

Invariants spectraux et morphisme de Seidel (avec applications)

Rémi Leclercq

11 décembre 2018

Laboratoire de Mathématiques d'Orsay

Propriétés de rigidité de trucs symplectiques grâce à des techniques dures

Rémi Leclercq

11 décembre 2018

Laboratoire de Mathématiques d'Orsay

Des trucs symplectiques

Les objets

- Variété symplectique (M, ω) (ex. surface + forme volume)
i.e. ω 2-forme fermée non-dégénérée

Les objets

- Variété symplectique (M, ω) (ex. surface + forme volume)
i.e. ω 2-forme fermée non-dégénérée
- Le groupe des **symplectomorphismes** $\text{Symp}(M, \omega)$
i.e. $\varphi \in \text{Diff}(M)$ tel que $\varphi^* \omega = \omega$

Les objets

- Variété symplectique (M, ω) (ex. surface + forme volume)
i.e. ω 2-forme fermée non-dégénérée
- Le groupe des symplectomorphismes $\text{Symp}(M, \omega)$
i.e. $\varphi \in \text{Diff}(M)$ tel que $\varphi^* \omega = \omega$
- Le sous-groupe des **difféomorphismes hamiltoniens**
 $\text{Ham}(M, \omega)$ i.e. ϕ_H^1 engendré par $H: [0, 1] \times M \rightarrow \mathbb{R}$
($H \rightsquigarrow X_H$ tel que $-dH_t = \omega(X_H, \cdot)$ et $X_H \rightsquigarrow (\phi_H^t)_t$)

Les objets

- Variété symplectique (M, ω) (ex. surface + forme volume)
i.e. ω 2-forme fermée non-dégénérée
- Le groupe des symplectomorphismes $\text{Symp}(M, \omega)$
i.e. $\varphi \in \text{Diff}(M)$ tel que $\varphi^* \omega = \omega$
- Le sous-groupe des difféomorphismes hamiltoniens
 $\text{Ham}(M, \omega)$ i.e. ϕ_H^1 engendré par $H: [0, 1] \times M \rightarrow \mathbb{R}$
($H \rightsquigarrow X_H$ tel que $-dH_t = \omega(X_H, \cdot)$ et $X_H \rightsquigarrow (\phi_H^t)_t$)
- Les sous-variétés **symplectiques**

Les objets

- Variété symplectique (M, ω) (ex. surface + forme volume)
i.e. ω 2-forme fermée non-dégénérée
- Le groupe des symplectomorphismes $\text{Symp}(M, \omega)$
i.e. $\varphi \in \text{Diff}(M)$ tel que $\varphi^* \omega = \omega$
- Le sous-groupe des difféomorphismes hamiltoniens
 $\text{Ham}(M, \omega)$ i.e. ϕ_H^1 engendré par $H: [0, 1] \times M \rightarrow \mathbb{R}$
($H \rightsquigarrow X_H$ tel que $-dH_t = \omega(X_H, \cdot)$ et $X_H \rightsquigarrow (\phi_H^t)_t$)
- Les sous-variétés symplectiques
- Les sous-variétés **coisotropes** et **isotropes**

Les objets

- Variété symplectique (M, ω) (ex. surface + forme volume)
i.e. ω 2-forme fermée non-dégénérée
- Le groupe des symplectomorphismes $\text{Symp}(M, \omega)$
i.e. $\varphi \in \text{Diff}(M)$ tel que $\varphi^* \omega = \omega$
- Le sous-groupe des difféomorphismes hamiltoniens
 $\text{Ham}(M, \omega)$ i.e. ϕ_H^1 engendré par $H: [0, 1] \times M \rightarrow \mathbb{R}$
($H \rightsquigarrow X_H$ tel que $-dH_t = \omega(X_H, \cdot)$ et $X_H \rightsquigarrow (\phi_H^t)_t$)
- Les sous-variétés symplectiques
- Les sous-variétés coisotropes et isotropes
- Les sous-variétés **lagrangiennes** (ex. un lacet plongé),
l'ensemble $\mathcal{L}_{\text{Ham}}(L)$

L'île de la rigidité symplectique

Modern Symplectic Geometry was born in a long battle for establishing the borderline between the areas where the h-principle holds and where it fails.

Y. Eliashberg and N. Mishachev (2002)

Modern Symplectic Geometry was born in a long battle for establishing the borderline between the areas where the h -principle holds and where it fails. Since the beginning of the eighties the Symplectic Rigidity army scored a lot of victories which brought to life the whole new area of Symplectic Topology.

Y. Eliashberg and N. Mishachev (2002)

Modern Symplectic Geometry was born in a long battle for establishing the borderline between the areas where the h-principle holds and where it fails. Since the beginning of the eighties the Symplectic Rigidity army scored a lot of victories which brought to life the whole new area of Symplectic Topology. However, there were also several amazing unexpected breakthroughs on the Flexibility side [...]

Y. Eliashberg and N. Mishachev (2002)

Modern Symplectic Geometry was born in a long battle for establishing the borderline between the areas where the h-principle holds and where it fails. Since the beginning of the eighties the Symplectic Rigidity army scored a lot of victories which brought to life the whole new area of Symplectic Topology. However, there were also several amazing unexpected breakthroughs on the Flexibility side [...] In fact, it is still possible that in spite of great recent successes of Symplectic Topology, the world of Symplectic Rigidity is just a small island floating in the Flexible Symplectic Ocean.

Y. Eliashberg and N. Mishachev (2002)

Modern Symplectic Geometry was born in a long battle for establishing the borderline between the areas where the h -principle holds and where it fails. Since the beginning of the eighties the Symplectic Rigidity army scored a lot of victories which brought to life the whole new area of Symplectic Topology. However, there were also several amazing unexpected breakthroughs on the Flexibility side [...] In fact, it is still possible that in spite of great recent successes of Symplectic Topology, the world of Symplectic Rigidity is just a small island floating in the Flexible Symplectic Ocean.

Y. Eliashberg and N. Mishachev (2002)

This is a quotation from 2002, which today sounds prophetic.

A. Oancea (\geq 2015)

Modern Symplectic Geometry was born in a long battle for establishing the borderline between the areas where the h -principle holds and where it fails. Since the beginning of the eighties the *Symplectic Rigidity army* scored a lot of victories which brought to life the whole new area of Symplectic Topology. However, there were also several amazing unexpected breakthroughs on the Flexibility side [...] In fact, it is still possible that in spite of great recent successes of Symplectic Topology, the world of Symplectic Rigidity is just a small island floating in the Flexible Symplectic Ocean.

Y. Eliashberg and N. Mishachev (2002)

This is a quotation from 2002, which today sounds prophetic.

A. Oancea (≥ 2015)

Des techniques dures

Définition (Technique dure)

Technique qui utilise des courbes pseudo-holomorphes

[Gromov 85]

Définition (Technique dure)

Technique qui utilise des courbes pseudo-holomorphes
[Gromov 85]

Exemple (parangons!)

Homologie de Morse + courbes pseudo-holomorphes

Définition (Technique dure)

Technique qui utilise des courbes pseudo-holomorphes
[Gromov 85]

Exemple (parangons !)

Homologie de Morse + courbes pseudo-holomorphes

- Homologie de Floer $HF(M, \omega)$, $HF(L)$ [Floer 88-89]
puis Hofer–Salamon, Oh, Seidel, Fukaya–Oh–Ohta–Ono, ...

Définition (Technique dure)

Technique qui utilise des courbes pseudo-holomorphes
[Gromov 85]

Exemple (parangons !)

Homologie de Morse + courbes pseudo-holomorphes

- Homologie de Floer $HF(M, \omega)$, $HF(L)$ [Floer 88-89]
puis Hofer–Salamon, Oh, Seidel, Fukaya–Oh–Ohta–Ono, ...
- Homologie quantique $HQ(M, \omega)$, $HQ(L)$
TTQC : Vafa, Witten (1991), GS : Ruan–Tian (1995), Kontsevich–
Manin, Biran–Cornea, ...

Homologie de Morse = $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -ev gradué associé à (f, g)

Homologie de Morse = $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -ev gradué associé à (f, g)

• $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ Morse, $\mathbf{CM}(M; f) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle \text{Crit}(f) \rangle$

Homologie de Morse = $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -ev gradué associé à (f, g)

- $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ Morse, $\mathbf{CM}(M; f) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle \text{Crit}(f) \rangle$
- graduation via indice de Morse : $\mathbf{CM}_*(M; f)$.

Homologie de Morse = $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -ev gradué associé à (f, g)

• $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ Morse, $\mathbf{CM}(M; f) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle \text{Crit}(f) \rangle$

• graduation via indice de Morse : $\mathbf{CM}_*(M; f)$.

• (f, g) Morse–Smale, différentielle

$\partial x = \# \text{lignes de flot isolées sortant de } x$

Homologie de Morse = $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -ev gradué associé à (f, g)

• $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ Morse, $\mathbf{CM}(M; f) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle \text{Crit}(f) \rangle$

• graduation via indice de Morse : $\mathbf{CM}_*(M; f)$.

• (f, g) Morse–Smale, différentielle

$$\partial_* : \mathbf{CM}_*(M; f) \longrightarrow \mathbf{CM}_{*-1}(M; f); \quad \partial x = \sum_y \# \mathcal{M}(x, y; f, g) \cdot y$$

Homologie de Morse = $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -ev gradué associé à (f, g)

- $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ Morse, $\mathbf{CM}(M; f) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle \text{Crit}(f) \rangle$
- graduation via indice de Morse : $\mathbf{CM}_*(M; f)$.
- (f, g) Morse–Smale, différentielle
- $\partial_* : \mathbf{CM}_*(M; f) \rightarrow \mathbf{CM}_{*-1}(M; f); \quad \partial x = \sum_y \# \mathcal{M}(x, y; f, g) \cdot y$
- $\partial^2 = 0$:

$$\boxed{\mathbf{HM}_*(M) = \mathbf{H}_*(\mathbf{CM}(M; f), \partial_{f,g}) = \ker \partial_* / \text{im } \partial_{*+1}}$$

Homologie de Morse = $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -ev gradué associé à (f, g)

- $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ Morse, $\mathbf{CM}(M; f) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle \text{Crit}(f) \rangle$
- graduation via indice de Morse : $\mathbf{CM}_*(M; f)$.
- (f, g) Morse–Smale, différentielle
- $\partial_* : \mathbf{CM}_*(M; f) \longrightarrow \mathbf{CM}_{* - 1}(M; f); \quad \partial x = \sum_y \# \mathcal{M}(x, y; f, g) \cdot y$
- $\partial^2 = 0$:

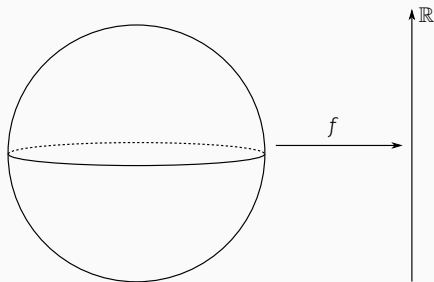
$$\boxed{\mathbf{HM}_*(M) = \mathbf{H}_*(\mathbf{CM}(M; f), \partial_{f, g}) = \ker \partial_* / \text{im } \partial_{* + 1} \simeq \mathbf{H}_*(M)}$$

Homologie de Morse = $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -ev gradué associé à (f, g)

- $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ Morse, $\mathbf{CM}(M; f) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle \text{Crit}(f) \rangle$
- graduation via indice de Morse : $\mathbf{CM}_*(M; f)$.
- (f, g) Morse–Smale, différentielle
- $\partial_* : \mathbf{CM}_*(M; f) \rightarrow \mathbf{CM}_{*+1}(M; f)$; $\partial x = \sum_y \# \mathcal{M}(x, y; f, g) \cdot y$
- $\partial^2 = 0$:

$$\mathbf{HM}_*(M) = H_*(\mathbf{CM}(M; f), \partial_{f,g}) = \ker \partial_* / \text{im } \partial_{*+1} \simeq H_*(M)$$

Exemple (la sphère)

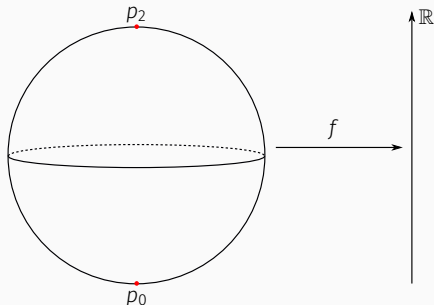


Homologie de Morse = $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -ev gradué associé à (f, g)

