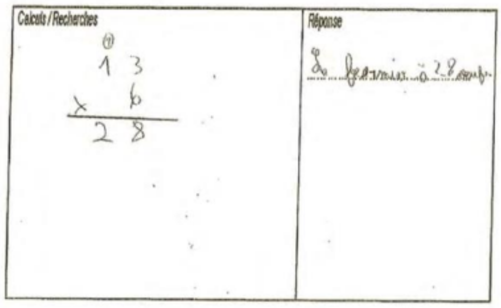
Élève 2



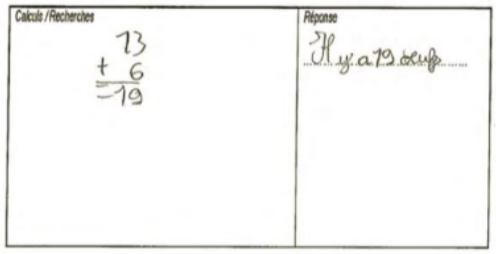
Élève 3



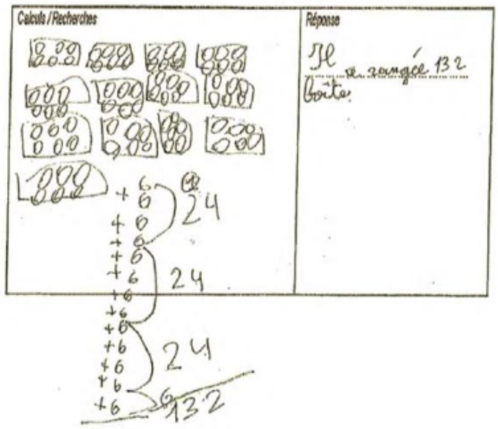
Élève 4



Élève 5



Élève 6



1. Pour chacun des élèves 1 à 3, expliciter les procédures utilisées et donner 2 compétences qui semblent acquises.
2. Pour chacun des élèves 4 à 6, citer une compétence qui semble acquise et identifier et analyser les erreurs.
3. Pour l'élève 5, proposer une aide que pourrait envisager l'enseignant pour l'amener à corriger son erreur.
4. Pour les élèves 1 et 6, comment l'enseignant pourrait-il modifier l'énoncé pour les amener à utiliser une multiplication ?

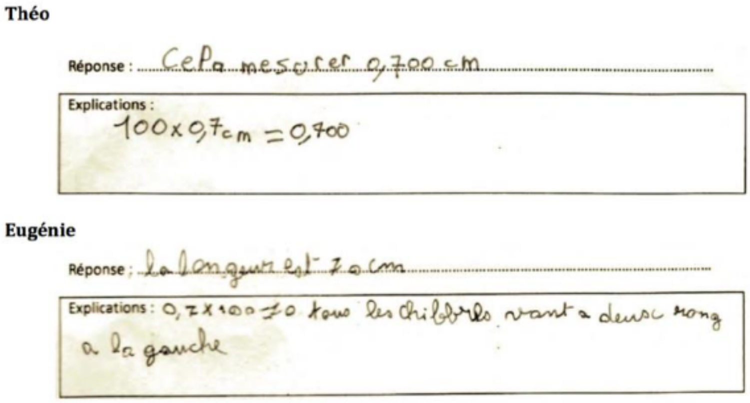
Exercice 18. *(CRPE 2017)*
Les problèmes suivants, issus du manuel EuroMaths CM2 (éditions Hatier, 2009), ont été donnés en fin d'année à des élèves d'une classe de CM2. La calculatrice n'était pas autorisée.

> 1. Un croissant coûte 1,25 €. Quel est le prix de 10 croissants ?
> 2. Pour 10 baguettes, Pierre paie 8,50 €. Quel est le prix d'une baguette ?
> 3. Un paquet de 100 enveloppes illustrées coûte 13 €. Quel est le prix d'une enveloppe ?
> 4. Éric fait collection de fourmis en plastique. Il en a plus de 100. Chacune de ses fourmis mesure 0,7 cm. Quelle est la mesure de la ligne formée par 100 fourmis à la queue leu leu ?

1. Citer deux compétences travaillées dans cet exercice.
2. Voici les productions de deux élèves en réponse au problème 4.

(a) Analyser l'erreur de Théo en émettant une hypothèse sur son origine.

(b) Formuler précisément la procédure utilisée par Eugénie et en donner une justification mathématique.

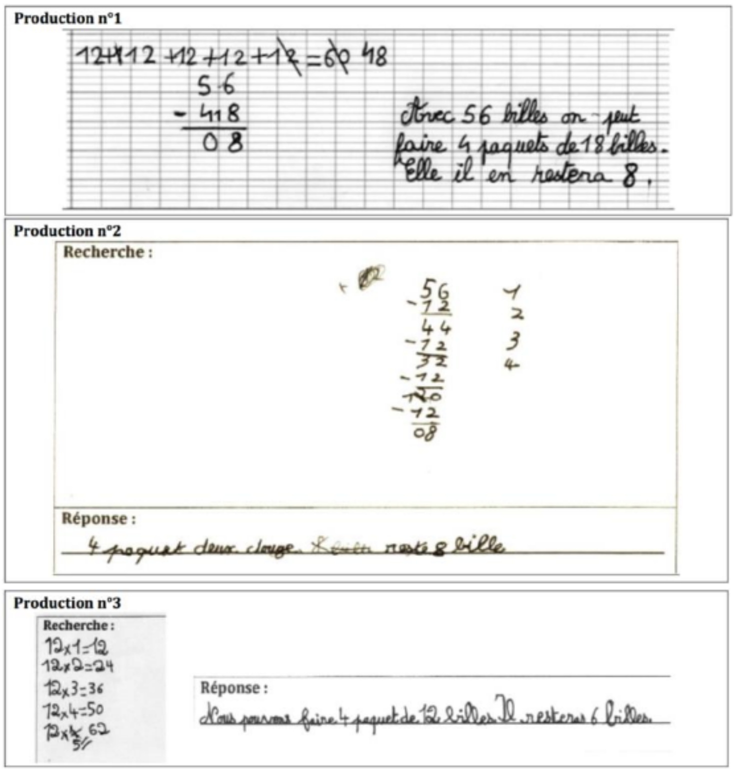


Exercice 19. *(CRPE 2018)*
Voici une situation proposée à des élèves de CM1.

> Problème 1 : Combien de sacs de 12 billes peut-on faire avec 56 billes ?

On relève trois productions d'élèves.

1. Pour chacune de ces productions, expliciter la procédure utilisée pour résoudre le problème 1.
2. Expliquer comment une modification des nombres de l'énoncé peut montrer les limites des procédures mises en œuvre et inciter à l'utilisation de la technique opératoire de la division.
3. Citer trois connaissances ou capacités nécessaires pour effectuer une division posée.



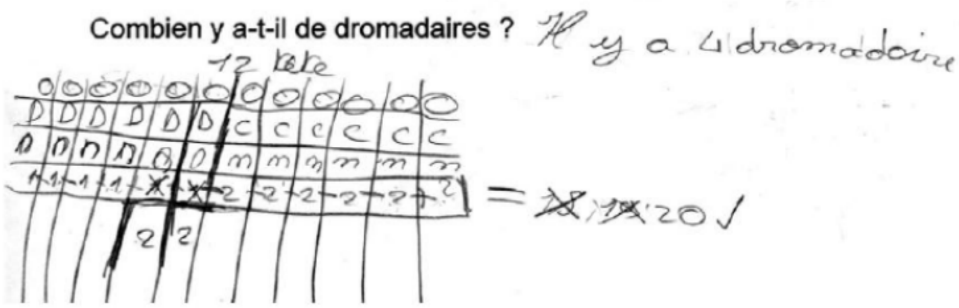
Exercices supplémentaires

Exercice 20. *(d'après CRPE 2016, amendé RL)*
On considère un troupeau mixte constitué de 12 animaux : des dromadaires (à 1 bosse) et des chameaux (à 2 bosses).

1. Quel est le nombre minimal de bosses présentes dans le troupeau ? Quel en est le nombre maximal ?
2. Montrer que n'importe quel nombre de bosses entre ces deux valeurs peut apparaître (en fonction du nombre de chameaux dans le troupeau).

On ajoute la donnée suivante : *le nombre total de bosses est de 20* et on propose ce problème dans une classe de cycle 3.

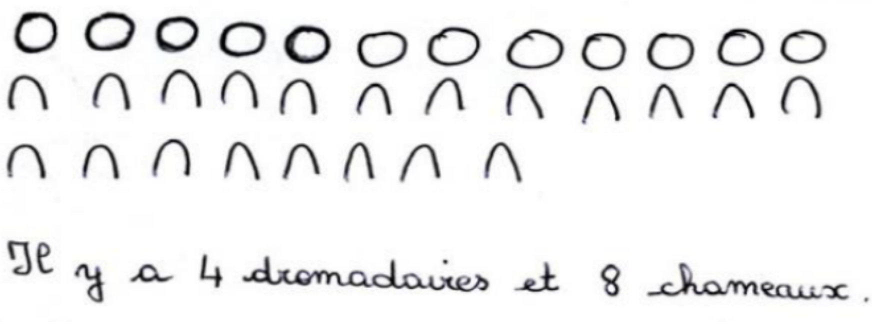
3. Combien de dromadaires y a-t-il dans le troupeau ?
4. Voici la réponse de Quentin.



(a) Expliquer sa démarche.

(b) Appliquer le raisonnement de Quentin au problème obtenu en remplaçant 12 animaux et 20 bosses par 152 animaux et 216 bosses respectivement.

5. Voici la réponse de Ramia.



(a) Expliquer sa démarche.

(b) Appliquer le raisonnement de Ramia au problème obtenu en remplaçant 12 animaux et 20 bosses par 546 animaux et 700 bosses respectivement.

Thème 7 | Géométrie : de l'espace au plan

Memo

À la maternelle

Extraits du programme consolidé du BO n°25 du 24 juin 2021

• **Faire l'expérience de l'espace, le représenter**

L'expérience de l'espace porte sur l'acquisition de connaissances liées aux déplacements, aux distances et aux repères spatiaux élaborés par les enfants au cours de leurs activités. L'enseignant favorise l'organisation de repères que chacun élabore, par l'action et par le langage, à partir de son propre corps afin d'en construire progressivement une image orientée. Il crée les conditions d'une accumulation d'expériences assorties de prises de repères sur l'espace en permettant aux enfants de :
- l'explorer, le parcourir
- d'observer les positions d'éléments fixes ou mobiles
- d'observer les déplacements de leurs pairs
- d'anticiper progressivement leurs propres itinéraires au travers d'échanges langagiers.

Par l'utilisation et la production de représentation diverses (photos, maquettes, dessins, plan...) et également par les échanges langagiers avec leurs camarades et les adultes, les enfants apprennent à restituer leurs déplacements et à en effectuer à partir de consignes orales comprises et mémorisées. Ils établissent les relations entre leurs déplacements et les représentations de ceux-ci.

Le passage aux représentations planes par le biais du dessin les amène à commencer à mettre intuitivement en relation des perceptions en trois dimensions et des codages en deux dimensions faisant appel à certaines formes géométriques (rectangles, carrés, triangles, cercles).
Les dessins, comme les textes présentés sur des pages ou des productions graphiques, initient les enfants à se repérer et à s'orienter dans un espace à deux dimensions, celui de la page mais aussi celui des cahiers et des livres.

• **Explorer des formes, des grandeurs, des suites organisées**

Très tôt, les jeunes enfants discernent intuitivement des formes (carré, triangle...) et des grandeurs (longueur, contenance, masse, aire...). A l'école maternelle, ils construisent des connaissances et des repères sur quelques formes et grandeurs. Ces connaissances qui resteront limitées constituent une approche de la géométrie et de la mesure qui seront enseignées aux cycles 2 et 3.
L'approche des formes planes, des objets de l'espace, des grandeurs, se fait par la perception visuelle, la manipulation et la coordination d'actions sur des objets. Cette approche est soutenue par le langage : il permet de décrire ces objets et ces actions et favorise l'identification de premières caractéristiques descriptives.
Très tôt, les enfants regroupent les objets, soit en fonction de leur aspect, soit en fonction de leur utilisation familière ou de leurs effets. À l'école, ils sont incités à "mettre ensemble ce qui va ensemble" pour comprendre que tout objet peut appartenir à plusieurs catégories et que certains objets ne peuvent pas appartenir à celles-ci.
Par des observations, des comparaisons, des tris, les enfants sont amenés à mieux distinguer différents types de critères : forme, longueur, masse, contenance essentiellement.
Ils apprennent progressivement à reconnaitre, distinguer, décrire des solides puis des formes planes. L'enseignant est attentif au fait que l'appréhension des formes planes est plus abstraite que celle des solides et que certains termes prêtent à confusion (carré/cube).
Ils commencent à appréhender la notion d'alignement qu'ils peuvent aussi expérimenter dans les séances d'activités physiques
L'enseignant utilise un vocabulaire précis : cube, boule, pyramide, cylindre, carré, rectangle, triangle, cercle ou disque (à préférer à "rond") que les enfants sont entrainés ainsi à comprendre d'abord puis

amenés progressivement à utiliser.
Dès la PS, les enfants sont invités à organiser des suites d'objets en fonction de critères de formes et de couleurs ; les premiers algorithmes qui leur sont proposés sont constitués d'alternances simples. En MS et GS, progressivement, ils sont amenés à :
- reconnaitre un rythme dans une suite organisée et à continuer cette suite ;
- inventer des "rythmes" de plus en plus compliqués ;
- compléter des manques dans une suite organisée.

• **Attendus de fin de cycle :**
Situer des objets par rapport à soi, entre eux, par rapport à des objets repères.
Se situer par rapport à d'autres, par rapport à des objets repères.
Dans un environnement bien connu, réaliser un trajet, un parcours à partir de sa représentation (dessin ou codage).
Classer des objets en fonction de caractéristiques liées à leur forme.
Reconnaitre quelques solides (cube, pyramide, boule, cylindre)
Savoir nommer quelques formes planes (carré, triangle, cercle ou disque, rectangle) et ce dans toutes leurs orientations et configurations.
Classer ou ranger des objets selon un critère de longueur ou de masse ou de contenance.
Reproduire un assemblage à partir d'un modèle (puzzle, pavage, assemblage de solides)
Reproduire, dessiner des formes planes.
Identifier une organisation régulière et poursuivre son application.

En élémentaire

Extraits des repères annuels de progression en mathématiques Eduscol
• **(Se) repérer et (se) déplacer en utilisant des repères et des représentations** L'élève situe, les uns par rapport aux autres, des objets ou des personnes qui se trouvent dans la classe ou dans l'école en utilisant un vocabulaire spatial précis : à gauche, à droite, sur, sous, entre, devant, derrière, au-dessus, en-dessous, près , loin , premier plan , second plan , nord , sud , est , ouest .
Les élèves représentent des lieux et se repèrent, décrivent ou codent et exécutent des déplacements se situant dans la classe en mode débranché (passage par le papier/crayon, par le corps en activité de motricité), puis dans l'environnement de l'école, dans le quartier proche puis dans un quartier étendu ou dans le village.
Dès le CP ils codent des déplacements à l'aide de logiciel de programmation adapté. Ils comprennent et produisent des algorithmes simples pour la programmation des déplacements d'un robot ou ceux d'un personnage sur un écran (par exemple une succession de flèches parmi : aller à gauche, aller à droite, tourner à gauche, tourner à droite). Ils continuent à jouer physiquement ces situations dans l'espace concret avec des propositions variées.
En cycle 3, les élèves apprennent à programmer les déplacements d'un personnage sur un écran en commençant par compléter de tels programmes puis en corrigeant des programmes erronés et enfin en créant eux-mêmes des programmes. Les instructions correspondent à des déplacements absolus (liés à l'environnement : "aller vers l'ouest", "aller vers la fenêtre") ou relatifs (liés au personnage : "tourner d'un quart de tour à gauche").

• **Reconnaître, nommer, décrire quelques solides et figures géométriques**
L'élève reconnaît, nomme, décrit des figures simples ou complexes (assemblages de figures simples) :
- triangles dont les triangles particuliers (triangle rectangle, triangle isocèle, triangle équilatéral) ;
- quadrilatères dont les quadrilatères particuliers (carré, rectangle, losange, première approche du parallélogramme) ;
- cercle (comme ensemble des points situés à une distance donnée d'un point donné), disque.
Il reconnaît, nomme, décrit des solides simples ou des assemblages de solides simples : cube, pavé droit, prisme droit, pyramide, cylindre, cône, boule.
Il reconnaît, parmi un ensemble de patrons et de faux patrons donnés, ceux qui correspondent à un solide donné : cube, pavé droit, pyramide.
Il connaît le vocabulaire associé aux objets et aux propriétés : côté, sommet, angle, diagonale, polygone, centre, rayon, diamètre, milieu, hauteur, solide, face, arête.

• **Reproduire, construire quelques solides et figures géométriques**
Il fabrique un cube à partir de carrés, de tiges que l'on peut assembler, d'un patron.
Il construit, pour un cube de dimension donnée, des patrons différents.
Il réalise, complète et rédige un programme de construction.
Il réalise une figure simple ou une figure composée de figures simples à l'aide d'un logiciel.
Il trace un carré, un rectangle ou un triangle rectangle de dimensions données, un cercle de rayon donné.

• **Symétrie axiale**
Il reconnaît si une figure présente un axe de symétrie : on conjecture visuellement l'axe à trouver et on valide cette conjecture en utilisant du papier calque, des découpages, des pliages.
Il complète une figure par symétrie axiale.
Il construit la figure symétrique d'une figure donnée par rapport à un axe donné que l'axe de symétrie coupe ou non la figure.
Il observe que deux points sont symétriques par rapport à une droite donnée lorsque le segment qui les joint coupe cette droite perpendiculairement en son milieu.
Il construit, à l'équerre et à la règle graduée, le symétrique par rapport à une droite d'un point, d'un segment, d'une figure.

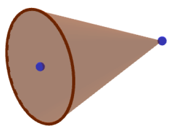
Les solides

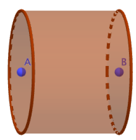
• **Définitions**.
Un **polyèdre** est un solide de l'espace délimité par un nombre fini de polygones, appelés les **faces** du polyèdre.
Cf Mémo aires, solides, volumes

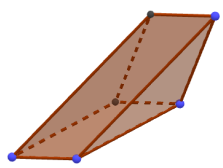
• **Représenter les solides.**
Pour représenter un solide de l'espace, on utilise généralement la **perspective cavalière** : technique de dessin permettant de représenter un solide sur une surface à deux dimensions en respectant le parallélisme, les égalités de longueur et en faisant apparaître toutes les faces. On peut aussi le représenter selon une vue spécifique : de face, dessus... ou bien selon une section par un plan particulier.

Représentation en perspective cavalière.

Il existe une infinité de représentations en perspective cavalière d'un solide. On essaie de représenter au mieux les caractéristiques du solide. Une des faces peut être représentée parallèle au plan de la feuille ou pas.



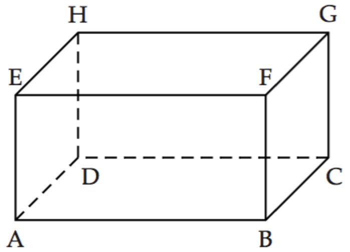




La représentation la plus utilisée du parallélépipède rectangle est celle avec une face dessinée en position prototypique (longueur horizontale, largeur verticale) :

1. On trace la face parallèle au plan de la représentation *en vraie grandeur* en position prototypique.
2. On trace les arêtes visibles des faces latérales en respectant un angle compris entre 30° et 60° avec l'horizontale : *elles sont parallèles et de même longueur* ; ce sont les fuyantes, plus courtes que leur mesure réelle.
3. On trace les arêtes visibles de la face du fond, elles sont *parallèles à celles de la face de devant.*
4. On fait apparaitre les arêtes cachées *en pointillés.*

Un principe toujours respecté dans une perspective cavalière : toutes les arêtes de même longueur et parallèles entre elles dans la réalité le restent sur la représentation.

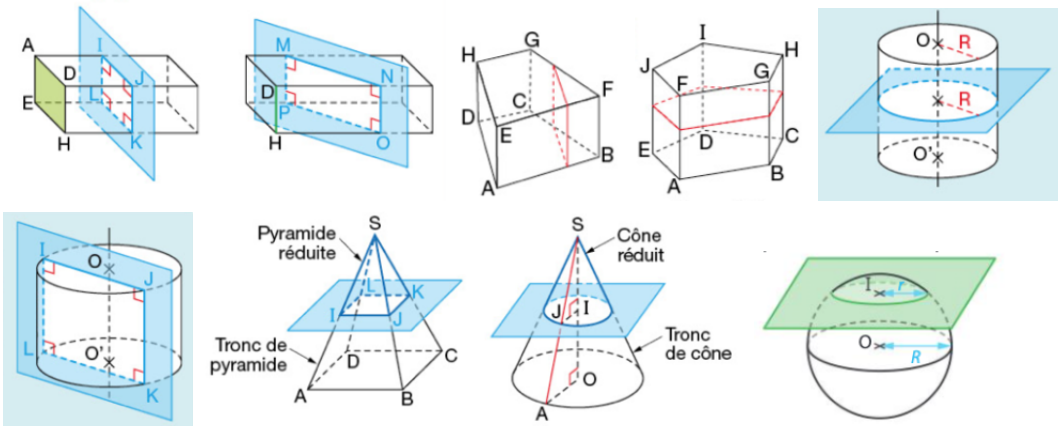


Ce parallélépipède rectangle possède :
— 8 sommets : A, B, C, D, E, F, G et H ;
— 12 arêtes : [AB], [BC], [AE], [BF], [EF], [FG], [CG], [EH] et [GH] apparentes, et [AD], [DC] et [DH] cachées ;
— 6 faces : ABFE est la face de devant, CDHG celle de derrière, ABCD la face du dessous, EFGH celle du dessus, BCGF la face de droite, et ADHE celle de gauche.

On le nomme en choisissant un sommet de départ puis les sommets d'une face contenant ce sommet dans un ordre (horaire ou anti-horaire) et enfin les sommets de la face parallèle en commençant par le sommet correspondant au premier et dans le même sens. ABCDEFGH ou BADCFEHG, etc.

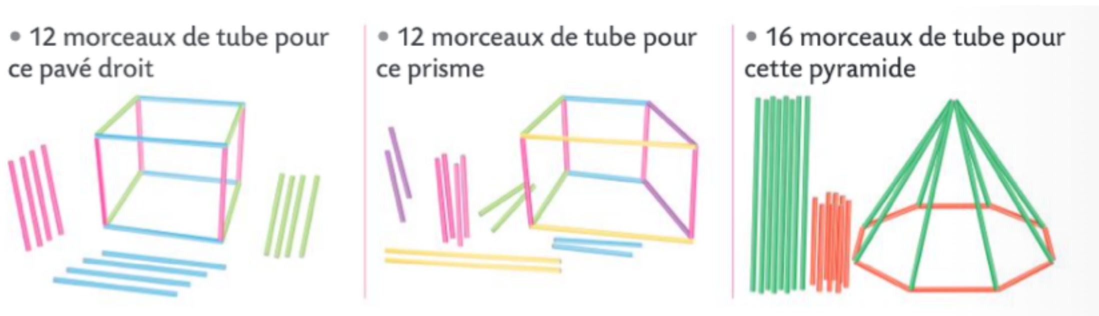
Représentations en vue.
Cf Mémo aires, solides, volumes

Représentations en coupe.



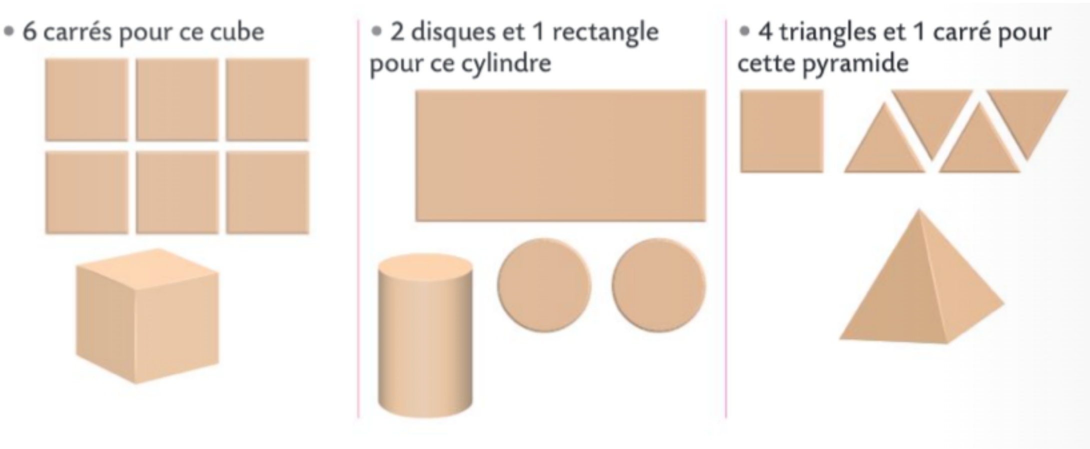
Réf : Manuel Cycle4 Mathsmonde Didier 2016 et Cycle4 Transmaths Nathan 2016

• Construire des solides. À partir des arêtes.