- $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ Morse, $\mathbf{CM}(M; f) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle \text{Crit}(f) \rangle$
- graduation via indice de Morse : $\mathbf{CM}_*(M; f)$.
- (f, g) Morse–Smale, différentielle
- $\partial_*: \mathbf{CM}_*(M; f) \rightarrow \mathbf{CM}_{*+1}(M; f)$; $\partial x = \sum_y \# \mathcal{M}(x, y; f, g) \cdot y$
- $\partial^2 = 0$:

$$\mathbf{HM}_*(M) = H_*(\mathbf{CM}(M; f), \partial_{f,g}) = \ker \partial_* / \text{im } \partial_{*+1} \simeq H_*(M)$$

Exemple (la sphère)

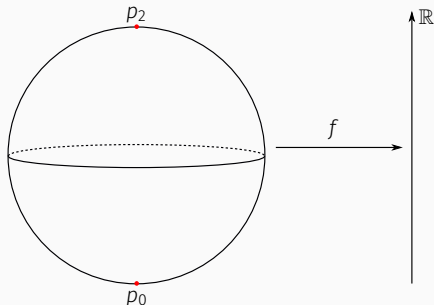


Homologie de Morse = $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -ev gradué associé à (f, g)

- $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ Morse, $\mathbf{CM}(M; f) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle \text{Crit}(f) \rangle$
- graduation via indice de Morse : $\mathbf{CM}_*(M; f)$.
- (f, g) Morse–Smale, différentielle
 $\partial_* : \mathbf{CM}_*(M; f) \rightarrow \mathbf{CM}_{*-1}(M; f)$; $\partial x = \sum_y \# \mathcal{M}(x, y; f, g) \cdot y$
- $\partial^2 = 0$:

$$\mathbf{HM}_*(M) = H_*(\mathbf{CM}(M; f), \partial_{f,g}) = \ker \partial_* / \text{im } \partial_{*+1} \simeq H_*(M)$$

Exemple (la sphère)



$$\mathbf{CM}_0(\mathbb{S}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle p_0 \rangle$$

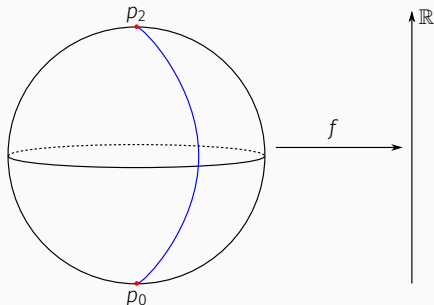
$$\mathbf{CM}_2(\mathbb{S}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle p_2 \rangle$$

Homologie de Morse = $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -ev gradué associé à (f, g)

- $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ Morse, $\text{CM}(M; f) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle \text{Crit}(f) \rangle$
- graduation via indice de Morse : $\text{CM}_*(M; f)$.
- (f, g) Morse–Smale, différentielle
- $\partial_*: \text{CM}_*(M; f) \rightarrow \text{CM}_{*-1}(M; f)$; $\partial x = \sum_y \# \mathcal{M}(x, y; f, g) \cdot y$
- $\partial^2 = 0$:

$$\text{HM}_*(M) = \text{H}_*(\text{CM}(M; f), \partial_{f,g}) = \ker \partial_* / \text{im } \partial_{*+1} \simeq \text{H}_*(M)$$

Exemple (la sphère)



$$\text{CM}_0(\mathbb{S}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle p_0 \rangle$$

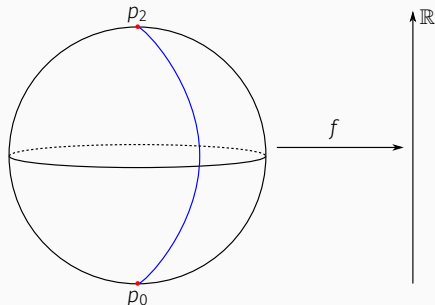
$$\text{CM}_2(\mathbb{S}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle p_2 \rangle$$

Homologie de Morse = $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -ev gradué associé à (f, g)

- $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ Morse, $\mathbf{CM}(M; f) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle \text{Crit}(f) \rangle$
- graduation via indice de Morse : $\mathbf{CM}_*(M; f)$.
- (f, g) Morse–Smale, différentielle
 $\partial_*: \mathbf{CM}_*(M; f) \rightarrow \mathbf{CM}_{*-1}(M; f)$; $\partial x = \sum_y \# \mathcal{M}(x, y; f, g) \cdot y$
- $\partial^2 = 0$:

$$\mathbf{HM}_*(M) = \mathbf{H}_*(\mathbf{CM}(M; f), \partial_{f,g}) = \ker \partial_* / \text{im } \partial_{*+1} \simeq \mathbf{H}_*(M)$$

Exemple (la sphère)



$$\mathbf{CM}_0(\mathbb{S}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle p_0 \rangle$$

$$\mathbf{CM}_2(\mathbb{S}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle p_2 \rangle$$

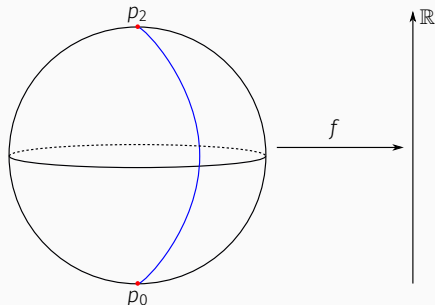
$$\partial = 0$$

Homologie de Morse = $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -ev gradué associé à (f, g)

- $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ Morse, $\text{CM}(M; f) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle \text{Crit}(f) \rangle$
- graduation via indice de Morse : $\text{CM}_*(M; f)$.
- (f, g) Morse–Smale, différentielle
- $\partial_*: \text{CM}_*(M; f) \rightarrow \text{CM}_{*-1}(M; f)$; $\partial x = \sum_y \# \mathcal{M}(x, y; f, g) \cdot y$
- $\partial^2 = 0$:

$$\text{HM}_*(M) = \text{H}_*(\text{CM}(M; f), \partial_{f,g}) = \ker \partial_* / \text{im } \partial_{*+1} \simeq \text{H}_*(M)$$

Exemple (la sphère)



$$\text{CM}_0(\mathbb{S}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle p_0 \rangle$$

$$\text{CM}_2(\mathbb{S}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle p_2 \rangle$$

$$\partial = 0$$

$$\text{HM}_0(\mathbb{S}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle p_0 \rangle$$

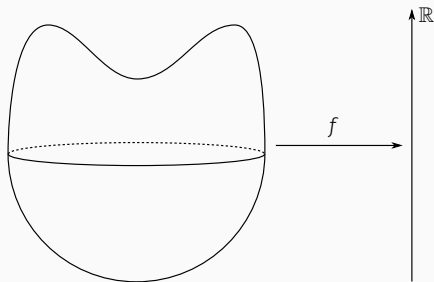
$$\text{HM}_2(\mathbb{S}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle p_2 \rangle$$

Homologie de Morse = $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -ev gradué associé à (f, g)

- $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ Morse, $\mathbf{CM}(M; f) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle \text{Crit}(f) \rangle$
- graduation via indice de Morse : $\mathbf{CM}_*(M; f)$.
- (f, g) Morse–Smale, différentielle
- $\partial_* : \mathbf{CM}_*(M; f) \rightarrow \mathbf{CM}_{*+1}(M; f)$; $\partial x = \sum_y \# \mathcal{M}(x, y; f, g) \cdot y$
- $\partial^2 = 0$:

$$\mathbf{HM}_*(M) = H_*(\mathbf{CM}(M; f), \partial_{f,g}) = \ker \partial_* / \text{im } \partial_{*+1} \simeq H_*(M)$$

Exemple (la sphère le cœur)

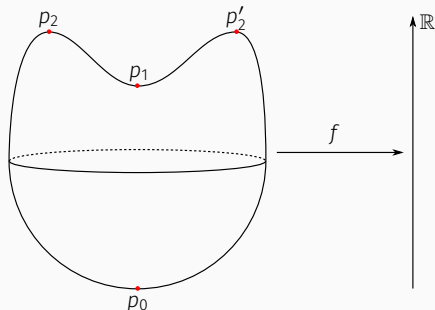


Homologie de Morse = $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -ev gradué associé à (f, g)

- $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ Morse, $\mathbf{CM}(M; f) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle \text{Crit}(f) \rangle$
- graduation via indice de Morse : $\mathbf{CM}_*(M; f)$.
- (f, g) Morse–Smale, différentielle
 $\partial_* : \mathbf{CM}_*(M; f) \rightarrow \mathbf{CM}_{* - 1}(M; f)$; $\partial x = \sum_y \# \mathcal{M}(x, y; f, g) \cdot y$
- $\partial^2 = 0$:

$$\mathbf{HM}_*(M) = \mathbf{H}_*(\mathbf{CM}(M; f), \partial_{f, g}) = \ker \partial_* / \text{im } \partial_{* + 1} \simeq \mathbf{H}_*(M)$$

Exemple (la ~~sphère~~ le cœur)



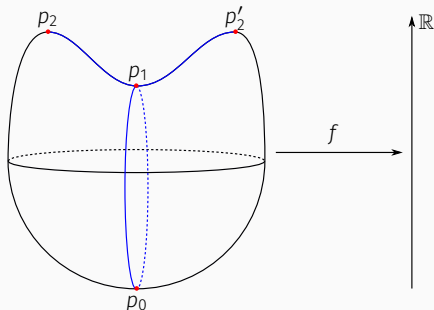
$$\begin{aligned}\mathbf{CM}_0(\mathbb{S}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) &= \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle p_0 \rangle \\ \mathbf{CM}_1(\mathbb{S}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) &= \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle p_1 \rangle \\ \mathbf{CM}_2(\mathbb{S}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) &= \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle p_2, p_2' \rangle\end{aligned}$$

Homologie de Morse = $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -ev gradué associé à (f, g)

- $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ Morse, $\text{CM}(M; f) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle \text{Crit}(f) \rangle$
- graduation via indice de Morse : $\text{CM}_*(M; f)$.
- (f, g) Morse–Smale, différentielle
- $\partial_* : \text{CM}_*(M; f) \rightarrow \text{CM}_{*-1}(M; f)$; $\partial x = \sum_y \# \mathcal{M}(x, y; f, g) \cdot y$
- $\partial^2 = 0$:

$$\text{HM}_*(M) = \text{H}_*(\text{CM}(M; f), \partial_{f,g}) = \ker \partial_* / \text{im } \partial_{*+1} \simeq \text{H}_*(M)$$

Exemple (la sphère le cœur)



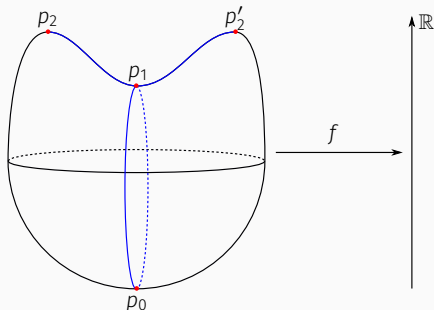
$$\begin{aligned} \text{CM}_0(\mathbb{S}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) &= \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle p_0 \rangle \\ \text{CM}_1(\mathbb{S}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) &= \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle p_1 \rangle \\ \text{CM}_2(\mathbb{S}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) &= \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle p_2, p'_2 \rangle \\ \partial p_0 &= 0 \\ \partial p_1 &= 2p_0 = 0 \\ \partial p_2 &= p_1 = \partial p'_2 \end{aligned}$$

Homologie de Morse = $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -ev gradué associé à (f, g)

- $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ Morse, $\text{CM}(M; f) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle \text{Crit}(f) \rangle$
- graduation via indice de Morse : $\text{CM}_*(M; f)$.
- (f, g) Morse–Smale, différentielle
- $\partial_* : \text{CM}_*(M; f) \rightarrow \text{CM}_{*-1}(M; f)$; $\partial x = \sum_y \# \mathcal{M}(x, y; f, g) \cdot y$
- $\partial^2 = 0$:

$$\text{HM}_*(M) = \text{H}_*(\text{CM}(M; f), \partial_{f,g}) = \ker \partial_* / \text{im } \partial_{*+1} \simeq \text{H}_*(M)$$

Exemple (la sphère le cœur)



$$\text{CM}_0(\mathbb{S}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle p_0 \rangle$$

$$\text{CM}_1(\mathbb{S}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle p_1 \rangle$$

$$\text{CM}_2(\mathbb{S}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle p_2, p'_2 \rangle$$

$$\partial p_0 = 0$$

$$\partial p_1 = 2p_0 = 0$$

$$\partial p_2 = p_1 = \partial p'_2$$

$$\text{HM}_0(\mathbb{S}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle p_0 \rangle$$

$$\text{HM}_1(\mathbb{S}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$$

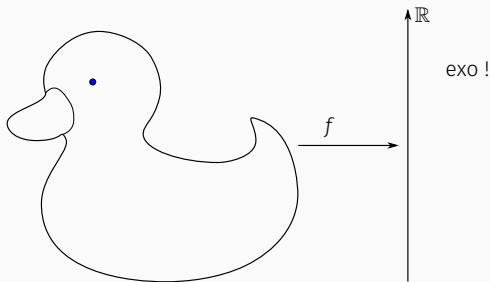
$$\text{HM}_2(\mathbb{S}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle p_2 + p'_2 \rangle$$