Réf : Manuel Cycle4 Mathsmonde Didier 2016

À partir de figures planes.



Réf : Manuel Cycle4 Mathsmonde Didier 2016

À partir d'un patron. *Cf Mémo aires, solides, volumes*

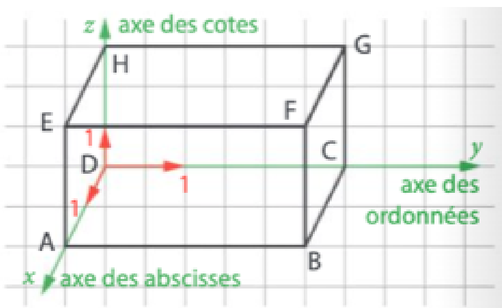
Repérage

• Dans un pavé droit.
Dans un parallélépipède rectangle, un repère est formé par trois arêtes ayant un sommet commun appelé origine du repère.

Vocabulaire : Tout point d'un pavé droit est repéré par trois nombres, ses coordonnées : **l'abscisse**, **l'ordonnée**, **l'altitude** (ou la côte).

Le repère tracé ci-contre est formé par les arêtes [DA], [DC] et [DH] ; on le note (D ; A ; C ; H) :
- D est l'origine du repère ;
- la droite (Dx) est l'axe des abscisses ;
- la droite (Dy) est l'axe des ordonnées ;
- la droite (Dz) est l'axe des altitudes ou côtes.

Les coordonnées de quelques points : D(0 ; 0 ; 0), A(2 ; 0 ; 0) et F(2 ; 3 ; 3).

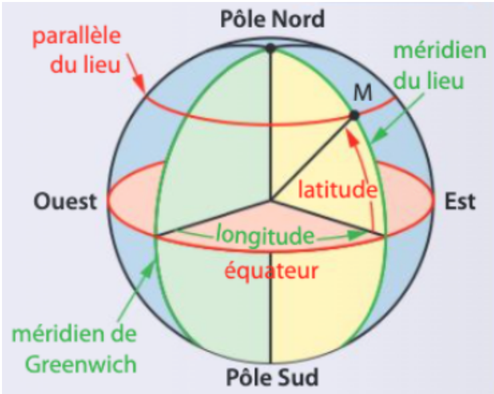


Réf : Manuel Cycle4 Indigo Hachette 2016

• Dans une sphère.
Si on assimile la Terre à une sphère, on peut repérer un point M à sa surface par deux coordonnées correspondant à des mesures d'angle : sa **latitude** (*presque comme altitude...*) et sa **longitude**.

On utilise :
- des **parallèles** qui sont des cercles dont les points ont la même latitude. Le parallèle de référence est l'équateur : ses points ont pour latitude 0°. La latitude est la mesure d'angle formé par rapport à l'équateur et orienté Nord (N) ou Sud (S). Elle prend ses valeurs entre 0° et 90°.

- des **méridiens** qui sont des demi-cercles passant par les pôles dont les points ont la même longitude. Le méridien d'origine est le méridien de Greenwich : ses points ont pour longitude 0°. La longitude est la mesure d'angle formé par rapport au méridien de Greenwich et orienté Est (E) ou Ouest (O). Elle prend ses valeurs entre 0° et 180°.



Réf : Manuel Cycle4 Indigo Hachette 2016

Les figures planes

• Les triangles

Définitions : Un triangle est **rectangle** s'il possède un angle droit.
Un triangle est **isocèle** s'il possède deux côtés de même longueur.
Un triangle est **équilatéral** s'il possède trois côtés de même longueur.

Propriétés : *Un triangle est isocèle si et seulement si :*
- Il possède deux angles de même mesure. *- Il possède un axe de symétrie.*

Un triangle est équilatéral si et seulement si :
- Il possède deux angles de 60°. *- Il possède deux (donc trois) axes de symétrie.*

Un triangle est rectangle si et seulement si deux de ses angles sont complémentaires (leur somme vaut 90°.).

Inégalité triangulaire
Pour tous points A, B, C du plan, $AB \leq AC + BC$.
Le cas d'égalité est obtenu pour C sur [AB].
Conséquence : *Si l'inégalité n'est pas vérifiée, le triangle ABC n'existe pas.*

Angles *La somme des angles d'un triangle vaut 180°.*

• Les quadrilatères

Somme des angles
Propriété : *La somme des mesures des angles d'un quadrilatère non croisé vaut 360°.*

Caractérisations des parallélogrammes
Définition : Un **parallélogramme** est un quadrilatère non croisé qui possède des côtés opposés parallèles deux à deux.

Propriétés : *Un quadrilatère non croisé est un parallélogramme si et seulement si*

a. *ses diagonales se coupent en leur milieu ;*
b. *il possède un centre de symétrie, le point d'intersection de ses diagonales ;*
c. *ses côtés opposés sont de même longueur deux à deux ;*
d. *ses angles opposés ont même mesure deux à deux ;*
e. *une paire de côtés opposés est parallèle et de même longueur.*

Parallélogrammes particuliers
- Un **losange** est un quadrilatère qui possède quatre côtés de même longueur.
- Un **rectangle** est un quadrilatère qui possède quatre angles droits (trois suffisent).
- Un **carré** est un quadrilatère qui possède quatre côtés de même longueur et quatre angle droit (c'est un rectangle et un losange).

Propriétés : *Un parallélogramme est un losange si et seulement si*

a. il possède deux côtés consécutifs de même longueur ;

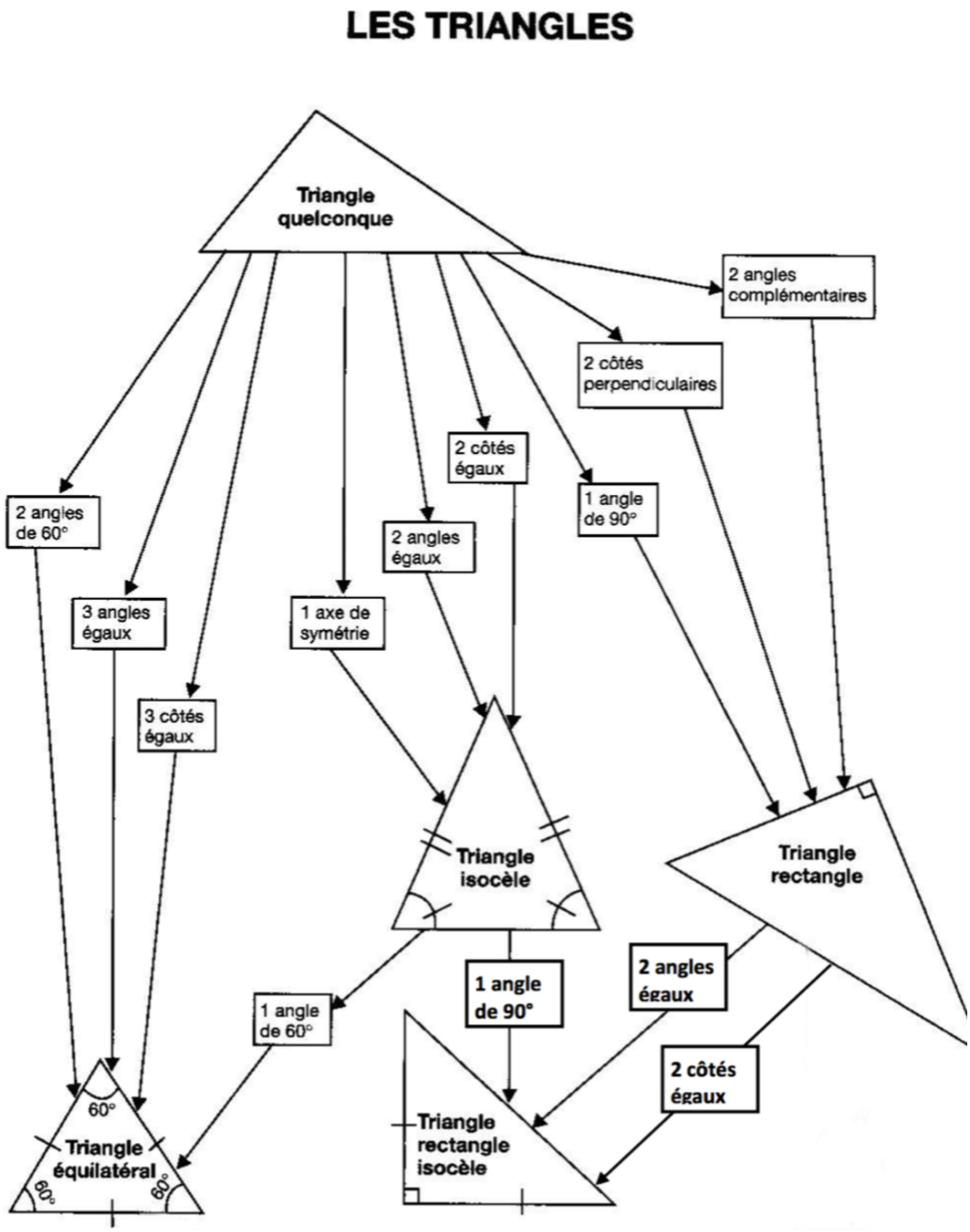
b. ses diagonales sont perpendiculaires.

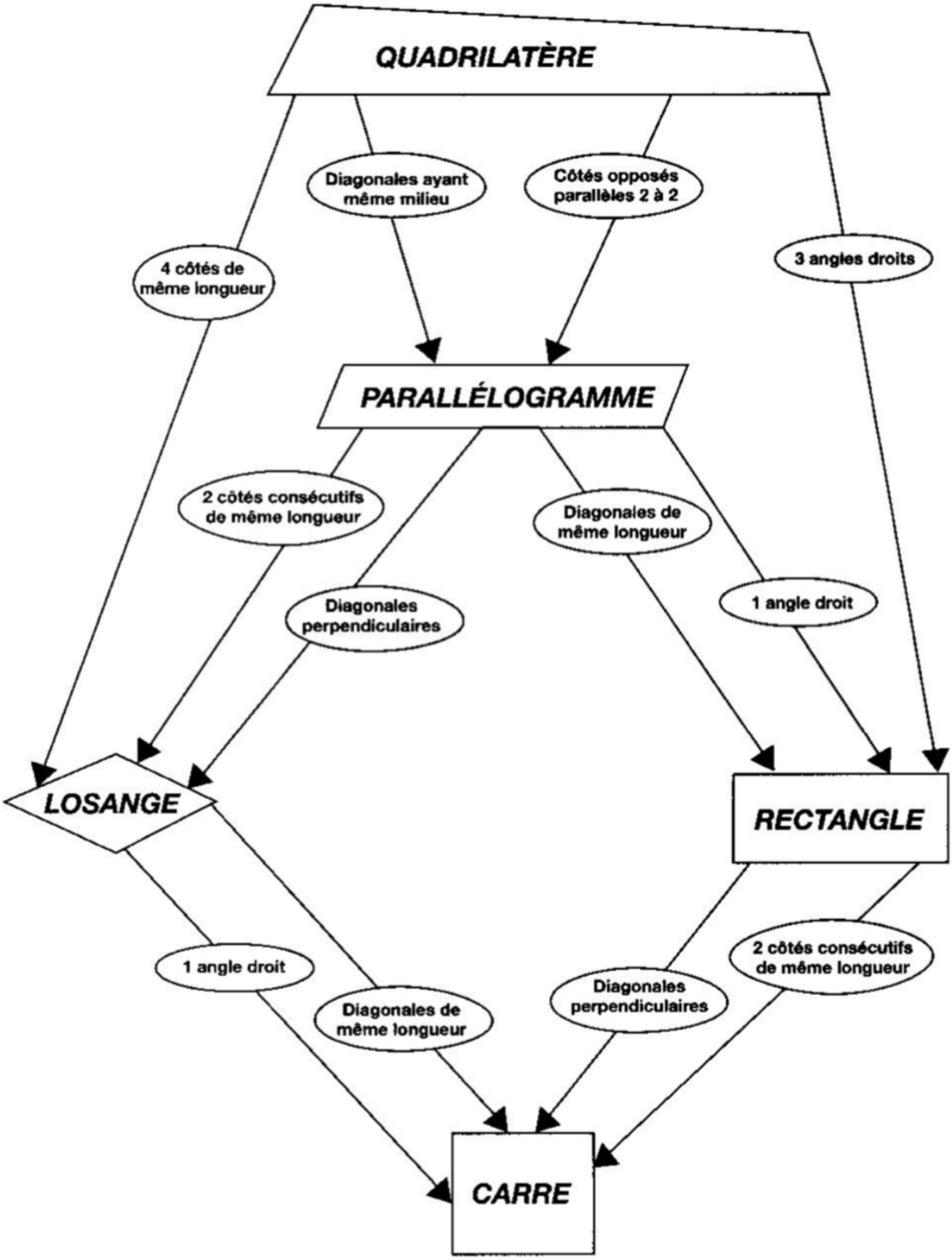
Un parallélogramme est un rectangle si et seulement si

a. il possède un angle droit ;

b. ses diagonales sont de même longueur.

Organigrammes récapitulatifs *de Michel Clément*




QUADRILATÈRE
Diagonales ayant même milieu
Côtés opposés parallèles 2 à 2
4 côtés de même longueur
3 angles droits
PARALLÉLOGRAMME
2 côtés consécutifs de même longueur
Diagonales de même longueur
Diagonales perpendiculaires
1 angle droit
LOSANGE
RECTANGLE
1 angle droit
Diagonales de même longueur
Diagonales perpendiculaires
2 côtés consécutifs de même longueur
CARRE

TD

Compétences :

— Reconnaître, nommer, décrire des solides ou des assemblages de solides simples (pavé droit, cube, prisme, cylindre, pyramide, cône, boule) ;

— Reproduire, construire et mettre en relation des représentations de ces solides (vues en perspective cavalière, de face, de dessus, sections planes, patrons, etc.) ;

— (Se) Repérer [...] dans un parallélépipède rectangle, sur une sphère ;

— Reconnaître, nommer, décrire, reproduire, construire quelques figures géométriques ;

— Connaître les propriétés caractéristiques des triangles et quadrilatères particuliers ;

— Reconnaître et utiliser les transformations du plan.

Exercice 1. *D'après CRPE2020 G1 Situation 3*
Dans une classe de grande section, un enseignant propose à un groupe d'élèves de retrouver l'image correspondant à la description qu'il énonce.

« Donnez-moi l'image où :
A) Le koala est devant la tour de cubes.
B) La princesse est derrière le cube.
C) Le koala est sur le cube.
D) Le koala est entre les deux tours de cubes.
E) Le koala est sous le pont de cubes. »

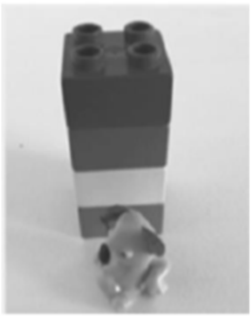
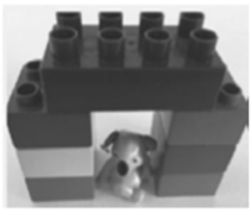
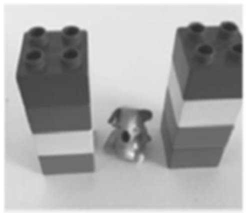
			

Image 1	**Image 2**	**Image 3**	**Image 4**
			
Image 5	**Image 6**	**Image 7**	**Image 8**

Le tableau ci-dessous répertorie les différentes réponses données par les élèves.

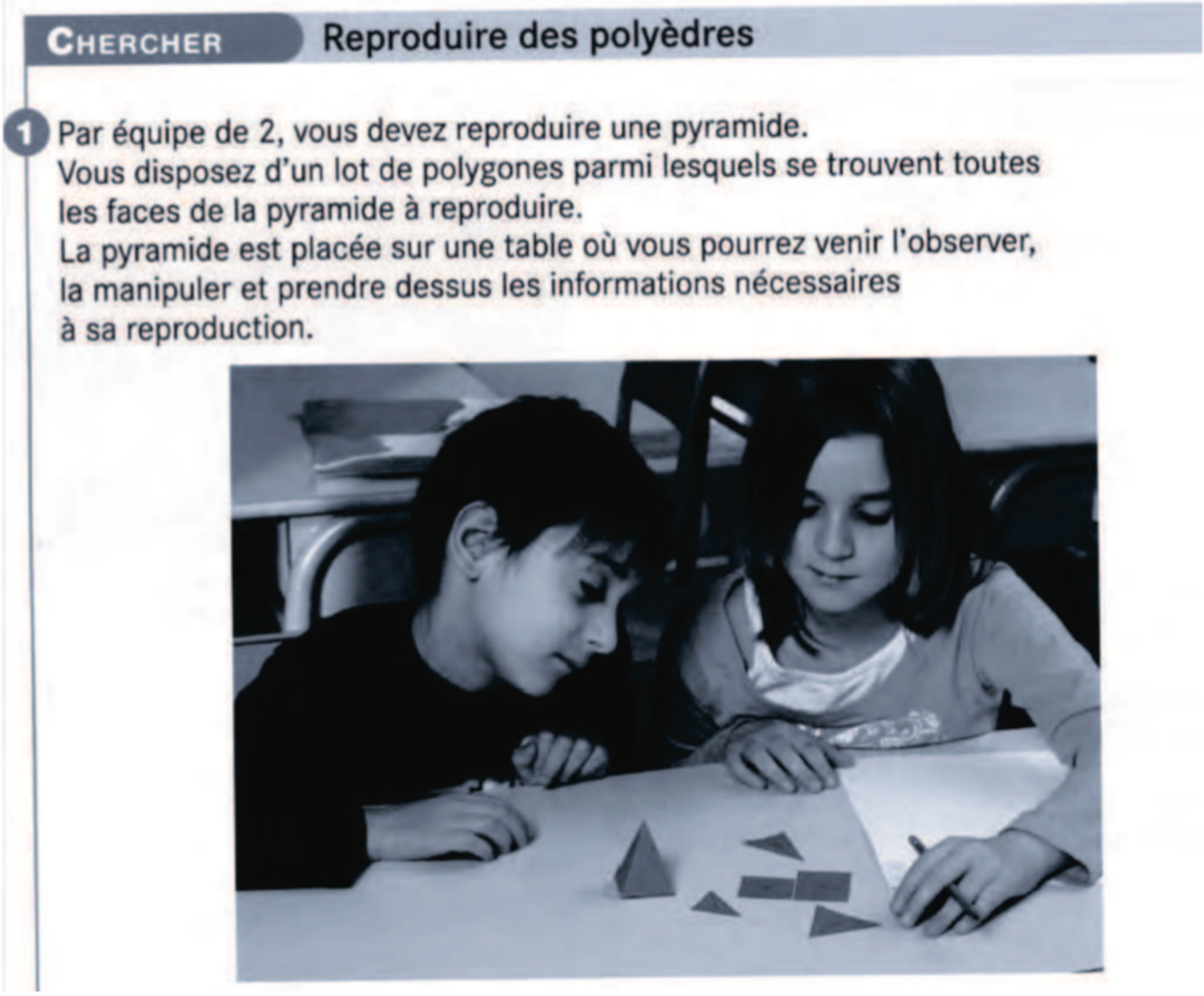
Affirmations proposées	Réponses des élèves
A) Le koala est devant la tour de cubes.	1 et 7
B) La princesse est derrière le cube.	5
C) Le koala est sur le cube.	6, 8 et 3
D) Le koala est entre les deux tours de cubes.	2 et 4
E) Le koala est sous le pont de cubes.	2 et 6

1. Donner un intérêt et une limite de cette situation.
2. Analyser chacune des réponses données aux affirmations C et E.
3. Tous les élèves de la classe ont réussi à donner l'image de l'assertion B. Que peut-on en conclure ?
4. Un élève fait correspondre l'image 7 à l'affirmation A en justifiant : « Le koala regarde la tour. Il est devant. ». L'enseignant propose la manipulation des objets considérés. Justifier le choix de l'enseignant.

Exercice 2. *D'après CRPE2015 Analyse d'une situation d'apprentissage CE2*
Dans l'énoncé du sujet, des extraits de programmes relatifs à la géométrie aux cycle 2 et 3 sont consultables.
Un professeur des écoles souhaite faire construire une maquette d'une réduction de la pyramide du Louvre à ses élèves de CE2.
Après avoir projeté une photographie de ce monument, il demande à ses élèves d'identifier le monument présenté ; il annonce ensuite que dans les jours qui suivent, plusieurs activités seront faites, et qu'elles aboutiront à la construction d'une maquette de cette pyramide par chacun des élèves.

1. La première activité prévue par l'enseignant est l'activité 1 ci-dessous. En quoi le problème posé permet-il de développer des compétences attendues dans les programmes de géométrie de cycle 3 ?

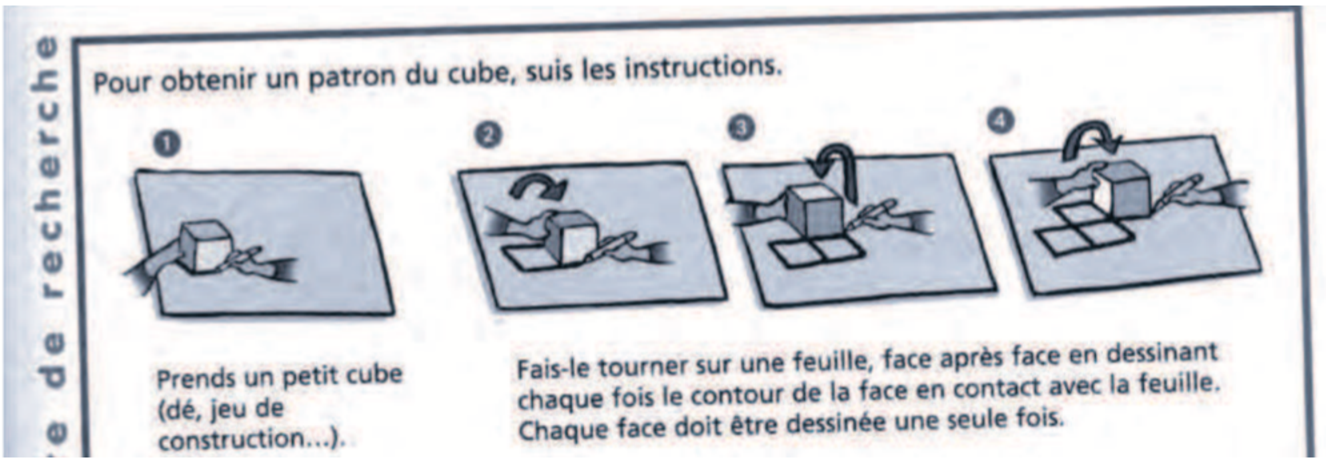
Activité 1 (Cap maths CE2, Hatier, 2011)



CHERCHER Reproduire des polyèdres

1 Par équipe de 2, vous devez reproduire une pyramide.
Vous disposez d'un lot de polygones parmi lesquels se trouvent toutes les faces de la pyramide à reproduire.
La pyramide est placée sur une table où vous pourrez venir l'observer, la manipuler et prendre dessus les informations nécessaires à sa reproduction.

2. La deuxième activité prévue par l'enseignant est une adaptation de l'activité 2 pour qu'elle ne fasse plus intervenir un cube, mais une pyramide à base carrée.
Activité 2 (Pour comprendre les mathématiques CE2, Hachette 2004)



e de recherche

Pour obtenir un patron du cube, suis les instructions.