Homologie de Morse = $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -ev gradué associé à (f, g)

- $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ Morse, $\text{CM}(M; f) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle \text{Crit}(f) \rangle$
- graduation via indice de Morse : $\text{CM}_*(M; f)$.
- (f, g) Morse–Smale, différentielle
- $\partial_* : \text{CM}_*(M; f) \rightarrow \text{CM}_{*-1}(M; f)$; $\partial x = \sum_y \# \mathcal{M}(x, y; f, g) \cdot y$
- $\partial^2 = 0$:

$$\text{HM}_*(M) = H_*(\text{CM}(M; f), \partial_{f,g}) = \ker \partial_* / \text{im } \partial_{*+1} \simeq H_*(M)$$

Exemple (~~la sphère~~ le canard)

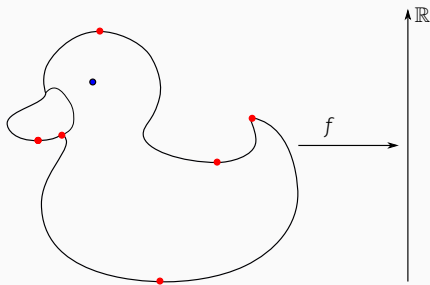


Homologie de Morse = $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -ev gradué associé à (f, g)

- $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ Morse, $\text{CM}(M; f) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle \text{Crit}(f) \rangle$
- graduation via indice de Morse : $\text{CM}_*(M; f)$.
- (f, g) Morse–Smale, différentielle
 $\partial_*: \text{CM}_*(M; f) \rightarrow \text{CM}_{*-1}(M; f); \partial x = \sum_y \# \mathcal{M}(x, y; f, g) \cdot y$
- $\partial^2 = 0$:

$$\text{HM}_*(M) = H_*(\text{CM}(M; f), \partial_{f,g}) = \ker \partial_* / \text{im } \partial_{*+1} \simeq H_*(M)$$

Exemple (la sphère le canard)



exo !

[Abbondandolo–Schlenk 17]

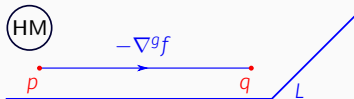
Résultat :

$$\text{HM}_0(\mathbb{S}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

$$\text{HM}_1(\mathbb{S}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$$

$$\text{HM}_2(\mathbb{S}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

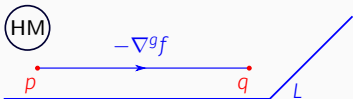
(HM)



$$\text{CM}(L; f) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle \text{Crit}(f) \rangle$$

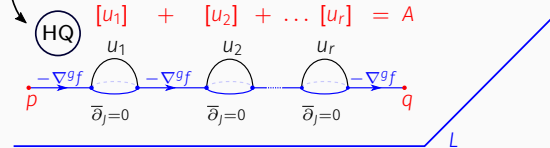
Graduation = indice de Morse

$\partial_{f,g}$ compte les lignes de flot gradient

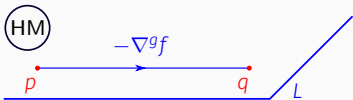


$CM(L; f) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle \text{Crit}(f) \rangle$
 Graduation = indice de Morse
 $\partial_{f,g}$ compte les lignes de flot gradient

+ disques pseudo-holomorphes



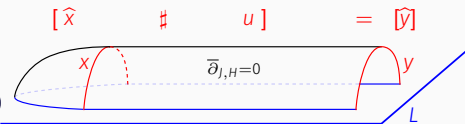
$CQ(L; f, J) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle \text{Crit}(f) \rangle \otimes \Lambda$
 Graduation = indice de Morse + Maslov sur $\pi_2(M, L)$
 $\partial_{f,g,J}$ compte des chaînes de perles



$CM(L; f) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle \text{Crit}(f) \rangle$
 Graduation = indice de Morse
 $\partial_{f,g}$ compte les lignes de flot gradient

$f \rightsquigarrow \mathcal{A}_H$

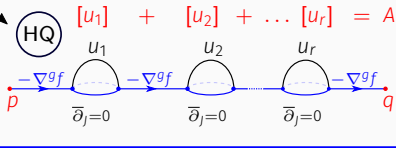
HF



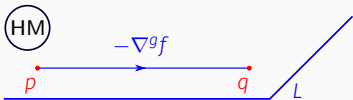
$CF(L; H) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle \text{Crit}(\mathcal{A}_H) \rangle$
 Graduation = indice de Conley-Zehnder
 $\partial_{H,J}$ compte les lignes de flot
 i.e. trajectoires de Floer $\partial_s u + J\partial_t u - JX_H(u) = 0$

+ disques pseudo-holomorphes

HQ



$CQ(L; f, J) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle \text{Crit}(f) \rangle \otimes \Lambda$
 Graduation = indice de Morse + Maslov sur $\pi_2(M, L)$
 $\partial_{f,g,J}$ compte des chaînes de perles



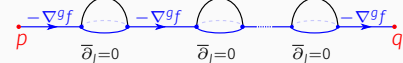
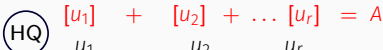
$CM(L; f) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle \text{Crit}(f) \rangle$
 Graduation = indice de Morse
 $\partial_{f,g}$ compte les lignes de flot gradient

$f \rightsquigarrow \mathcal{A}_H$



$CF(L; H) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle \text{Crit}(\mathcal{A}_H) \rangle$
 Graduation = indice de Conley-Zehnder
 $\partial_{H,J}$ compte les lignes de flot
 i.e. trajectoires de Floer $\partial_s u + J\partial_t u - JX_H(u) = 0$

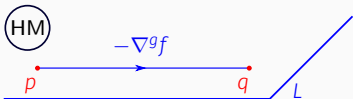
+ disques pseudo-holomorphes



“assez compliqué”

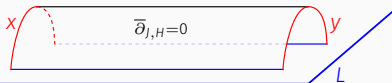
L monotone
 $HQ(L) \simeq HF(L)$

$CQ(L; f, J) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle \text{Crit}(f) \rangle \otimes \Lambda$
 Graduation = indice de Morse + Maslov sur $\pi_2(M, L)$
 $\partial_{f,g,J}$ compte des chaînes de perles



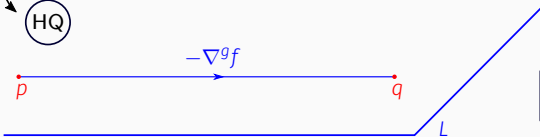
$\text{CM}(L; f) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle \text{Crit}(f) \rangle$
 Graduation = indice de Morse
 $\partial_{f,g}$ compte les lignes de flot gradient

HF



$\text{CF}(L; H) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle \text{Crit}(\mathcal{A}_H) \rangle$
 Graduation = indice de Conley-Zehnder
 $\partial_{H,J}$ compte les lignes de flot
 i.e. trajectoires de Floer $\partial_s u + J\partial_t u - JX_H(u) = 0$

HQ



$\text{CQ}(L; f, J) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle \text{Crit}(f) \rangle$
 Graduation = indice de Morse
 $\partial_{f,g,J}$ compte des chaînes de perles (sans perles !)

“très facile”

L asphérique
 $\text{HM}(L) \simeq \text{HF}(L)$

Robustesse d'intersection

Lagrangiennes indéplaçables

Déplaçabilité = question fondamentale dans le développement de HF (parallèle à la conjecture d'Arnold)

Lagrangiennes indéplaçables

Déplaçabilité = question fondamentale dans le développement de HF (parallèle à la conjecture d'Arnold)

Théorème (Floer)

Si L est asphérique, $\text{HF}_(L) = \text{H}_*(L)$.*

Corollaire

Pour tout $\varphi \in \text{Ham}(M, \omega)$, $\varphi(L) \cap L \neq \emptyset$.

Lagrangiennes indéplaçables

Déplaçabilité = question fondamentale dans le développement de HF (parallèle à la conjecture d'Arnold)

Théorème (Floer)

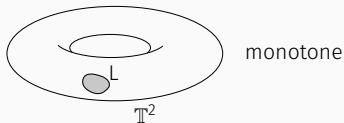
Si L est asphérique, $\text{HF}_*(L) = \text{H}_*(L)$.

Corollaire

Pour tout $\varphi \in \text{Ham}(M, \omega)$, $\varphi(L) \cap L \neq \emptyset$.

Exemple

Lacet sur une surface munie d'une forme volume



Lagrangiennes indéplaçables

Déplaçabilité = question fondamentale dans le développement de HF (parallèle à la conjecture d'Arnold)

Théorème (Floer)

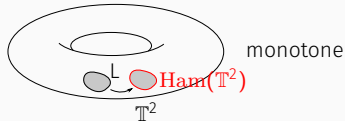
Si L est asphérique, $\text{HF}_*(L) = H_*(L)$.

Corollaire

Pour tout $\varphi \in \text{Ham}(M, \omega)$, $\varphi(L) \cap L \neq \emptyset$.

Exemple

Lacet sur une surface munie d'une forme volume



Lagrangiennes indéplaçables

Déplaçabilité = question fondamentale dans le développement de HF (parallèle à la conjecture d'Arnold)

Théorème (Floer)

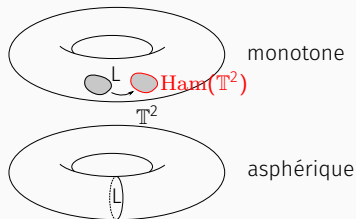
Si L est asphérique, $\text{HF}_*(L) = H_*(L)$.

Corollaire

Pour tout $\varphi \in \text{Ham}(M, \omega)$, $\varphi(L) \cap L \neq \emptyset$.

Exemple

Lacet sur une surface munie d'une forme volume



Lagrangiennes indéplaçables

Déplaçabilité = question fondamentale dans le développement de HF (parallèle à la conjecture d'Arnold)

Théorème (Floer)

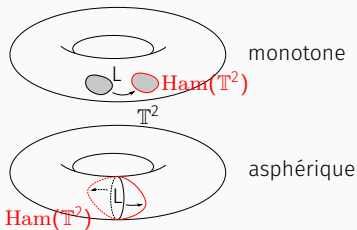
Si L est asphérique, $\text{HF}_*(L) = H_*(L)$.

Corollaire

Pour tout $\varphi \in \text{Ham}(M, \omega)$, $\varphi(L) \cap L \neq \emptyset$.

Exemple

Lacet sur une surface munie d'une forme volume



Lagrangiennes indéplaçables

Déplaçabilité = question fondamentale dans le développement de HF (parallèle à la conjecture d'Arnold)

Théorème (Floer)

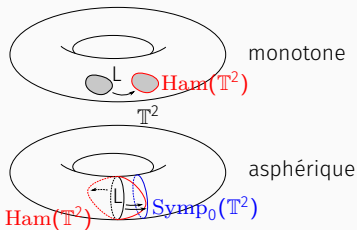
Si L est asphérique, $\text{HF}_*(L) = H_*(L)$.

Corollaire

Pour tout $\varphi \in \text{Ham}(M, \omega)$, $\varphi(L) \cap L \neq \emptyset$.

Exemple

Lacet sur une surface munie d'une forme volume



Lagrangiennes indéplaçables

Déplaçabilité = question fondamentale dans le développement de HF (parallèle à la conjecture d'Arnold)

Théorème (Floer)

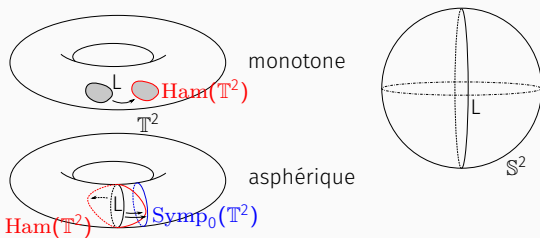
Si L est asphérique, $\text{HF}_*(L) = \text{H}_*(L)$.

Corollaire

Pour tout $\varphi \in \text{Ham}(M, \omega)$, $\varphi(L) \cap L \neq \emptyset$.