1 Prends un petit cube (dé, jeu de construction...).

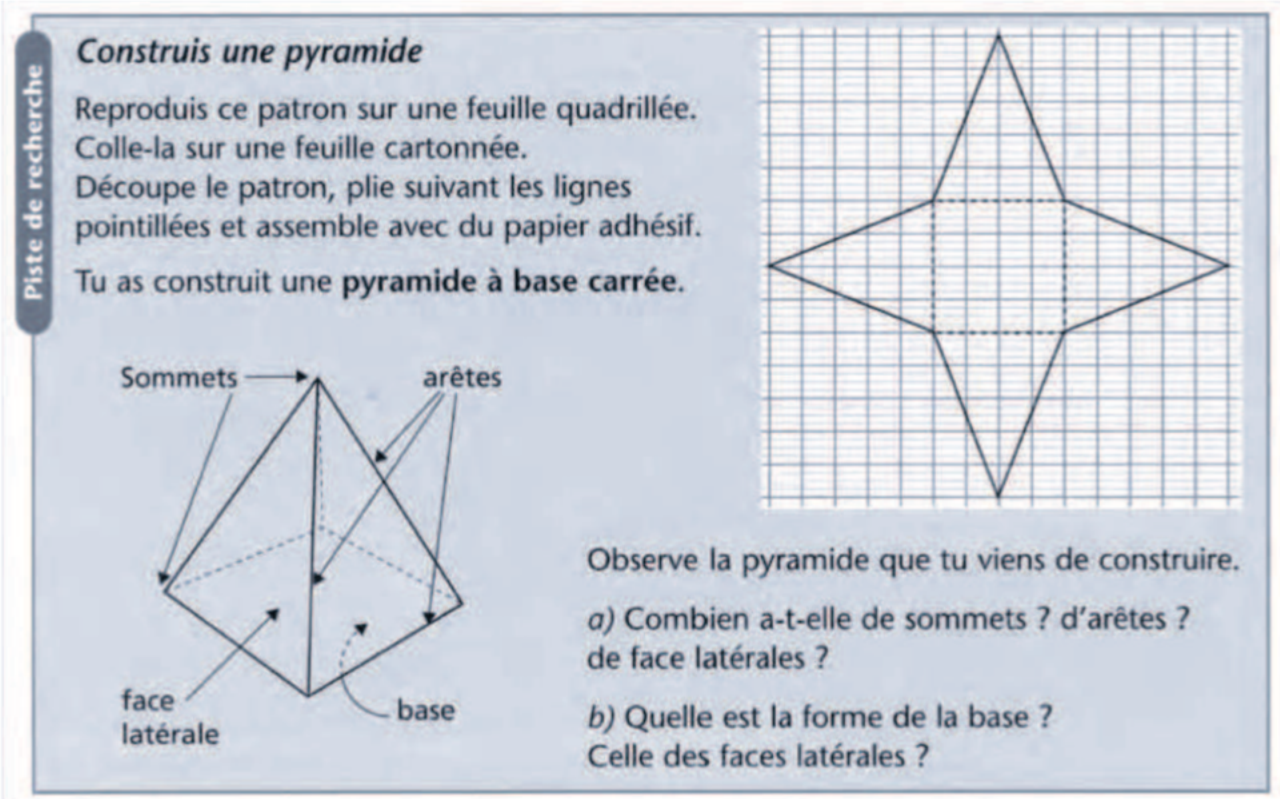
2 3 4 Fais-le tourner sur une feuille, face après face en dessinant chaque fois le contour de la face en contact avec la feuille. Chaque face doit être dessinée une seule fois.

(a) Dessiner à main levée trois patrons différents (corrects) d'une pyramide à base carrée qui pourraient être obtenus dans cette activité.

(b) Quel peut être l'objectif visé par le professeur des écoles en proposant cette activité ?

3. La troisième activité prévue par l'enseignant est une adaptation de l'activité 3 pour qu'elle permette aux élèves de disposer d'une réduction de la pyramide du Louvre à l'échelle 1 : 700. Les questions qui

suivent ont pour objet de construire le matériel qui sera fourni aux élèves.
Activité 3 (Pour comprendre les mathématiques CE2, Hachette 2004)


Piste de recherche

Construis une pyramide

Reproduis ce patron sur une feuille quadrillée.
Colle-la sur une feuille cartonnée.
Découpe le patron, plie suivant les lignes pointillées et assemble avec du papier adhésif.

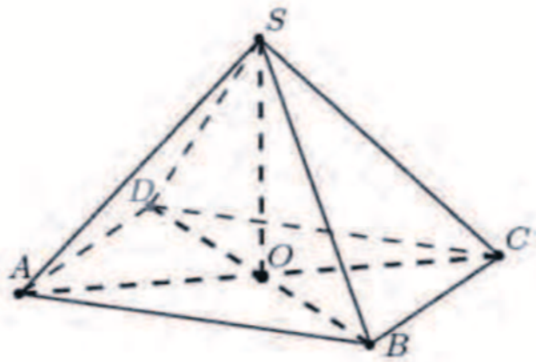
Tu as construit une **pyramide à base carrée.**

Observe la pyramide que tu viens de construire.

a) Combien a-t-elle de sommets ? d'arêtes ? de face latérales ?

b) Quelle est la forme de la base ? Celle des faces latérales ?

La description dont l'enseignant dispose est la suivante : « la pyramide du Louvre peut être considérée comme une pyramide régulière de 21 mètres de hauteur et de base carrée de 35 mètres de côté ».
Une représentation en perspective cavalière de la maquette qui va être construite est donnée ci-contre (pyramide régulière SABCD de centre O).

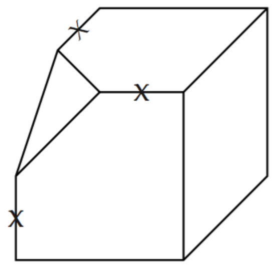


(a) Calculer les dimensions de la base et de la hauteur de la maquette. Exprimer les réponses en centimètres.

(b) Sans faire de nouveaux calculs, effectuer en vraie grandeur sur une feuille blanche les constructions suivantes (tous les instruments de géométrie sont autorisés ; aucune justification n'est demandée, mais les traits de construction devront rester apparents) :
- construction du carré ABCD ;
- construction du triangle SOA ; - construction d'un patron de la maquette de la pyramide.

Exercice 3. *D'après CRPE 2010 G2*
Dans une séquence sur les patrons de solides avec ses élèves de CM1, un enseignant met en oeuvre deux activités proposées dans l'ouvrage « Apprentissages géométriques et résolution de problèmes » (ERMEL, Hatier 2006).

1. **Première activité.**



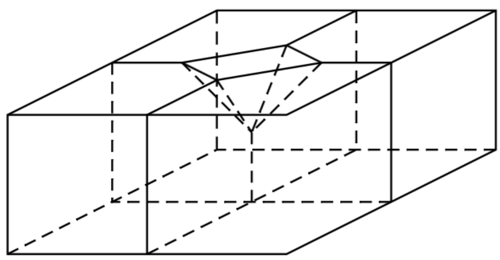
Description rapide de la séance : *« Les élèves doivent construire, dans un premier temps, des schémas correspondant au patron d'un solide non usuel : le cube tronqué (ci-contre). Les schémas font l'objet d'une mise en commun, les élèves doivent ensuite construire ce patron à l'aide de gabarits. »*

Objectifs de la séance : *« Amener les élèves à anticiper pour reconnaître si un assemblage de figures planes constitue ou non un patron. Ils doivent également reconnaître si deux patrons différents correspondent ou non à un même solide. »*
En début de séance, l'enseignant montre aux élèves le cube tronqué qu'il laissera visible par tous jusqu'à la fin du travail. La séance se déroule en deux phases.

Première phase : les élèves doivent dessiner à main levée des schémas correspondant à des patrons du cube tronqué présenté. Cette phase est suivie d'une mise en commun qui permet de mettre en évidence des caractéristiques que tout patron valide doit posséder.
(a) Citer trois caractéristiques parmi celles qui pourront ainsi être dégagées.

Deuxième phase : les élèves doivent construire effectivement un patron du cube tronqué.
(b) i. Lors de cette phase, l'enseignant fournit aux élèves des gabarits de différentes formes planes dont celles des faces du cube tronqué (chaque gabarit est en un seul exemplaire par élève). Donner deux arguments pouvant justifier ce choix.
ii. Certains élèves peuvent rencontrer des difficultés à réaliser le patron de ce solide.
Citer deux aides matérielles que l'enseignant peut leur fournir.

2. **Deuxième activité.**



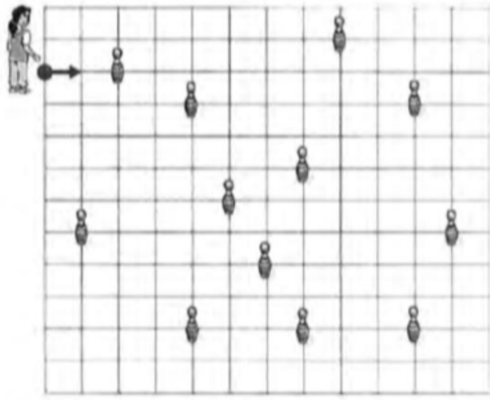
L'enseignant demande à ses élèves d'assembler par quatre les cubes tronqués construits précédemment (voir ci- dessous) et de réaliser le patron du solide qui permettra de « boucher le trou ».
(a) Quelle est la difficulté particulière de cette activité pour les élèves ?

(b) À l'issue de ces deux activités, l'enseignant fait une synthèse sur la notion de patron. Donner une formulation de la trace écrite qui pourrait être proposée aux élèves.

Exercice 4. *D'après CRPE 2017 G3*
Un enseignant propose l'exercice ci-dessous à des élèves de CM1.

En séance d'E.P.S., les élèves doivent se déplacer sur les lignes de ce quadrillage tracé au sol.
On estime que pour se déplacer sur le côté d'un carreau il faut 1 seconde.
Programme un parcours pour récolter le plus de quilles possible en sachant que l'épreuve sera arrêtée au bout de 20 secondes.
Combien de quilles as-tu ramassées ?

Doc. **Instructions de programmation**
- **av 1** (avancer pendant une seconde)
- **tg 90** (tourner à gauche d'un angle droit)
- **rq** (ramasser une quille)
- **av 2** (avancer pendant 2 secondes)
- **td 90** (tourner à droite d'un angle droit)



Exercice tiré de Graine de maths CM1, Nathan, 2016

1. Citer deux connaissances ou savoir-faire mathématiques nécessaires à la réussite de cet exercice.
2. Utiliser les deux productions d'élèves reproduites ci-après pour répondre aux questions ci-dessous.

av 2 ~~av~~ rq av 2 tg 90 av 1 rq av 2
tg 90 av 2 av 1 rq td 90 av 1 tg 90
av 2 rq td 90 av 2 tg 90 av 1 rq av 1
td 90 av 2 rq
J'ai ramassée 6 quilles.

Oriane

av 2 rq ~~td 90~~ tg 90 av 1 td 90 av 2 av 2 av 2 rq
av 2 rq ~~td 90~~ tg 90 ~~av 1 td 90~~ av 1 td 90 av 2 av 2 av 2 rq
av 2 1 tg 90 av 2 tg 90 av 4 rq
j'ai ramassé 5 quilles

Samuel

(a) Analyser chaque production en termes de réussites et d'erreurs.
(b) Proposer deux dispositifs de remédiation que l'enseignant pourrait mettre en œuvre à l'attention d'Oriane.

Exercice 5. *D'après CRPE2017 Analyse d'une situation d'apprentissage au cycle 3*
Vous trouverez à la fin de l'exercice une collection de six figures à partir de laquelle un enseignant propose le jeu du portrait suivant à ses élèves de CM2 :

> *« J'ai quatre sommets, Mes diagonales ne sont pas perpendiculaires, Mes côtés n'ont pas la même longueur, Je possède au moins un angle droit.*
> *QUI SUIS-JE ?*
> *Tu dois répondre par une lettre : figure ... »*

1. Quelle est la figure recherchée ? Vous expliciterez soigneusement votre démarche en indiquant ligne par ligne ce que le texte apporte (ou pas) comme informations.

2. Est-il possible de supprimer une ligne (ou une phrase) dans ce jeu du portrait ? Si oui, laquelle ou lesquelles ? Justifier votre réponse par une propriété mathématique.

3. Relever deux difficultés liées à la formulation des phrases utilisées dans ce jeu du portrait.

4. Expliciter trois compétences que peuvent mobiliser les élèves lors de la mise en œuvre de cette activité.

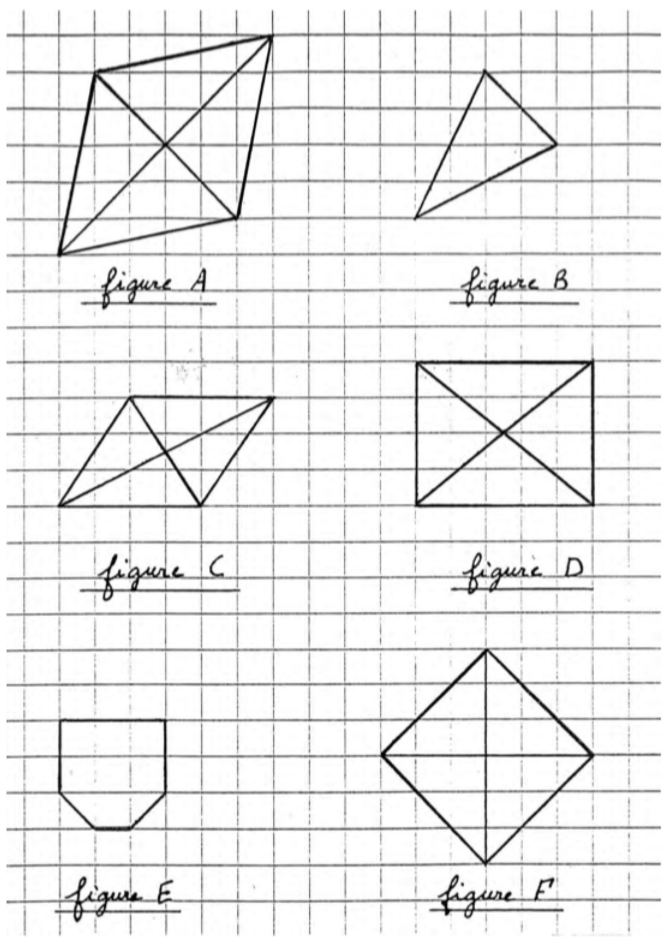
5. Les figures sont présentées sur un support quadrillé. Donner un exemple qui illustre comment ce support peut faciliter les procédures des élèves et un exemple qui montre au contraire que ce support peut être source de difficulté.

Un peu plus tard dans l'année, l'enseignant présente toujours la même collection de figures (voir annexe) en demandant cette fois de répondre par VRAI ou FAUX à chacune des affirmations suivantes :

a) La figure A est un losange.
b) La figure B est un triangle isocèle.
c) La figure C possède un axe de symétrie.
d) La figure D est un rectangle.
e) La figure F est un carré.
f) Toutes ces figures sont des polygones.

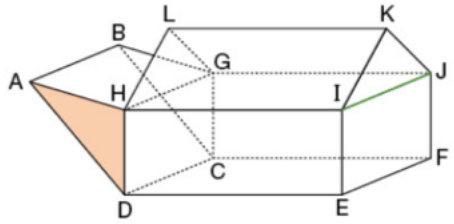
6. Quelle(s) différence(s) principale(s) voyez-vous, en termes de savoirs visés, entre cette activité et celle du jeu du portrait ?

7. Justifier pourquoi ce questionnaire a lieu après le jeu du portrait.



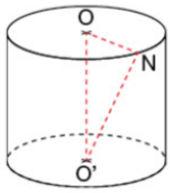
Les exercices 6 à 22 sont tirés du manuel Cycle4 Transmaths Nathan 2016.

Exercice 6. Le solide ci-dessous est constitué de deux prismes droits à base triangulaire et d'un parallélépipède rectangle.



1. Citer toutes les faces parallèles à la face colorée en orange.
2. Citer toutes les arêtes parallèles à l'arête verte.
3. Citer toutes les arêtes perpendiculaires à l'arête verte.

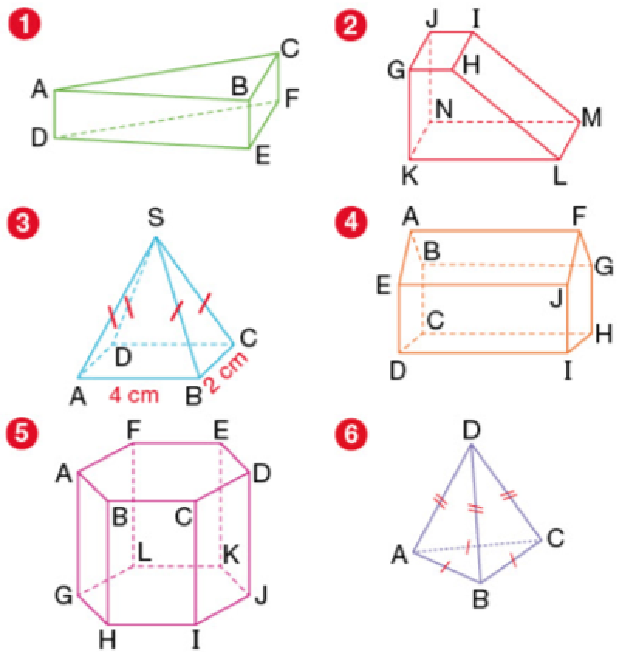
Exercice 7. Cette figure représente un cylindre de révolution de rayon 2 cm et de hauteur 3 cm. O et O' sont les centres des disques de base.



N est un point de la base de centre O, situé à 2 cm de O.

1. Quelle est la nature du triangle ONO' ?
2. Dessiner en vraie grandeur ce triangle.

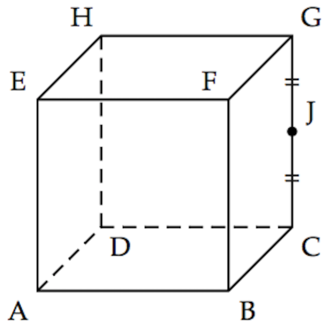
Exercice 8. Reconnaître les prismes droits et les pyramides régulières parmi les solides représentés, puis indiquer la nature de leurs bases.



Exercice 9.

1. Un prisme droit possède 20 sommets. Combien a-t-il de faces et d'arêtes ?
2. Un prisme droit possède 8 arêtes latérales. Combien a-t-il d'arêtes au total ? De faces ? De sommets ?

Exercice 10. La figure ci-dessous représente un cube. Compléter le tableau. Pour la dernière ligne, on nommera un triangle autre que ceux déjà cités.



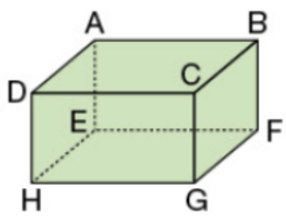
Triangle	Rectangle ?	Isocèle ?	Équilatéral ?
DJH	•	•	•
ACG	•	•	•
AFC	•	•	•
EHG	•	•	•
•	oui	non	non

Exercice 11. Reproduire trois fois cette figure.

Compléter les figures pour obtenir les représentations en perspective cavalière :

1. d'un parallélépipède rectangle,
2. de deux prismes droits différents à base triangulaire.

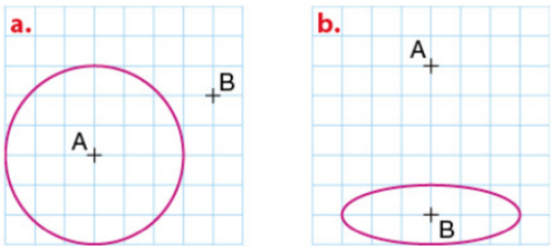
Exercice 12. Reproduire cette représentation en perspective cavalière d'un parallélépipède rectangle.



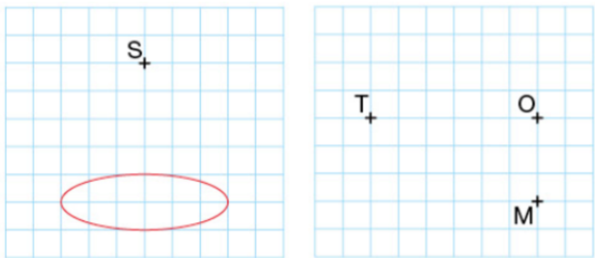
1. Représenter en perspective la pyramide BEFGH.
2. Citer son sommet, sa base, sa hauteur.

Exercice 13. Reproduire chaque figure et la compléter pour obtenir une représentation en perspective cavalière du solide indiqué.

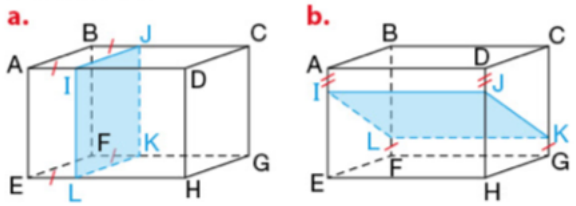
1. Un cylindre de révolution dont les bases ont pour centres A et B.



2. Un cône de révolution :
a. de sommet S et de base le disque représenté.
b. de sommet T et de base le disque de rayon OM.

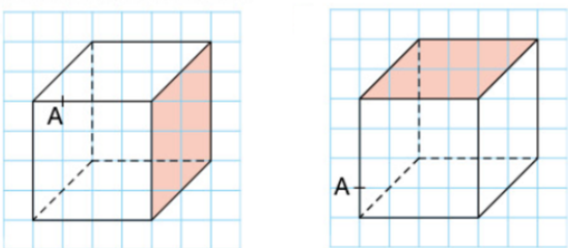


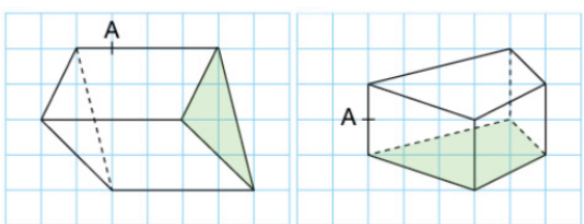
Exercice 14. Dans chaque cas, le rectangle coloré en bleu est la section par un plan du parallélépipède rectangle ABCDEFGH. Indiquer une face ou une arête à laquelle ce plan est parallèle.

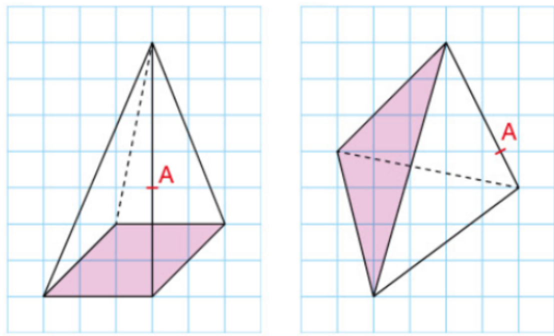


Exercice 15. Dans chaque cas tracer la section du solide par le plan ... :

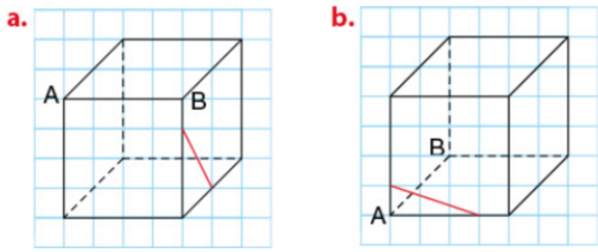
1. ... passant par A et parallèle à la face colorée.





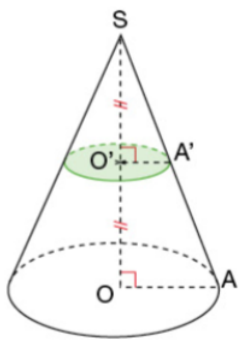


2. ... parallèle à l'arête [AB] et qui contient le segment rouge.



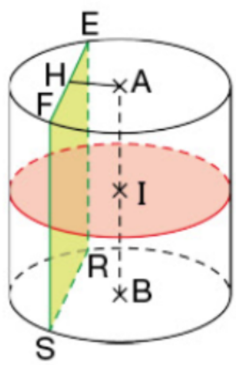
Exercice 16. Un cône de révolution a été sectionné par un plan parallèle à sa base. La section est tracée en vert.

1. Quelle est la nature de cette section ?
2. On donne OA = 5 cm. Calculer O'A', puis représenter la section en vraie grandeur.
3. Calculer les volumes des deux cônes de sommet S.

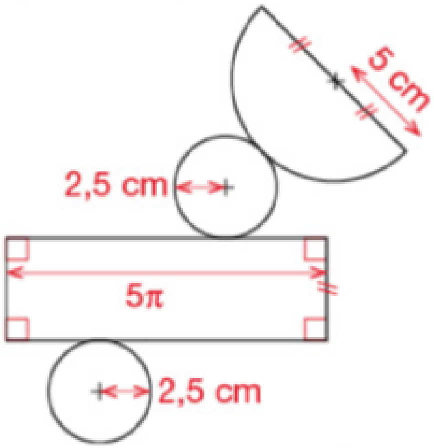


Exercice 17. On a coupé par deux plans ce cylindre dont les bases sont deux disques de centres A et B ; les sections sont représentées, l'une en rose, l'autre en vert. H est le milieu de [EF] et : AH = 3 cm, AB = 8 cm, AE = 5 cm.

1. Donner la description de chacun des deux plans.
2. Construire en vraie grandeur la section rose, le triangle AEF puis la section verte.
3. Calculer le volume du grand cylindre.

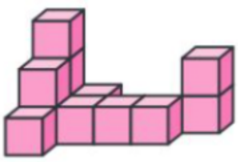


Exercice 18. Voici le plan d'un patron de solide. Représenter ce solide en perspective cavalière.