Exemple

Lacet sur une surface munie d'une forme volume



Lagrangiennes indéplaçables

Déplaçabilité = question fondamentale dans le développement de HF (parallèle à la conjecture d'Arnold)

Théorème (Floer)

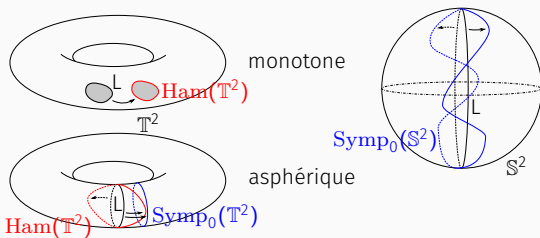
Si L est asphérique, $\text{HF}_*(L) = \text{H}_*(L)$.

Corollaire

Pour tout $\varphi \in \text{Ham}(M, \omega)$, $\varphi(L) \cap L \neq \emptyset$.

Exemple

Lacet sur une surface munie d'une forme volume



Théorème (L.-Zapolsky 2018)

Le tore de Chekanov de $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ et le tore exotique de $S^2 \times S^2$ sont super-lourds.

Lagrangiennes indéplaçables

Théorème (L.-Zapolsky 2018)

Le tore de Chekanov de $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ et le tore exotique de $S^2 \times S^2$ sont super-lourds.

Corollaire

Ils ne sont déplaçables par aucun symplectomorphisme !

Lagrangiennes indéplaçables

Théorème (L.–Zapolsky 2018)

Le tore de Chekanov de $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ et le tore exotique de $S^2 \times S^2$ sont super-lourds.

Corollaire

Ils ne sont déplaçables par aucun symplectomorphisme !

Remarque

Ces exemples étaient connus (resp. Wu 2012, et Eliashberg–Polterovich 2010)

Lagrangiennes indéplaçables

Théorème (L.–Zapolsky 2018)

Le tore de Chekanov de $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ et le tore exotique de $S^2 \times S^2$ sont super-lourds.

Corollaire

Ils ne sont déplaçables par aucun symplectomorphisme !

Remarque

Ces exemples étaient connus (resp. Wu 2012, et Eliashberg–Polterovich 2010)

*Ils montrent la pertinence des **invariants spectraux lagrangiens***

$$\ell: \mathrm{HQ}_*(L) \times C^0(M \times [0, 1]) \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

Invariants spectraux : définition

Définition (dimension finie)

Soient $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ Morse et $\alpha \in H_*(M)$, $\ell(\alpha, f)$ est définie par :

$\{x \in M \mid f(x) \leq \ell(\alpha, f)\}$ = plus petit sous-niveau qui contienne un représentant de α

Invariants spectraux : définition

Définition (dimension finie)

Soient $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ Morse et $\alpha \in H_*(M)$, $\ell(\alpha, f)$ est définie par :

$\{x \in M \mid f(x) \leq \ell(\alpha, f)\}$ = plus petit sous-niveau qui contienne un représentant de α

Exemple



Invariants spectraux : définition

Définition (dimension finie)

Soient $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ Morse et $\alpha \in H_*(M)$, $\ell(\alpha, f)$ est définie par :
 $\{x \in M \mid f(x) \leq \ell(\alpha, f)\}$ = plus petit sous-niveau qui contienne un représentant de α

Exemple



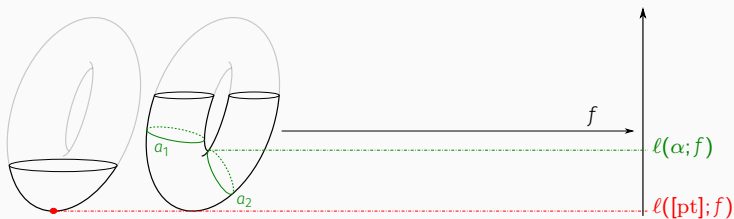
Invariants spectraux : définition

Définition (dimension finie)

Soient $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ Morse et $\alpha \in H_*(M)$, $\ell(\alpha, f)$ est définie par :

$\{x \in M \mid f(x) \leq \ell(\alpha, f)\}$ = plus petit sous-niveau qui contienne un représentant de α

Exemple



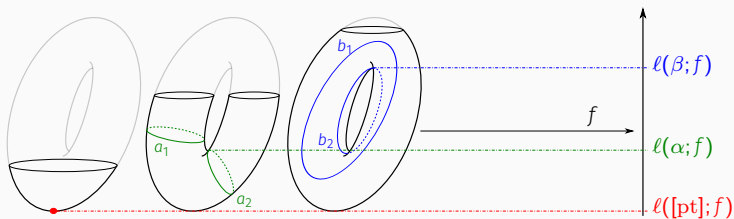
Invariants spectraux : définition

Définition (dimension finie)

Soient $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ Morse et $\alpha \in H_*(M)$, $\ell(\alpha, f)$ est définie par :

$\{x \in M \mid f(x) \leq \ell(\alpha, f)\}$ = plus petit sous-niveau qui contienne un représentant de α

Exemple



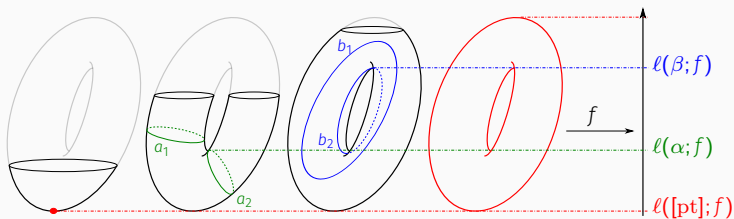
Invariants spectraux : définition

Définition (dimension finie)

Soient $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ Morse et $\alpha \in H_*(M)$, $\ell(\alpha, f)$ est définie par :

$\{x \in M \mid f(x) \leq \ell(\alpha, f)\}$ = plus petit sous-niveau qui contienne un représentant de α

Exemple



Invariants spectraux : développement

Lagrangiennes des fibrés cotangents : Viterbo (1992) via fonctions génératrices

Invariants spectraux : développement

Lagrangiennes des fibrés cotangents : Viterbo (1992) via fonctions génératrices, Oh (1997) **via homologie de Floer**

Invariants spectraux : développement

Lagrangiennes des fibrés cotangents : Viterbo (1992) via fonctions génératrices, Oh (1997) via homologie de Floer

Variétés symplectiques compactes : Schwarz (2000)
symplectiquement sphériques, Oh (2005) monotones

Invariants spectraux : développement

Lagrangiennes des fibrés cotangents : Viterbo (1992) via fonctions génératrices, Oh (1997) via homologie de Floer

Variétés symplectiques compactes : Schwarz (2000) symplectiquement asphériques, Oh (2005) monotones

Lagrangiennes des variétés symplectiques compactes : L. (2008) asphériques, L.-Zapolsky (2018) monotones (Fukaya–Oh–Ohta–Ono (2011), en très grande généralité)

Invariants spectraux : développement

Lagrangiennes des fibrés cotangents : Viterbo (1992) via fonctions génératrices, Oh (1997) via homologie de Floer

Variétés symplectiques compactes : Schwarz (2000) symplectiquement asphériques, Oh (2005) monotones

Lagrangiennes des variétés symplectiques compactes : L. (2008) asphériques, L.–Zapolsky (2018) monotones (Fukaya–Oh–Ohta–Ono (2011), en très grande généralité)

Géométrie de contact : Chaperon (1995), Bhupal (2001), Sandon (2011), et Zapolsky (2013) pour les legendriennes et les contactomorphismes, via les fonctions génératrices

Invariants spectraux : développement

Lagrangiennes des fibrés cotangents : Viterbo (1992) via fonctions génératrices, Oh (1997) via homologie de Floer

Variétés symplectiques compactes : Schwarz (2000) symplectiquement asphériques, Oh (2005) monotones

Lagrangiennes des variétés symplectiques compactes : L. (2008) asphériques, L.–Zapolsky (2018) monotones (Fukaya–Oh–Ohta–Ono (2011), en très grande généralité)

Géométrie de contact : Chaperon (1995), Bhupal (2001), Sandon (2011), et Zapolsky (2013) pour les legendriennes et les contactomorphismes, via les fonctions génératrices

homologie de Floer–Rabinowitz : Albers–Frauenfelder (2010)

Invariants spectraux : développement

Lagrangiennes des fibrés cotangents : Viterbo (1992) via fonctions génératrices, Oh (1997) via homologie de Floer

Variétés symplectiques compactes : Schwarz (2000) symplectiquement asphériques, Oh (2005) monotones

Lagrangiennes des variétés symplectiques compactes : L. (2008) asphériques, L.–Zapolsky (2018) monotones (Fukaya–Oh–Ohta–Ono (2011), en très grande généralité)

Géométrie de contact : Chaperon (1995), Bhupal (2001), Sandon (2011), et Zapolsky (2013) pour les legendriennes et les contactomorphismes, via les fonctions génératrices

homologie de Floer–Rabinowitz : Albers–Frauenfelder (2010)
Géométrie de contact via Floer : Albers–Shelukhin–Zapolsky

Invariants spectraux : développement

Lagrangiennes des fibrés cotangents : Viterbo (1992) via fonctions génératrices, Oh (1997) via homologie de Floer

Variétés symplectiques compactes : Schwarz (2000) symplectiquement asphériques, Oh (2005) monotones

Lagrangiennes des variétés symplectiques compactes : L. (2008) asphériques, L.–Zapolsky (2018) monotones (Fukaya–Oh–Ohta–Ono (2011), en très grande généralité)

Géométrie de contact : Chaperon (1995), Bhupal (2001), Sandon (2011), et Zapolsky (2013) pour les legendriennes et les contactomorphismes, via les fonctions génératrices

homologie de Floer–Rabinowitz : Albers–Frauenfelder (2010)

Géométrie de contact via Floer : Albers–Shelukhin–Zapolsky

Indépendamment : L.–Sandon via l'**homologie des points translétés**

Invariants spectraux : propriétés principales

Théorème (L.-Zapolsky 18)

La fonction ℓ satisfait de très nombreuses propriétés.

Invariants spectraux : propriétés principales

Théorème (L.-Zapolsky 18)

La fonction ℓ satisfait de très nombreuses propriétés : Finitude, Spectralité, Continuité, Monotonie, Inégalité triangulaire, Décalage temporel, Valuation quantique, Contrôle lagrangien, Action de Novikov, Invariance symplectique, Dualité, Positivité, Maximum, Structure de module.

Invariants spectraux : propriétés principales

Théorème (L.–Zapolsky 18)

La fonction ℓ satisfait de très nombreuses propriétés : *Finitude*, *Spectralité*, Continuité, Monotonie, Inégalité triangulaire, Décalage temporel, Valuation quantique, Contrôle lagrangien, Action de Novikov, Invariance symplectique, Dualité, Positivité, Maximum, Structure de module.

Invariants spectraux : propriétés principales

Théorème (L.–Zapolsky 18)

La fonction ℓ satisfait de très nombreuses propriétés : Finitude, Spectralité, Continuité, Monotonie, Inégalité triangulaire, Décalage temporel, Valuation quantique, Contrôle lagrangien, Action de Novikov, Invariance symplectique, Dualité, Positivité, Maximum, Structure de module.

Invariants spectraux : propriétés principales

Théorème (L.–Zapolsky 18)

*La fonction ℓ satisfait de très nombreuses propriétés : Finitude, Spectralité, Continuité, Monotonie, **Inégalité triangulaire**, Décalage temporel, Valuation quantique, Contrôle lagrangien, Action de Novikov, Invariance symplectique, **Dualité**, Positivité, Maximum, **Structure de module**.*

Invariants spectraux : propriétés principales

Théorème (L.–Zapolsky 18)

*La fonction ℓ satisfait de très nombreuses propriétés : Finitude, Spectralité, Continuité, Monotonie, Inégalité triangulaire, Décalage temporel, **Valuation quantique**, Contrôle lagrangien, **Action de Novikov**, **Invariance symplectique**, Dualité, Positivité, Maximum, Structure de module.*

Invariants spectraux : propriétés principales

Théorème (L.–Zapolsky 18)

*La fonction ℓ satisfait de très nombreuses propriétés : Finitude, Spectralité, Continuité, Monotonie, Inégalité triangulaire, Décalage temporel, Valuation quantique, Contrôle lagrangien, Action de Novikov, Invariance symplectique, Dualité, **Positivité**, **Maximum**, Structure de module.*

Invariants spectraux : propriétés principales

Théorème (L.–Zapolsky 18)

La fonction ℓ satisfait de très nombreuses propriétés : *Finitude*, *Spectralité*, *Continuité*, *Monotonie*, *Inégalité triangulaire*, *Décalage temporel*, *Valuation quantique*, *Contrôle lagrangien*, *Action de Novikov*, *Invariance symplectique*, *Dualité*, *Positivité*, *Maximum*, *Structure de module*.

Corollaire

ℓ descend en une fonction définie sur $\mathrm{HQ}_*(L) \times \widetilde{\mathrm{Ham}}(M, \omega)$.