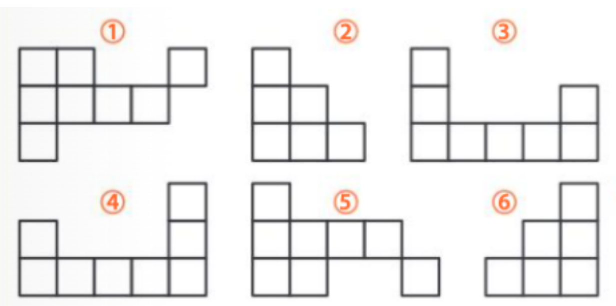


Exercice 19. Pour le carnaval, Noé veut fabriquer un chapeau de clown conique pour sa poupée. Pour cela, il mesure son tour de tête : 21 cm. La génératrice du cône mesure 10 cm. Construire le développement (patron) du chapeau.

Exercice 20. *D'après Manuels Cycle4 Indigo Hachette 2016*
Voici un solide constitué de cubes empilés.

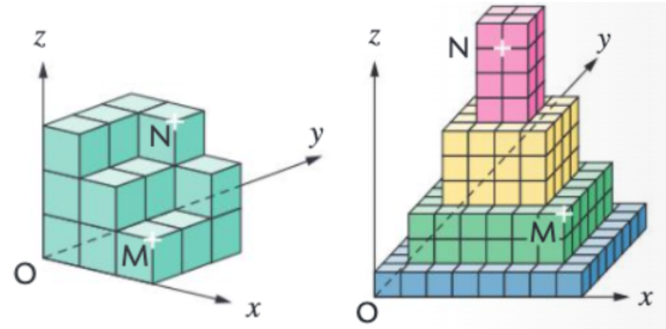


Parmi les différentes vues ci-dessous, retrouver la vue de dessous, celle de derrière et celle de droite.

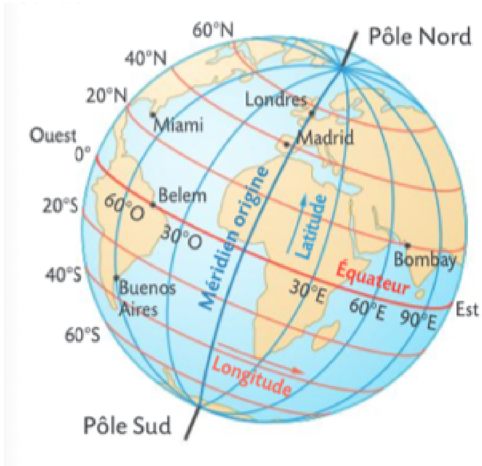


Exercice 21. *D'après Manuels Cycle4 Maths-monde Didier 2016*
Un fin ruban de couleur est collé sur un cube transparent, comme sur la figure ci-contre. Lesquels des dessins ci-dessous peuvent être une vue de ce cube ?

Exercice 22. *D'après Manuels Cycle4 Maths-monde Didier 2016*
L'unité est la longueur d'une arête d'un cube. Repérer les points M et N dans chaque cas.



Exercice 23. *D'après Manuels Cycle4 Maths-monde Didier et Transmaths Nathan 2016*



1. Quelles sont environ les coordonnées géographiques de Londres, Miami, Buenos Aires et Bombay ?

2. Un navigateur a disparu. Sa dernière position était (5° E ;0°).
Dans quelle région se trouve-t-il ?

3. Les coordonnées précises de Paris sont 2,34° E et 48,84° N. Quelles sont les coordonnées géographiques du point diamétralement opposé à Paris (aux antipodes de Paris) ?

Exercice 24. *D'après Transmaths 6ème*

1. Construire un triangle DEF tel que DE = 6 cm, DF = 4 cm, EF = 5 cm.

2. Avec la règle non graduée et l'équerre, construire le parallélogramme DEFG.

Exercice 25. Vrai/Faux *D'après CRPE*
Justifier les réponses.

1. **Affirmation 1** : Un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires est un losange.

2. Quatre points distincts A, B, C et D sont sur un cercle de centre O.
Affirmation 2 : Le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

3. **Affirmation 3** : Un quadrilatère qui possède trois côtés de même longueur et un angle droit est un carré.

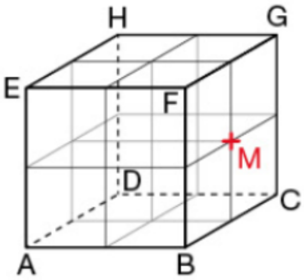
4. ABCD est un quadrilatère ayant ses diagonales perpendiculaires et de même milieu.
Affirmation 4 : ABCD est un carré.

Exercices supplémentaires

Exercice 26. *D'après Manuels Cycle4 Transmaths Nathan 2016*

Voici un cube. Lire les coordonnées du point M dans le repère :

1. (A,B,D,E)
2. (C,B,D,G)
3. (D,C,A,H)



Exercice 27. Représenter un cube ABCDEFGH en perspective cavalière (comme dans l'ex précédent). Utiliser le repère (D,A,C,H).

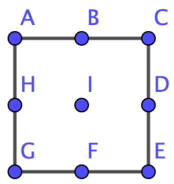
1. Colorer en vert l'ensemble des points du cube dont l'abscisse est égale à 0.

2. Colorer en rouge l'ensemble des points du cube dont l'abscisse et l'ordonnée sont égales à 1.

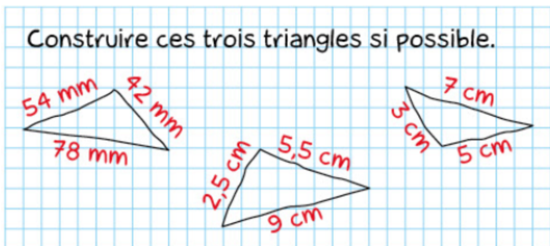
3. Colorer en bleu l'ensemble des points à l'intérieur du cube qui ont à la fois 0,5 pour ordonnée et 0,5 pour altitude.

Exercice 28. Vrai/Faux *Justifier les réponses.*

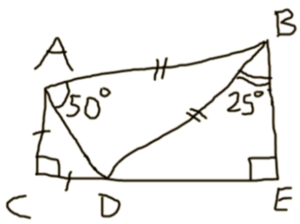
1. *D'après CRPE* On considère une configuration de 9 points ainsi constituée : les sommets d'un carré, les milieux des côtés de ce carré et le centre de ce carré.
On veut tracer tous les cercles ayant pour centre un de ces neuf points et passant par au moins un autre de ces 9 points.
Affirmation 1 : Le nombre de cercles que l'on peut tracer est 38.



2. *D'après Transmaths Cycle 4*
Voici ci-dessous un extrait du cahier de texte de Lucie.
Affirmation 2 : Elle peut construire ces trois triangles.

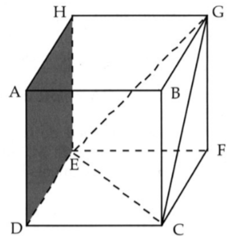


3. *D'après CRPE*
Soit la figure ci-contre faite à main levée.
Affirmation 3 : Les points C, D et E sont alignés.



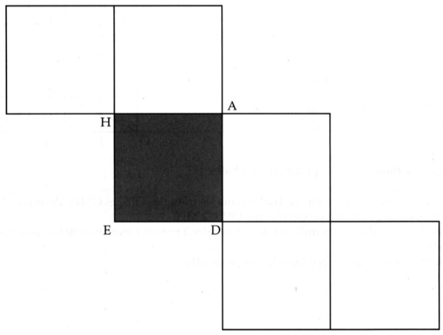
4. *D'après CRPE*
Affirmation 4 : La somme des angles d'un pentagone convexe est égale à 540°

Exercice 29. *D'après Sujets d'examen COPIRELEM 2014*



On considère un cube ABCDEFGH, dont les arêtes ont pour longueur a . Il est représenté ci-contre en perspective cavalière.

1. Quelle est la nature du triangle EGC ? Justifier.
2. Quelle est la nature du solide ECGF ?
3. Quel est le volume du solide ECGF ?
4. La figure ci-dessous est un patron de ce cube. A partir de ce dernier, construire le patron du solide S obtenu par retrait du solide ECGF au cube.
5. Quel est le volume du solide S



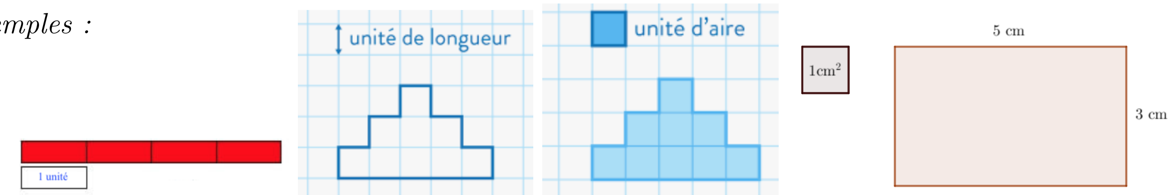
Thème A | Aires, solides, volumes

• Aires des figures usuelles

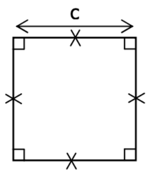
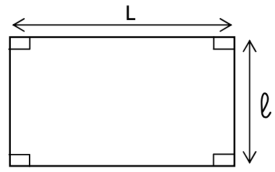
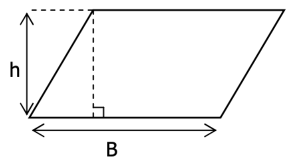
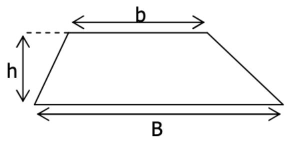
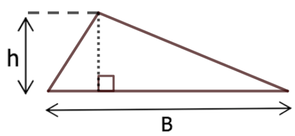
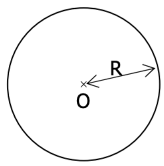
— Les grandeurs associées à **l'aire** (mesure de la surface contenue à l'intérieur de la figure) sont proportionnelles au **carré des longueurs**.

— Les longueurs en jeu dans chaque formule doivent être **dans la même unité**. Le **choix de l'unité** dans les calculs est donc très important et peut varier d'une bande arbitraire, à la longueur de côté ou de diagonale d'un carreau, au centimètre ou mètre... Une fois l'unité fixée, c'est elle qui sert pour toutes les longueurs.

Exemples :

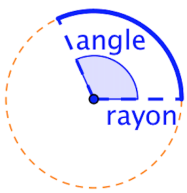


— **Formulaire des périmètres et aires usuels**

Le carré	**Le rectangle**	**Le parallélogramme**
 Périmètre $= 4 \times c$ Aire $= c^2$	 Périmètre $= 2 \times (L + l) = 2L + 2l$ Aire $= L \times l$	 Aire $= B \times h$
Le trapèze	**Le triangle**	**Le cercle**
 Aire $= \dfrac{(B+b) \times h}{2}$	 Aire $= \dfrac{B \times h}{2}$	 Périmètre du cercle $= 2 \times \pi \times R$ Aire du disque $= \pi \times R^2$

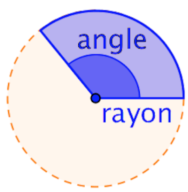
— **Cercle et angles :** L'**angle** est une grandeur qui rend compte **d'une fraction de tour autour d'un point fixé**. Sa mesure (en degré) varie entre 0° et 360° et est proportionnelle à la longueur de l'arc de cercle qui lui correspond.

L'arc de cercle



Longueur de l'arc $= \dfrac{angle}{360} \times 2\pi \times R$

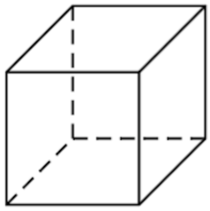
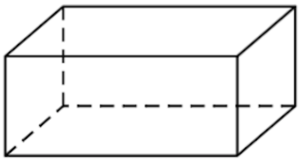
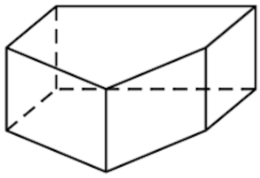
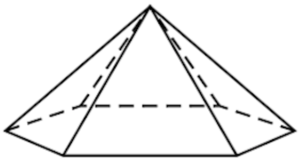
Le secteur de disque



Aire du secteur $= \dfrac{angle}{360} \times \pi \times R^2$

• **Définitions des solides particuliers**.

— Un **polyèdre** est un solide de l'espace délimité par un nombre fini de polygones, appelés les **faces** du polyèdre.