Invariants spectraux : propriétés principales

Théorème (L.-Zapolsky 18)

La fonction ℓ satisfait de très nombreuses propriétés : Finitude, Spectralité, Continuité, Monotonie, *Inégalité triangulaire*, Décalage temporel, Valuation quantique, Contrôle lagrangien, Action de Novikov, Invariance symplectique, Dualité, *Positivité*, Maximum, Structure de module.

Corollaire

ℓ descend en une fonction définie sur $\mathrm{HQ}_*(L) \times \widetilde{\mathrm{Ham}}(M, \omega)$.
 $\ell([L], \cdot)$ définit une pseudo-distance sur $\widetilde{\mathrm{Ham}}(M, \omega)$.

Invariants spectraux : propriétés principales

Théorème (L.–Zapolsky 18)

*La fonction ℓ satisfait de très nombreuses propriétés : Finitude, Spectralité, **Continuité**, Monotonie, Inégalité triangulaire, Décalage temporel, Valuation quantique, Contrôle lagrangien, Action de Novikov, Invariance symplectique, Dualité, Positivité, Maximum, Structure de module.*

Corollaire

ℓ descend en une fonction définie sur $\mathrm{HQ}_(L) \times \widetilde{\mathrm{Ham}}(M, \omega)$.
 $\ell([L], \cdot)$ définit une pseudo-distance sur $\widetilde{\mathrm{Ham}}(M, \omega)$ **majorée**
par la distance de Hofer.*

Invariants spectraux : propriétés principales

Théorème (L.-Zapolsky 18)

La fonction ℓ satisfait de très nombreuses propriétés : Finitude, Spectralité, *Continuité*, Monotonie, *Inégalité triangulaire*, *Décalage temporel*, Valuation quantique, Contrôle lagrangien, Action de Novikov, *Invariance symplectique*, Dualité, Positivité, Maximum, Structure de module.

Corollaire

ℓ descend en une fonction définie sur $\mathrm{HQ}_*(L) \times \widetilde{\mathrm{Ham}}(M, \omega)$.
 $\ell([L], \cdot)$ définit une pseudo-distance sur $\widetilde{\mathrm{Ham}}(M, \omega)$ majorée par la distance de Hofer.

Théorème (L.-Zapolsky 18)

Soit Θ dénotant $\widetilde{\mathrm{Ham}}(M, \omega)$ ou $\widetilde{\mathcal{L}}_{\mathrm{Ham}}(L)$, la fonction spectrale ℓ induit des fonctions $\ell^\alpha : \Theta \times \widetilde{\mathrm{Ham}}(M, \omega) \rightarrow \mathbb{R}$, qui sont lipschitziennes par rapport à la distance de Hofer.

Invariants spectraux : propriétés principales

Théorème (L.-Zapolsky 18)

La fonction ℓ satisfait de très nombreuses propriétés : Finitude, Spectralité, Continuité, Monotonie, Inégalité triangulaire, Décalage temporel, *Valuation quantique*, *Contrôle lagrangien*, Action de Novikov, Invariance symplectique, Dualité, Positivité, Maximum, *Structure de module*.

Corollaire

ℓ descend en une fonction définie sur $\mathrm{HQ}_*(L) \times \widetilde{\mathrm{Ham}}(M, \omega)$.
 $\ell([L], \cdot)$ définit une pseudo-distance sur $\widetilde{\mathrm{Ham}}(M, \omega)$ majorée par la distance de Hofer.

Théorème (L.-Zapolsky 18)

Soit Θ dénotant $\widetilde{\mathrm{Ham}}(M, \omega)$ ou $\widetilde{\mathcal{L}}_{\mathrm{Ham}}(L)$, la fonction spectrale ℓ induit des fonctions $\ell^\alpha : \Theta \times \widetilde{\mathrm{Ham}}(M, \omega) \rightarrow \mathbb{R}$, qui sont lipschitziennes par rapport à la distance de Hofer.

Difféomorphismes induits sur des lagrangiennes

Trivialité de la monodromie lagrangienne

$L \subset (M, \omega)$ lagrangienne et $\varphi \in \text{Ham}(M, \omega)$ tel que $\varphi(L) = L$.
Quels isomorphismes $(\varphi|_L)_* : H_*(L) \rightarrow H_*(L)$ cela produit-il ?

Trivialité de la monodromie lagrangienne

$L \subset (M, \omega)$ lagrangienne et $\varphi \in \text{Ham}(M, \omega)$ tel que $\varphi(L) = L$.
Quels isomorphismes $(\varphi|_L)_* : H_*(L) \rightarrow H_*(L)$ cela produit-il ?

Remarque (triviale)

Si $H_(L) \hookrightarrow H_*(M)$, $(\varphi|_L)_* = \text{Id}$. Mais sinon ?*

Trivialité de la monodromie lagrangienne

$L \subset (M, \omega)$ lagrangienne et $\varphi \in \text{Ham}(M, \omega)$ tel que $\varphi(L) = L$.
Quels isomorphismes $(\varphi|_L)_* : H_*(L) \rightarrow H_*(L)$ cela produit-il ?

Remarque (triviale)

Si $H_(L) \hookrightarrow H_*(M)$, $(\varphi|_L)_* = \text{Id}$. Mais sinon ?*

Exemple (Yau 09)

\mathbb{T}^2 le tore de Chekanov de $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$, il existe $\varphi \in \text{Ham}(\mathbb{C}\mathbb{P}^2)$ tel que $(\varphi|_{\mathbb{T}^2})_* \neq \text{Id}$.

Trivialité de la monodromie lagrangienne

$L \subset (M, \omega)$ lagrangienne et $\varphi \in \text{Ham}(M, \omega)$ tel que $\varphi(L) = L$.
Quels isomorphismes $(\varphi|_L)_* : H_*(L) \rightarrow H_*(L)$ cela produit-il ?

Remarque (triviale)

Si $H_*(L) \hookrightarrow H_*(M)$, $(\varphi|_L)_* = \text{Id}$. Mais sinon ?

Exemple (Yau 09)

\mathbb{T}^2 le tore de Chekanov de $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$, il existe $\varphi \in \text{Ham}(\mathbb{C}\mathbb{P}^2)$ tel que $(\varphi|_{\mathbb{T}^2})_* \neq \text{Id}$.

Théorème (Hu–Lalonde–L. 11)

Si L est symplectiquement asphérique, $(\varphi|_L)_* = \text{Id}$.

Trivialité de la monodromie lagrangienne

$L \subset (M, \omega)$ lagrangienne et $\varphi \in \text{Ham}(M, \omega)$ tel que $\varphi(L) = L$.
Quels isomorphismes $(\varphi|_L)_* : H_*(L) \rightarrow H_*(L)$ cela produit-il ?

Remarque (triviale)

Si $H_(L) \hookrightarrow H_*(M)$, $(\varphi|_L)_* = \text{Id}$. Mais sinon ?*

Exemple (Yau 09)

\mathbb{T}^2 le tore de Chekanov de $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$, il existe $\varphi \in \text{Ham}(\mathbb{C}\mathbb{P}^2)$ tel que $(\varphi|_{\mathbb{T}^2})_* \neq \text{Id}$.

Théorème (Hu–Lalonde–L. 11)

Si L est symplectiquement asphérique, $(\varphi|_L)_ = \text{Id}$.*

Exemple

L lacet de classes d'homotopie non nulle, d'homologie nulle dans Σ_2 : pour tout $\varphi \in \text{Ham}(\Sigma_2 \times \Sigma_2)$, $(\varphi|_{L \times L})_* = \text{Id}$.

Outil : le morphisme de Seidel

Définition (Seidel 97)

La représentation / le morphisme de Seidel, respectivement :

$$\pi_1(\text{Ham}(M, \omega)) \rightarrow \text{Aut}(\text{HF}_*(M)) \quad \text{et} \quad \pi_1(\text{Ham}(M, \omega)) \rightarrow \text{HQ}_*(M)^\times$$

Outil : le morphisme de Seidel

Définition (Seidel 97, Hu–Lalonde 10)

La représentation / le morphisme de Seidel, respectivement :

$$\pi_1(\text{Ham}(M, \omega)) \rightarrow \text{Aut}(\text{HF}_*(M)) \quad \text{et} \quad \pi_1(\text{Ham}(M, \omega)) \rightarrow \text{HQ}_*(M)^\times$$

et en version lagrangienne :

$$\pi_1(\text{Ham}(M, \omega), \text{Ham}(M, \omega; L)) \longrightarrow \text{Aut}(\text{HF}_*(L))$$

Outil : le morphisme de Seidel

Définition (Seidel 97, Hu–Lalonde 10, Hu–Lalonde–L. 11)

La représentation / le morphisme de Seidel, respectivement :

$$\pi_1(\text{Ham}(M, \omega)) \rightarrow \text{Aut}(\text{HF}_*(M)) \quad \text{et} \quad \pi_1(\text{Ham}(M, \omega)) \rightarrow \text{HQ}_*(M)^\times$$

et en version lagrangienne :

$$\pi_1(\text{Ham}(M, \omega), \text{Ham}(M, \omega; L)) \longrightarrow \text{Aut}(\text{HF}_*(L))$$

$$\text{et} \quad \pi_1(\text{Ham}(M, \omega), \text{Ham}(M, \omega; L)) \longrightarrow \text{HQ}_*(L)^\times.$$

Outil : le morphisme de Seidel

Définition (Seidel 97, Hu–Lalonde 10, Hu–Lalonde–L. 11)

La représentation / le morphisme de Seidel, respectivement :

$$\pi_1(\text{Ham}(M, \omega)) \rightarrow \text{Aut}(\text{HF}_*(M)) \quad \text{et} \quad \pi_1(\text{Ham}(M, \omega)) \rightarrow \text{HQ}_*(M)^\times$$

et en version lagrangienne :

$$\pi_1(\text{Ham}(M, \omega), \text{Ham}(M, \omega; L)) \longrightarrow \text{Aut}(\text{HF}_*(L))$$

$$\text{et} \quad \pi_1(\text{Ham}(M, \omega), \text{Ham}(M, \omega; L)) \longrightarrow \text{HQ}_*(L)^\times.$$

Soit $\varphi: [0, 1] \rightarrow \text{Ham}(M, \omega)$ telle que $\varphi_0 = \text{Id}$ et $\varphi_1(L) = L$.

$$[x: t \mapsto \phi_H^t(x(0))]$$



Outil : le morphisme de Seidel

Définition (Seidel 97, Hu–Lalonde 10, Hu–Lalonde–L. 11)

La représentation / le morphisme de Seidel, respectivement :

$$\pi_1(\text{Ham}(M, \omega)) \rightarrow \text{Aut}(\text{HF}_*(M)) \quad \text{et} \quad \pi_1(\text{Ham}(M, \omega)) \rightarrow \text{HQ}_*(M)^\times$$

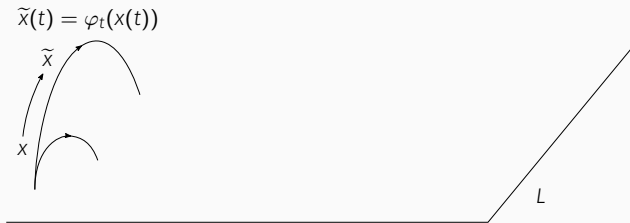
et en version lagrangienne :

$$\pi_1(\text{Ham}(M, \omega), \text{Ham}(M, \omega; L)) \longrightarrow \text{Aut}(\text{HF}_*(L))$$

$$\text{et} \quad \pi_1(\text{Ham}(M, \omega), \text{Ham}(M, \omega; L)) \longrightarrow \text{HQ}_*(L)^\times.$$

Soit $\varphi: [0, 1] \rightarrow \text{Ham}(M, \omega)$ telle que $\varphi_0 = \text{Id}$ et $\varphi_1(L) = L$.

$$[x: t \mapsto \phi_H^t(x(0))] \rightsquigarrow [\tilde{x}: t \mapsto \varphi_t \phi_H^t(x(0))]$$



Outil : le morphisme de Seidel

Définition (Seidel 97, Hu–Lalonde 10, Hu–Lalonde–L. 11)

La représentation / le morphisme de Seidel, respectivement :

$$\pi_1(\text{Ham}(M, \omega)) \rightarrow \text{Aut}(\text{HF}_*(M)) \quad \text{et} \quad \pi_1(\text{Ham}(M, \omega)) \rightarrow \text{HQ}_*(M)^\times$$

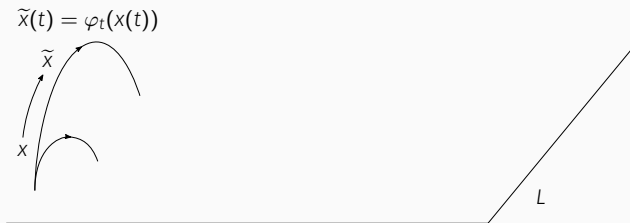
et en version lagrangienne :

$$\pi_1(\text{Ham}(M, \omega), \text{Ham}(M, \omega; L)) \longrightarrow \text{Aut}(\text{HF}_*(L))$$

$$\text{et} \quad \pi_1(\text{Ham}(M, \omega), \text{Ham}(M, \omega; L)) \longrightarrow \text{HQ}_*(L)^\times.$$

Soit $\varphi: [0, 1] \rightarrow \text{Ham}(M, \omega)$ telle que $\varphi_0 = \text{Id}$ et $\varphi_1(L) = L$.

$$[x: t \mapsto \phi_H^t(x(0))] \rightsquigarrow [\tilde{x}: t \mapsto \varphi_t \phi_H^t(x(0)) = \varphi_t \phi_H^t(\tilde{x}(0))]$$



Outil : le morphisme de Seidel

Définition (Seidel 97, Hu–Lalonde 10, Hu–Lalonde–L. 11)

La représentation / le morphisme de Seidel, respectivement :

$$\pi_1(\text{Ham}(M, \omega)) \rightarrow \text{Aut}(\text{HF}_*(M)) \quad \text{et} \quad \pi_1(\text{Ham}(M, \omega)) \rightarrow \text{HQ}_*(M)^\times$$

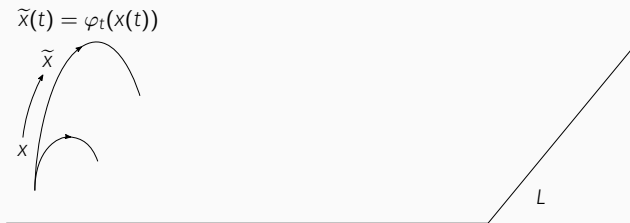
et en version lagrangienne :

$$\pi_1(\text{Ham}(M, \omega), \text{Ham}(M, \omega; L)) \longrightarrow \text{Aut}(\text{HF}_*(L))$$

$$\text{et} \quad \pi_1(\text{Ham}(M, \omega), \text{Ham}(M, \omega; L)) \longrightarrow \text{HQ}_*(L)^\times.$$

Soit $\varphi: [0, 1] \rightarrow \text{Ham}(M, \omega)$ telle que $\varphi_0 = \text{Id}$ et $\varphi_1(L) = L$.

$$[x: t \mapsto \phi_H^t(x(0))] \rightsquigarrow [\tilde{x}: t \mapsto \varphi_t \phi_H^t(x(0)) = \varphi_t \phi_H^t(\tilde{x}(0)) = \phi_H^t(\tilde{x}(0))]$$



Outil : le morphisme de Seidel

Définition (Seidel 97, Hu–Lalonde 10, Hu–Lalonde–L. 11)

La représentation / le morphisme de Seidel, respectivement :

$$\pi_1(\text{Ham}(M, \omega)) \rightarrow \text{Aut}(\text{HF}_*(M)) \quad \text{et} \quad \pi_1(\text{Ham}(M, \omega)) \rightarrow \text{HQ}_*(M)^\times$$

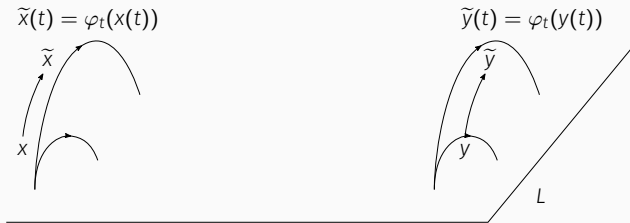
et en version lagrangienne :

$$\pi_1(\text{Ham}(M, \omega), \text{Ham}(M, \omega; L)) \longrightarrow \text{Aut}(\text{HF}_*(L))$$

$$\text{et} \quad \pi_1(\text{Ham}(M, \omega), \text{Ham}(M, \omega; L)) \longrightarrow \text{HQ}_*(L)^\times.$$

Soit $\varphi: [0, 1] \rightarrow \text{Ham}(M, \omega)$ telle que $\varphi_0 = \text{Id}$ et $\varphi_1(L) = L$.

$$[y: t \mapsto \phi_H^t(x(0))] \rightsquigarrow [\tilde{y}: t \mapsto \phi_H^t(\tilde{y}(0))]$$



Outil : le morphisme de Seidel

Définition (Seidel 97, Hu–Lalonde 10, Hu–Lalonde–L. 11)

La représentation / le morphisme de Seidel, respectivement :

$$\pi_1(\text{Ham}(M, \omega)) \rightarrow \text{Aut}(\text{HF}_*(M)) \quad \text{et} \quad \pi_1(\text{Ham}(M, \omega)) \rightarrow \text{HQ}_*(M)^\times$$

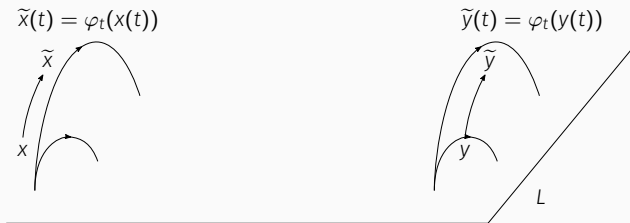
et en version lagrangienne :

$$\pi_1(\text{Ham}(M, \omega), \text{Ham}(M, \omega; L)) \longrightarrow \text{Aut}(\text{HF}_*(L))$$

$$\text{et} \quad \pi_1(\text{Ham}(M, \omega), \text{Ham}(M, \omega; L)) \longrightarrow \text{HQ}_*(L)^\times.$$

Soit $\varphi: [0, 1] \rightarrow \text{Ham}(M, \omega)$ telle que $\varphi_0 = \text{Id}$ et $\varphi_1(L) = L$.

$$\varphi_*: \text{CF}_*(L; H) \rightarrow \text{CF}_*(L; \tilde{H})$$



Outil : le morphisme de Seidel

Définition (Seidel 97, Hu–Lalonde 10, Hu–Lalonde–L. 11)

La représentation / le morphisme de Seidel, respectivement :

$$\pi_1(\text{Ham}(M, \omega)) \rightarrow \text{Aut}(\text{HF}_*(M)) \quad \text{et} \quad \pi_1(\text{Ham}(M, \omega)) \rightarrow \text{HQ}_*(M)^\times$$

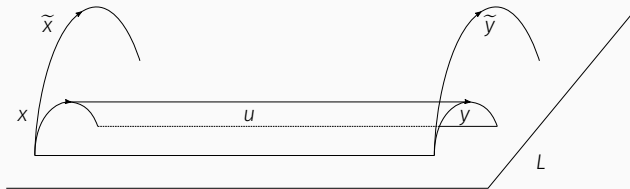
et en version lagrangienne :

$$\pi_1(\text{Ham}(M, \omega), \text{Ham}(M, \omega; L)) \longrightarrow \text{Aut}(\text{HF}_*(L))$$

$$\text{et} \quad \pi_1(\text{Ham}(M, \omega), \text{Ham}(M, \omega; L)) \longrightarrow \text{HQ}_*(L)^\times.$$

Soit $\varphi: [0, 1] \rightarrow \text{Ham}(M, \omega)$ telle que $\varphi_0 = \text{Id}$ et $\varphi_1(L) = L$.

u telle que $\bar{\partial}_{J, H} u = 0$



Outil : le morphisme de Seidel

Définition (Seidel 97, Hu–Lalonde 10, Hu–Lalonde–L. 11)

La représentation / le morphisme de Seidel, respectivement :

$$\pi_1(\text{Ham}(M, \omega)) \rightarrow \text{Aut}(\text{HF}_*(M)) \quad \text{et} \quad \pi_1(\text{Ham}(M, \omega)) \rightarrow \text{HQ}_*(M)^\times$$

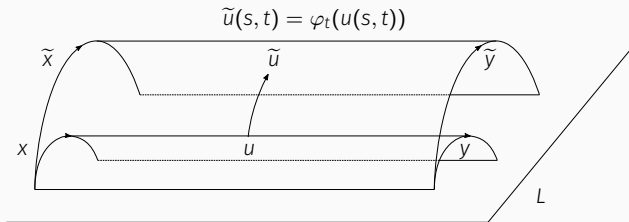
et en version lagrangienne :

$$\pi_1(\text{Ham}(M, \omega), \text{Ham}(M, \omega; L)) \longrightarrow \text{Aut}(\text{HF}_*(L))$$

$$\text{et} \quad \pi_1(\text{Ham}(M, \omega), \text{Ham}(M, \omega; L)) \longrightarrow \text{HQ}_*(L)^\times.$$

Soit $\varphi: [0, 1] \rightarrow \text{Ham}(M, \omega)$ telle que $\varphi_0 = \text{Id}$ et $\varphi_1(L) = L$.

u telle que $\bar{\partial}_{J, H} = 0 \rightsquigarrow [\tilde{u}: (s, t) \mapsto \varphi_t(u(s, t))]$ telle que $\bar{\partial}_{J, \tilde{H}} = 0$



Outil : le morphisme de Seidel

Définition (Seidel 97, Hu–Lalonde 10, Hu–Lalonde–L. 11)

La représentation / le morphisme de Seidel, respectivement :

$$\pi_1(\text{Ham}(M, \omega)) \rightarrow \text{Aut}(\text{HF}_*(M)) \quad \text{et} \quad \pi_1(\text{Ham}(M, \omega)) \rightarrow \text{HQ}_*(M)^\times$$

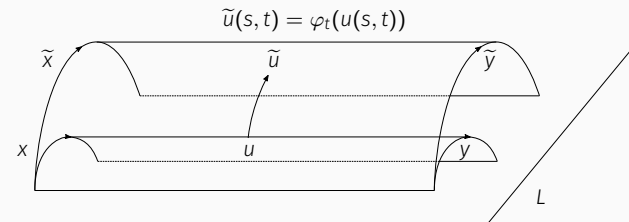
et en version lagrangienne :

$$\pi_1(\text{Ham}(M, \omega), \text{Ham}(M, \omega; L)) \longrightarrow \text{Aut}(\text{HF}_*(L))$$

$$\text{et} \quad \pi_1(\text{Ham}(M, \omega), \text{Ham}(M, \omega; L)) \longrightarrow \text{HQ}_*(L)^\times.$$

Soit $\varphi: [0, 1] \rightarrow \text{Ham}(M, \omega)$ telle que $\varphi_0 = \text{Id}$ et $\varphi_1(L) = L$.

$$\rightsquigarrow \varphi_*: \text{HF}_*(L; H, J) \rightarrow \text{HF}_*(L; \tilde{H}, \tilde{J})$$



Outil : le morphisme de Seidel

Définition (Seidel 97, Hu–Lalonde 10, Hu–Lalonde–L. 11)

La représentation / le morphisme de Seidel, respectivement :

$$\pi_1(\text{Ham}(M, \omega)) \rightarrow \text{Aut}(\text{HF}_*(M)) \quad \text{et} \quad \pi_1(\text{Ham}(M, \omega)) \rightarrow \text{HQ}_*(M)^\times$$

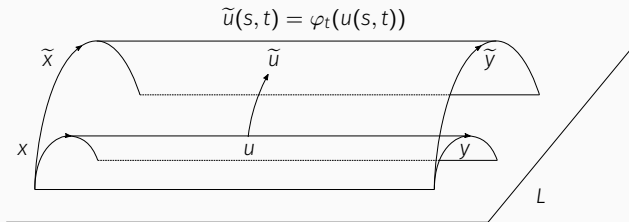
et en version lagrangienne :

$$\pi_1(\text{Ham}(M, \omega), \text{Ham}(M, \omega; L)) \longrightarrow \text{Aut}(\text{HF}_*(L))$$

$$\text{et} \quad \pi_1(\text{Ham}(M, \omega), \text{Ham}(M, \omega; L)) \longrightarrow \text{HQ}_*(L)^\times.$$

Soit $\varphi: [0, 1] \rightarrow \text{Ham}(M, \omega)$ telle que $\varphi_0 = \text{Id}$ et $\varphi_1(L) = L$.

$$\rightsquigarrow \varphi_*: \text{HF}_*(L; H, J) \rightarrow \text{HF}_*(L; \tilde{H}, \tilde{J}) \in \text{Aut}(\text{HF}_*(L))$$



Calcul du morphisme de Seidel

Lemme

Si L est asphérique, $\varphi_ = \text{Id}$.*

Calcul du morphisme de Seidel

Lemme

Si L est asphérique, $\varphi_ = \text{Id}$.*

Théorème (McDuff–Tolman 06)

(M, ω) = variété symplectique, torique, de dimension 4, NEF

Son morphisme de Seidel est compliqué.