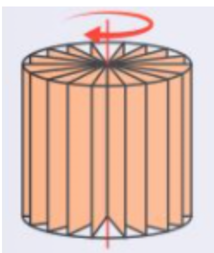
nom	représentation	propriétés
cube		un cube est un polyèdre possédant 6 faces qui sont des carrés.
pavé		un pavé, ou parallélépipède rectangle est un polyèdre possédant 6 faces qui sont des rectangles.
prisme		un prisme est un polyèdre possédant deux faces polygonales parallèles et isométriques, les autres étant des rectangles.
pyramide		une pyramide est un polyèdre dont la base est un polygone et dont toutes les autres faces sont des triangles ayant un sommet commun appelé sommet de la pyramide.

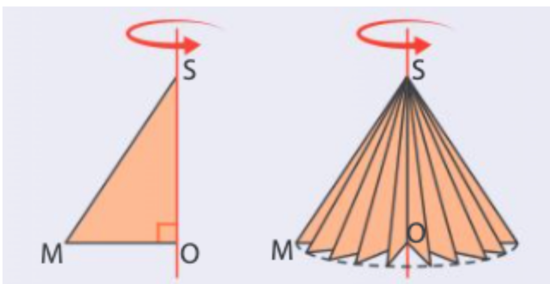
— Un **solide de révolution** est engendré par la rotation d'une figure autour d'un axe (généralement, un de ses côtés).

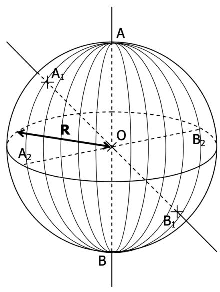
(a) Un **cylindre de révolution** est engendré par la rotation d'un rectangle. Il possède deux faces parallèles en forme de disque de même rayon et une surface latérale.

(b) Un **cône de révolution** est engendré par la rotation d'un triangle rectangle autour d'un des côtés adjacents à l'angle droit. Il possède une base en forme de disque et une surface latérale.

(c) Une **sphère** est engendrée par la rotation d'un (demi-) cercle autour d'un de ses diamètres. C'est l'ensemble de tous les points de l'espace situés à la même distance, appelée le **rayon**, d'un point de l'espace, appelé le **centre**.

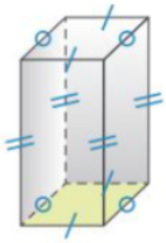
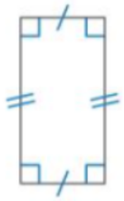
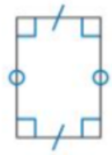
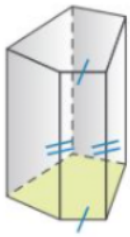
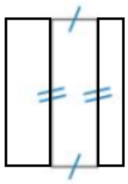
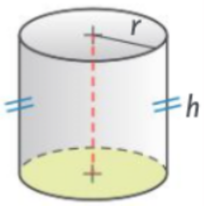
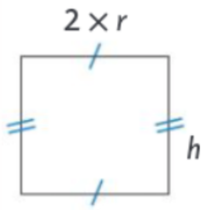
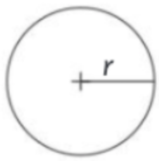
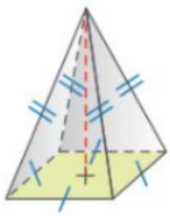
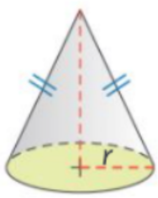
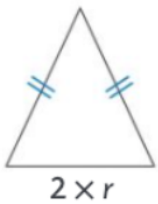
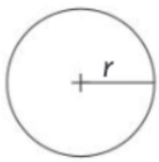
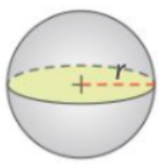
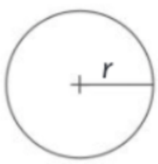
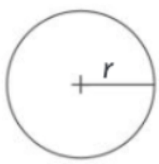






Réf : Manuel Cycle4 Indigo Hachette

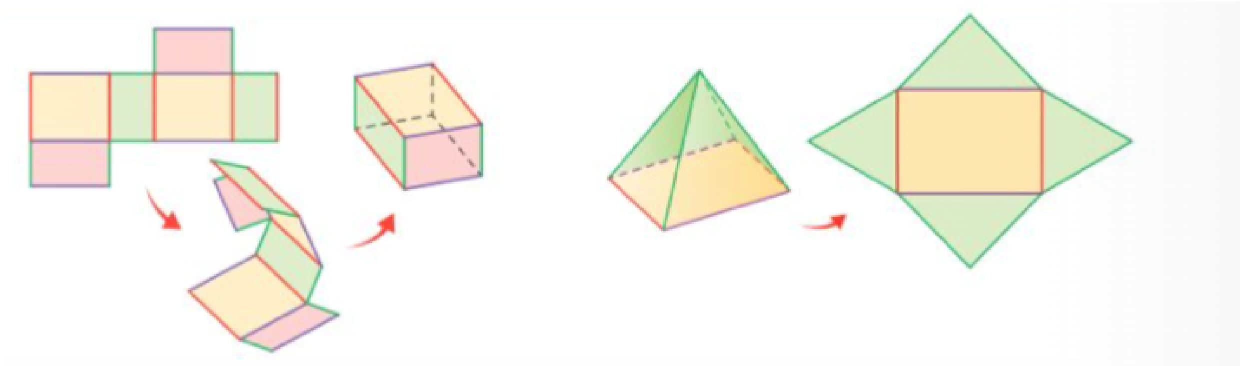
• **Représentations en vue.**

	Vue en perspective	Vue de face	Vue de dessus
Parallélépipède rectangle			
Prisme à base pentagonale			
Cylindre de révolution			
Pyramide à base carrée			
Cône de révolution			
Sphère			

Réf : Manuel Cycle4 Mathsmonde Didier 2016 et Cycle4 Transmaths Nathan 2016

• **Construire les solides à partir d'un patron.**

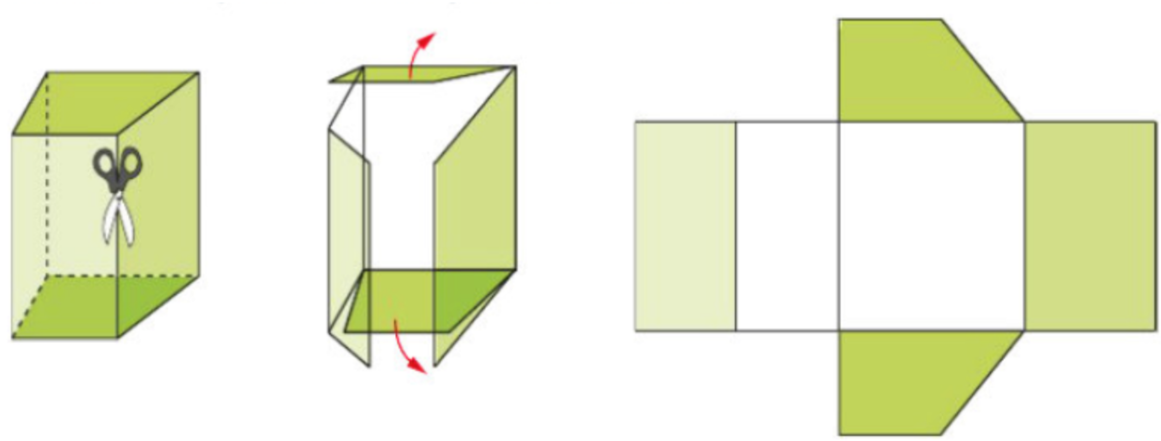
Le **patron** d'un solide est une surface plane d'un seul tenant qui, par pliage, permet de reconstituer le solide sans recouvrement de ses faces (2D à 3D) ou la surface plane obtenue par découpage d'un solide suivant quelques arêtes (pour les polyèdres) et qu'on déplie pour le mettre à plat (3D à 2D).



Réf : Manuel Cycle4 Mathsmonde Didier 2016

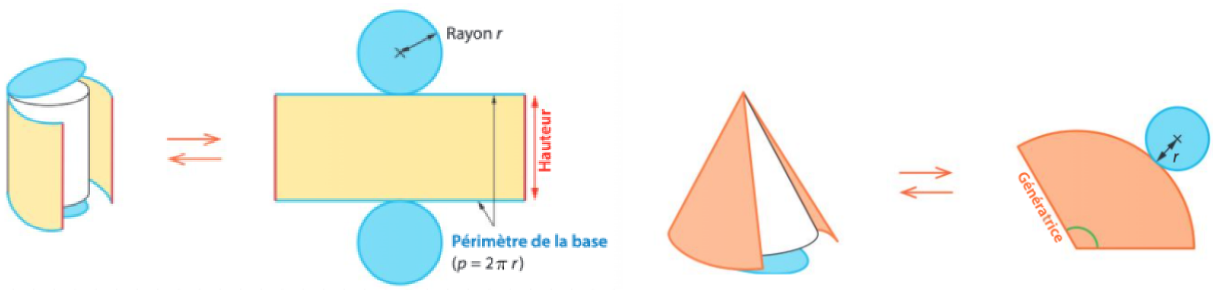
Remarque. On « déplie » le solide pour en obtenir un de ses patrons. Le patron d'un solide n'est pas unique, il dépend de la manière dont on le découpe et le déplie. Il n'existe aucun patron de la sphère.

Patrons d'un prisme :



Réf : Manuel 5ème Myriade Bordas

Patrons du cylindre et du cône :



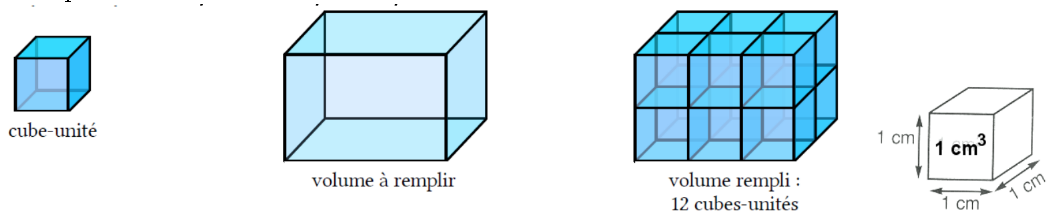
Réf : Manuel Cycle4 Indigo Hachette 2016

• Volume des solides particuliers

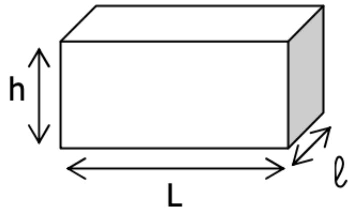
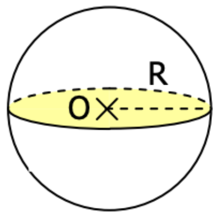
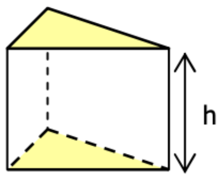
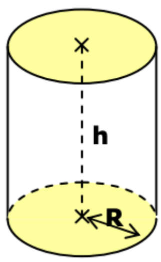
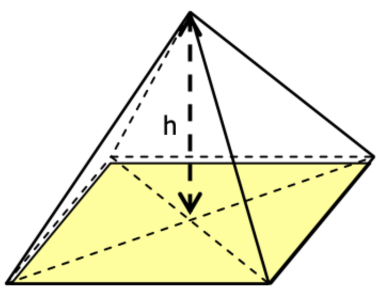
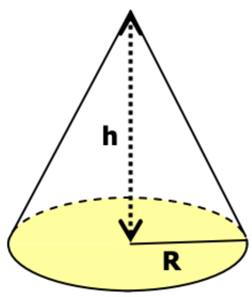
— Les grandeurs associées au **volume** (mesure de l'espace qu'occupe un solide) ou à la **capacité** (mesure de l'espace contenue dans un solide) — volume et capacité sont souvent assimilés — sont proportionnelles au **cube des longueurs**.

— Les longueurs en jeu dans chaque formule doivent être dans la même unité.

Exemples :



— **Formulaire des volumes usuels**

Le pavé droit/le cube	**La sphère/la boule**
 Volume $= L \times l \times h$ Volume du cube $= c^3$	 Volume de la boule $= \frac{4}{3} \times \pi R^3$
Le prisme	**Le cylindre**
 Volume $=$ Aire de la base $\times h$	 Volume $= \pi R^2 \times h$
La pyramide	**Le cône**
 Volume $= \dfrac{\text{Aire de la base} \times h}{3}$	 Volume $= \dfrac{\pi R^2 \times h}{3}$

— Remarque : l'aire de la sphère est donnée par la formule : Aire de la sphère $= 4\pi \times R^2$.