Calcul du morphisme de Seidel

Lemme

Si L est asphérique, $\varphi_ = \text{Id}$.*

Théorème (McDuff–Tolman 06, Anjos–L. 18)

(M, ω) = variété symplectique, torique, de dimension 4, NEF

Son morphisme de Seidel est compliqué mais calculable explicitement.

Calcul du morphisme de Seidel

Lemme

Si L est asphérique, $\varphi_ = \text{Id}$.*

Théorème (McDuff–Tolman 06, Anjos–L. 18)

(M, ω) = variété symplectique, torique, de dimension 4, NEF

Son morphisme de Seidel est compliqué mais calculable explicitement.

Corollaire

L'anneau $\text{HQ}_(M, \omega)$ se calcule explicitement*

Calcul du morphisme de Seidel

Lemme

Si L est asphérique, $\varphi_ = \text{Id}$.*

Théorème (McDuff–Tolman 06, Anjos–L. 18)

(M, ω) = variété symplectique, torique, de dimension 4, NEF

Son morphisme de Seidel est compliqué mais calculable explicitement.

Corollaire

L'anneau $\text{HQ}_(M, \omega)$ se calcule explicitement et le potentiel de Landau–Ginzburg de (M, ω) également.*

Calcul du morphisme de Seidel

Lemme

Si L est asphérique, $\varphi_ = \text{Id}$.*

Théorème (McDuff–Tolman 06, Anjos–L. 18)

(M, ω) = variété symplectique, torique, de dimension 4, NEF

Son morphisme de Seidel est compliqué mais calculable explicitement.

Corollaire

L'anneau $\text{HQ}_(M, \omega)$ se calcule explicitement et le potentiel de Landau–Ginzburg de (M, ω) également.*

Corollaire (Anjos–L. 17)

Le morphisme de Seidel de certains éclatements en 2 points de $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ n'est pas injectif.

Calcul du morphisme de Seidel

Lemme

Si L est asphérique, $\varphi_ = \text{Id}$.*

Théorème (McDuff–Tolman 06, Anjos–L. 18)

(M, ω) = variété symplectique, torique, de dimension 4, NEF

Son morphisme de Seidel est compliqué mais calculable explicitement.

Corollaire

L'anneau $\text{HQ}_(M, \omega)$ se calcule explicitement et le potentiel de Landau–Ginzburg de (M, ω) également.*

Corollaire (Anjos–L. 17)

Le morphisme de Seidel de certains éclatements en 2 points de $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ n'est pas injectif.

Corollaire (Anjos–L. 17)

Le morphisme de Seidel des surfaces d'Hirzebruch est injectif.

Rigidité C^0 des sous-variétés coisotropes

Théorème (Gromov–Eliashberg)

Un *difféomorphisme* obtenu comme limite C^0 de symplectomorphismes est un symplectomorphisme

Théorème (Gromov–Eliashberg)

Un difféomorphisme obtenu comme limite C^0 de symplectomorphismes est un symplectomorphisme

Définition

Homéomorphisme symplectique = limite C^0 de symplectomorphismes

Théorème (Gromov–Eliashberg)

Un difféomorphisme obtenu comme limite C^0 de symplectomorphismes est un symplectomorphisme

Définition

Homéomorphisme symplectique = limite C^0 de symplectomorphismes

Définition (peu satisfaisante)

Haméotopie ϕ = limite C^0 d'isotopies hamiltoniennes ϕ_{H_n}

Théorème (Gromov–Eliashberg)

Un difféomorphisme obtenu comme limite C^0 de symplectomorphismes est un symplectomorphisme

Définition

Homéomorphisme symplectique = limite C^0 de symplectomorphismes

Définition (Müller–Oh 07)

Haméotopie ϕ = limite C^0 d'isotopies hamiltoniennes ϕ_{H_n} dont les générateurs H_n convergent vers $H \in C^0(\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times M)$.

Théorème (Gromov–Eliashberg)

Un difféomorphisme obtenu comme limite C^0 de symplectomorphismes est un symplectomorphisme

Définition

Homéomorphisme symplectique = limite C^0 de symplectomorphismes

Définition (Müller–Oh 07)

Haméotopie ϕ = limite C^0 d'isotopies hamiltoniennes ϕ_{H_n} dont les générateurs H_n convergent vers $H \in C^0(\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times M)$.

Théorème (Müller–Oh)

H induit une unique haméotopie ϕ

Théorème (Gromov–Eliashberg)

Un difféomorphisme obtenu comme limite C^0 de symplectomorphismes est un symplectomorphisme

Définition

Homéomorphisme symplectique = limite C^0 de symplectomorphismes

Définition (Müller–Oh 07)

Haméotopie ϕ = limite C^0 d'isotopies hamiltoniennes ϕ_{H_n} dont les générateurs H_n convergent vers $H \in C^0(\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times M)$.

Théorème (Müller–Oh + Viterbo)

H induit une unique haméotopie ϕ et vice-versa.

Rigidité coisotrope

Définition

$C \subset (M, \omega)$ est **coisotrope** si $TC \supset (TC)^{\perp \omega}$

Rigidité coisotrope

Définition

$C \subset (M, \omega)$ est coisotrope si $TC \supset (TC)^{\perp \omega}$

$\Rightarrow C$ admet un **feuilletage caractéristique**

Rigidité coisotrope

Définition

$C \subset (M, \omega)$ est coisotrope si $TC \supset (TC)^\perp$

$\Rightarrow C$ admet un feuilletage caractéristique à feuilles **isotropes**.

Rigidité coisotrope

Définition

$C \subset (M, \omega)$ est coisotrope si $TC \supset (TC)^\perp$

$\Rightarrow C$ admet un feuilletage caractéristique à feuilles isotropes.

Exemple

- M , feuilles = points

Rigidité coisotrope

Définition

$C \subset (M, \omega)$ est coisotrope si $TC \supset (TC)^\perp$

$\Rightarrow C$ admet un feuilletage caractéristique à feuilles isotropes.

Exemple

- M , feuilles = points
- H hypersurface, feuilles de dimension 1

Rigidité coisotrope

Définition

$C \subset (M, \omega)$ est coisotrope si $TC \supset (TC)^\perp$

$\Rightarrow C$ admet un feuilletage caractéristique à feuilles isotropes.

Exemple

- M , feuilles = points
- H hypersurface, feuilles de dimension 1
- L lagrangienne, feuille = L

Rigidité coisotrope

Définition

$C \subset (M, \omega)$ est coisotrope si $TC \supset (TC)^\perp$

$\Rightarrow C$ admet un feuilletage caractéristique à feuilles isotropes.

Exemple

- M , feuilles = points
- H hypersurface, feuilles de dimension 1
- L lagrangienne, feuille = L

Théorème (Humilière–L.–Seyfaddini 15b)

$C \subset (M, \omega)$ coisotrope, $\{\psi_k\}_k \subset \text{Symp}(M, \omega)$ converge C^0 vers ψ .

Si $\psi(C)$ est lisse, il est coisotrope et $\psi(\mathcal{F}_C) = \mathcal{F}_{\psi(C)}$.

Rigidité coisotrope

Définition

$C \subset (M, \omega)$ est coisotrope si $TC \supset (TC)^\perp$

$\Rightarrow C$ admet un feuilletage caractéristique à feuilles isotropes.

Exemple

- M , feuilles = points
- H hypersurface, feuilles de dimension 1
- L lagrangienne, feuille = L

Théorème (Humilière–L.–Seyfaddini 15b)

$C \subset (M, \omega)$ coisotrope, $\{\psi_k\}_k \subset \text{Symp}(M, \omega)$ converge C^0 vers ψ .

Si $\psi(C)$ est lisse, il est coisotrope et $\psi(\mathcal{F}_C) = \mathcal{F}_{\psi(C)}$.

Remarque

- *Laudenbach–Sikorav (lagrangiennes, 94)*

Rigidité coisotrope

Définition

$C \subset (M, \omega)$ est coisotrope si $TC \supset (TC)^\perp \omega$

$\Rightarrow C$ admet un feuilletage caractéristique à feuilles isotropes.

Exemple

- M , feuilles = points
- H hypersurface, feuilles de dimension 1
- L lagrangienne, feuille = L

Théorème (Humilière–L.–Seyfaddini 15b)

$C \subset (M, \omega)$ coisotrope, $\{\psi_k\}_k \subset \text{Symp}(M, \omega)$ converge C^0 vers ψ .

Si $\psi(C)$ est lisse, il est coisotrope et $\psi(\mathcal{F}_C) = \mathcal{F}_{\psi(C)}$.

Remarque

- *Laudenbach–Sikorav (lagrangiennes, 94)* et *Opshtein (hypersurfaces, 09)*

Rigidité coisotrope

Définition

$C \subset (M, \omega)$ est coisotrope si $TC \supset (TC)^\perp$

$\Rightarrow C$ admet un feuilletage caractéristique à feuilles isotropes.

Exemple

- M , feuilles = points
- H hypersurface, feuilles de dimension 1
- L lagrangienne, feuille = L

Théorème (Humilière–L.–Seyfaddini 15b)

$C \subset (M, \omega)$ coisotrope, $\{\psi_k\}_k \subset \text{Symp}(M, \omega)$ converge C^0 vers ψ .

Si $\psi(C)$ est lisse, il est coisotrope et $\psi(\mathcal{F}_C) = \mathcal{F}_{\psi(C)}$.

Remarque

- *Laudenbach–Sikorav (lagrangiennes, 94)* et *Opshtein (hypersurfaces, 09)* : même combat

Rigidité coisotrope

Définition

$C \subset (M, \omega)$ est coisotrope si $TC \supset (TC)^\perp$

$\Rightarrow C$ admet un feuilletage caractéristique à feuilles isotropes.

Exemple

- M , feuilles = points
- H hypersurface, feuilles de dimension 1
- L lagrangienne, feuille = L

Théorème (Humilière–L.–Seyfaddini 15b)

$C \subset (M, \omega)$ coisotrope, $\{\psi_k\}_k \subset \text{Symp}(M, \omega)$ converge C^0 vers ψ .

Si $\psi(C)$ est lisse, il est coisotrope et $\psi(\mathcal{F}_C) = \mathcal{F}_{\psi(C)}$.

Remarque

- *Laudenbach–Sikorav (lagrangiennes, 94)* et *Opshtein (hypersurfaces, 09)* : même combat
- *Résultat local*

Rigidité coisotrope

Définition

$C \subset (M, \omega)$ est coisotrope si $TC \supset (TC)^\perp$

$\Rightarrow C$ admet un feuilletage caractéristique à feuilles isotropes.

Exemple

- M , feuilles = points
- H hypersurface, feuilles de dimension 1
- L lagrangienne, feuille = L

Théorème (Humilière–L.–Seyfaddini 15b)

$C \subset (M, \omega)$ coisotrope, $\{\psi_k\}_k \subset \text{Symp}(M, \omega)$ converge C^0 vers ψ .

Si $\psi(C)$ est lisse, il est coisotrope et $\psi(\mathcal{F}_C) = \mathcal{F}_{\psi(C)}$.

Remarque

- *Laudenbach–Sikorav (lagrangiennes, 94) et Opshtein (hypersurfaces, 09) : même combat*
- *Résultat local*
- *$\psi(C)$ est lisse, $\psi(\mathcal{F}_C)$ lisse*

Rigidité coisotrope (via la dynamique "hamiltonienne C^0 ")

Théorème (Humilière–L.–Seyfaddini 15b)

$C \subset (M, \omega)$ coisotrope, ϕ_H haméotopie engendrée par $H \in C^0$.

$H|_C$ fonction du temps $\iff \phi_H(C) = C$ et $\phi_H^t(p) \in \mathcal{F}(p)$.

Rigidité coisotrope (via la dynamique "hamiltonienne C^0 ")

Théorème (Humilière–L.–Seyfaddini 15b)

$C \subset (M, \omega)$ coisotrope, ϕ_H haméotopie engendrée par $H \in C^0$.

$H|_C$ fonction du temps $\iff \phi_H(C) = C$ et $\phi_H^t(p) \in \mathcal{F}(p)$.

Corollaire : Unicité des générateurs continus.

$C = M : \phi_H^t = \text{Id} \iff H$ fonction du temps.



Rigidité coisotrope (via la dynamique “hamiltonienne C^0 ”)

Théorème (Humilière–L.–Seyfaddini 15b)

$C \subset (M, \omega)$ coisotrope, ϕ_H haméotopie engendrée par $H \in C^0$.
 $H|_C$ fonction du temps $\iff \phi_H(C) = C$ et $\phi_H^t(p) \in \mathcal{F}(p)$.

Corollaire : Unicité des générateurs continus.

$C = M : \phi_H^t = \text{Id} \iff H$ fonction du temps. □

Corollaire : Rigidité coisotrope.

• Caractérisation via fonctions lisses sur M

C' coisotrope si $\phi_H(C') = C'$ pour tout $H \in C^\infty(M)$ t.q. $H|_{C'} = c_0$
et localement $\mathcal{F}'(p) \stackrel{\text{loc}}{=} \{\phi_H^t(p) \mid t \geq 0, H \in C^\infty(M), H|_{C'} = 0\}$.

□

Rigidité coisotrope (via la dynamique "hamiltonienne C^0 ")

Théorème (Humilière–L.–Seyfaddini 15b)

$C \subset (M, \omega)$ coisotrope, ϕ_H haméotopie engendrée par $H \in C^0$.
 $H|_C$ fonction du temps $\iff \phi_H(C) = C$ et $\phi_H^t(p) \in \mathcal{F}(p)$.

Corollaire : Unicité des générateurs continus.

$C = M : \phi_H^t = \text{Id} \iff H$ fonction du temps. □

Corollaire : Rigidité coisotrope.

- Caractérisation via fonctions lisses sur M

C' coisotrope si $\phi_H(C') = C'$ pour tout $H \in C^\infty(M)$ t.q. $H|_{C'} = c_0$
et localement $\mathcal{F}'(p) \stackrel{\text{loc}}{=} \{\phi_H^t(p) \mid t \geq 0, H \in C^\infty(M), H|_{C'} = 0\}$.

- $C' = \psi(C)$ lisse et $H \in C^\infty(M)$ t.q. $H|_{C'} = c_0$.

$\rightsquigarrow K = H \circ \psi : K|_C = c_0$ avec C coisotrope, mais $K \in C^0(M)$. □

Rigidité coisotrope (via la dynamique "hamiltonienne C^0 ")

Théorème (Humilière–L.–Seyfaddini 15b)

$C \subset (M, \omega)$ coisotrope, ϕ_H haméotopie engendrée par $H \in C^0$.
 $H|_C$ fonction du temps $\iff \phi_H(C) = C$ et $\phi_H^t(p) \in \mathcal{F}(p)$.

Corollaire : Unicité des générateurs continus.

$C = M : \phi_H^t = \text{Id} \iff H$ fonction du temps. □

Corollaire : Rigidité coisotrope.

- Caractérisation via fonctions lisses sur M

C' coisotrope si $\phi_H(C') = C'$ pour tout $H \in C^\infty(M)$ t.q. $H|_{C'} = c_0$
et localement $\mathcal{F}'(p) \stackrel{\text{loc}}{=} \{\phi_H^t(p) \mid t \geq 0, H \in C^\infty(M), H|_{C'} = 0\}$.

- $C' = \psi(C)$ lisse et $H \in C^\infty(M)$ t.q. $H|_{C'} = c_0$.

$\rightsquigarrow K = H \circ \psi : K|_C = c_0$ avec C coisotrope, mais $K \in C^0(M)$.

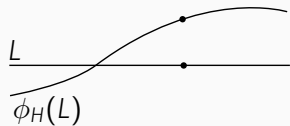
- K générateur continu de l'haméotopie : $\phi_K = \psi^{-1} \phi_H \psi$

On peut donc appliquer le théorème (\implies) si dessus sur C . □

Rigidité coisotrope (via la dynamique "hamiltonienne C^0 ")

Démonstration de \Rightarrow .

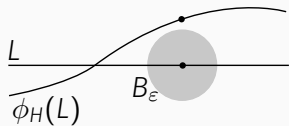
- $C = L$ lagrangienne



Rigidité coisotrope (via la dynamique "hamiltonienne C^0 ")

Démonstration de \Rightarrow .

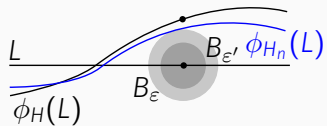
- $C = L$ lagrangienne



Rigidité coisotrope (via la dynamique "hamiltonienne C^0 ")

Démonstration de \Rightarrow .

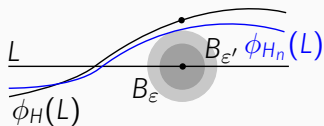
- $C = L$ lagrangienne



Rigidité coisotrope (via la dynamique "hamiltonienne C^0 ")

Démonstration de \Rightarrow .

- $C = L$ lagrangienne



inégalité énergie-capacité "classique"

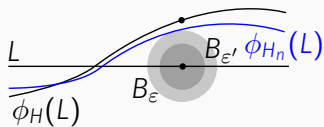
$$\gamma(L, \phi_{H_n}(L)) \geq c_{LR}(B'_\epsilon; 0_L)$$



Rigidité coisotrope (via la dynamique "hamiltonienne C^0 ")

Démonstration de \Rightarrow .

- $C = L$ lagrangienne



inégalité énergie-capacité "classique"

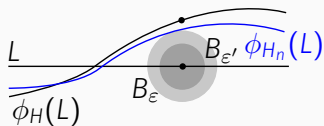
$$\text{osc}_L(H_n) \geq \gamma(L, \phi_{H_n}(L)) \geq c_{LR}(B_{\varepsilon'}; 0_L)$$



Rigidité coisotrope (via la dynamique "hamiltonienne C^0 ")

Démonstration de \Rightarrow .

- $C = L$ lagrangienne



inégalité énergie-capacité "classique"

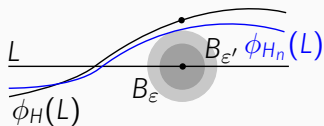
$$\text{osc}_L(H_n) \geq \gamma(L, \phi_{H_n}(L)) \geq \frac{\pi\epsilon'^2}{2}$$



Rigidité coisotrope (via la dynamique "hamiltonienne C^0 ")

Démonstration de \Rightarrow .

- $C = L$ lagrangienne



inégalité énergie-capacité "classique"

$$\text{osc}_L(H_n) \geq \gamma(L, \phi_{H_n}(L)) \geq \frac{\pi\epsilon'^2}{2}$$

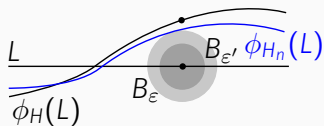
$$\Rightarrow \text{osc}_L(H) \geq \frac{\pi\epsilon'^2}{2} > 0 !$$



Rigidité coisotrope (via la dynamique “hamiltonienne C^0 ”)

Démonstration de \Rightarrow .

- $C = L$ lagrangienne



inégalité énergie-capacité “classique”

$$\text{osc}_L(H_n) \geq \gamma(L, \phi_{H_n}(L)) \geq \frac{\pi\epsilon'^2}{2}$$

$$\Rightarrow \text{osc}_L(H) \geq \frac{\pi\epsilon'^2}{2} > 0!$$

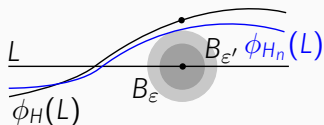
- “Everything is a Lagrangian submanifold!” A. Weinstein



Rigidité coisotrope (via la dynamique "hamiltonienne C^0 ")

Démonstration de \Rightarrow .

- $C = L$ lagrangienne



inégalité énergie-capacité "classique"

$$\text{osc}_L(H_n) \geq \gamma(L, \phi_{H_n}(L)) \geq \frac{\pi\epsilon'^2}{2}$$

$$\Rightarrow \text{osc}_L(H) \geq \frac{\pi\epsilon'^2}{2} > 0!$$

- "Everything is a Lagrangian submanifold!" A. Weinstein

$$\mathcal{F}_0(0) = \{(0, \dots, 0, x_{n-k+1}, \dots, x_n; 0, \dots, 0)\} \subset \mathbb{R}^{2n}$$

est l'intersection des $n - k$ lagrangiennes

$$\Lambda_i = \{(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n; 0, \dots, 0, y_i, 0, \dots, 0)\}$$

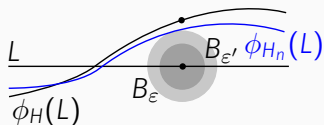
pour $1 \leq i \leq n - k$.

□

Rigidité coisotrope (via la dynamique “hamiltonienne C^0 ”)

Démonstration de \Rightarrow .

- $C = L$ lagrangienne



inégalité énergie-capacité “classique”

$$\text{osc}_L(H_n) \geq \gamma(L, \phi_{H_n}(L)) \geq \frac{\pi\epsilon'^2}{2}$$

$$\Rightarrow \text{osc}_L(H) \geq \frac{\pi\epsilon'^2}{2} > 0!$$

- “Everything is a Lagrangian submanifold!” A. Weinstein

$$\mathcal{F}_0(0) = \{(0, \dots, 0, x_{n-k+1}, \dots, x_n; 0, \dots, 0)\} \subset \mathbb{R}^{2n}$$

est l’intersection des $n - k$ lagrangiennes

$$\Lambda_i = \{(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n; 0, \dots, 0, y_i, 0, \dots, 0)\}$$

pour $1 \leq i \leq n - k$. □

Démonstration de \Leftarrow .

Même esprit mais avec inégalité énergie-capacité “duale” □

Question

Quotienter C par \mathcal{F} définit une variété symplectique \tilde{C} .

Rigidité coisotrope et quotients

Question

Quotienter C par \mathcal{F} définit une variété symplectique \tilde{C} .

Rigidité coisotrope : si $\psi(C)$ est lisse, ψ descend à \tilde{C} .

Rigidité coisotrope et quotients

Question

Quotienter C par \mathcal{F} définit une variété symplectique \tilde{C} .

Rigidité coisotrope : si $\psi(C)$ est lisse, ψ descend à \tilde{C} .

À quel point l'homéomorphisme induit $\tilde{\psi}$ est-il symplectique ?

Rigidité coisotrope et quotients

Question

Quotienter C par \mathcal{F} définit une variété symplectique \tilde{C} .

Rigidité coisotrope : si $\psi(C)$ est lisse, ψ descend à \tilde{C} .

À quel point l'homéomorphisme induit $\tilde{\psi}$ est-il symplectique ?

Proposition (facile!)

Si $\tilde{\psi}$ est lisse, $\tilde{\psi}$ est un symplectomorphisme.

Rigidité coisotrope et quotients

Question

Quotienter C par \mathcal{F} définit une variété symplectique \tilde{C} .

Rigidité coisotrope : si $\psi(C)$ est lisse, ψ descend à \tilde{C} .

À quel point l'homéomorphisme induit $\tilde{\psi}$ est-il symplectique ?

Proposition (facile!)

Si $\tilde{\psi}$ est lisse, $\tilde{\psi}$ est un symplectomorphisme.

Théorème (Buhovsky–Opshtein 16)

Si C hypersurface, $\tilde{\psi}$ “ne tasse pas”.

Rigidité coisotrope et quotients

Question

Quotienter C par \mathcal{F} définit une variété symplectique \tilde{C} .

Rigidité coisotrope : si $\psi(C)$ est lisse, ψ descend à \tilde{C} .

À quel point l'homéomorphisme induit $\tilde{\psi}$ est-il symplectique ?

Proposition (facile !)

Si $\tilde{\psi}$ est lisse, $\tilde{\psi}$ est un symplectomorphisme.

Théorème (Buhovsky–Opshtein 16)

Si C hypersurface, $\tilde{\psi}$ “ne tasse pas”.

Théorème (Humilière–L.–Seyfaddini 16)

Si $C = \mathbb{T}^{2k_1+k_2}$ dans $\mathbb{T}^{2(k_1+k_2)}$, $\tilde{\psi}$ préserve la capacité spectrale.

Rigidité coisotrope et quotients

Question

Quotienter C par \mathcal{F} définit une variété symplectique \tilde{C} .

Rigidité coisotrope : si $\psi(C)$ est lisse, ψ descend à \tilde{C} .

À quel point l'homéomorphisme induit $\tilde{\psi}$ est-il symplectique ?

Proposition (facile !)

Si $\tilde{\psi}$ est lisse, $\tilde{\psi}$ est un symplectomorphisme.

Théorème (Buhovsky–Opshtein 16)

Si C hypersurface, $\tilde{\psi}$ “ne tasse pas”.

Théorème (Humilière–L.–Seyfaddini 16)

Si $C = \mathbb{T}^{2k_1+k_2}$ dans $\mathbb{T}^{2(k_1+k_2)}$, $\tilde{\psi}$ préserve la capacité spectrale.

Remarque (Corollaire de Ekeland–Hofer 89)

Un difféo est (anti-)symplectique \iff il préserve une capacité.

Projets et perspectives

- Avec S. Sandon, invariants spectraux de contact.

- Avec S. Sandon, invariants spectraux de contact.
- Modules de persistance et suites spectrales de Barraud–Cornea.

- Avec S. Sandon, invariants spectraux de contact.
- Modules de persistence et suites spectrales de Barraud–Cornea.
- Avec A. Abbondandolo, opérations sur les modules de persistence comme modules de persistence.

Merci!