THEORIE CLASSIQUE

$(X_n)_n$ une suite i.i.d. de fonction de répartition F, $M_n = \max_{i=1,n}(X_i)$
Théorème S'il existe des suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ telles que

$$P((M_n - b_n)/a_n \leq z) \to G(z) \text{ quand } n \to \infty$$

alors G appartient à l'une des familles suivantes :
i) $G(z) = \exp\left\{-\exp\left[-\left(\frac{z-b}{a}\right)\right]\right\}$, $-\infty < z < \infty$;

ii) $G(z) = \begin{cases} 0 & z \leq b \\ \exp\left\{-\left(\frac{z-b}{a}\right)^{-\alpha}\right\} & z > b \end{cases}$;

iii) $G(z) = \begin{cases} \exp\left\{-\left[-\left(\frac{z-b}{a}\right)^{\alpha}\right]\right\} & z < b \\ 1 & z \geq b \end{cases}$;

pour des paramètres $a > 0$, b et dans les familles ii) et iii), $\alpha > 0$.

THEORIE CLASSIQUE

Famille GEV :

$$G(z) = \exp\left\{-\left[1+\xi\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)\right]^{-1/\xi}\right\}$$

pour $\{z, 1+\xi(z-\mu)/\sigma > 0\}$, $-\infty < \mu < \infty$, $\sigma > 0$ et $-\infty < \xi < \infty$.
Théorème S'il existe des suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ telles que

$$P((M_n - b_n)/a_n \leq z) \to G(z) \text{ quand } n \to \infty$$

alors G est une GEV.

MODELES à SEUILS

$(X_n)_n$ une suite i.i.d. de fonction de répartition F, $M_n = \max_{i=1,n}(X_i)$ qui vérifie $P(M_n < z) \approx G(z)$, G GEV.

Théorème
Pour u assez grand la loi de $(X-u)$ conditionnellement à $X > u$ est approximativement

$$H(y) = 1 - \left(1 + \frac{\xi y}{\tilde{\sigma}}\right)^{-1/\xi} \quad \{y, y > 0 \text{ et } (1 + \xi y/\tilde{\sigma}) > 0\}$$

où $\tilde{\sigma} = \sigma + \xi(u - \mu)$.
H appartient à la famille de Pareto Généralisée (GPD).

EXTREMES MULTIVARIES

$(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ suite de vecteurs indépendants de loi $F(x, y)$ de marginales Fréchet unité.
$M_{x,n} = \max_{i=1,n}\{X_i\}$ et $M_{y,n} = \max_{i=1,n}\{Y_i\}$, $\mathbf{M}_n = (M_{x,n}/n, M_{y,n}/n)$.

Théorème
Si $P(M_{x,n}/n < x, M_{y,n}/n < y) \to G(x, y)$ en loi alors G est de la forme

$$G(x, y) = \exp\{-V(x, y)\}, \quad x > 0, \quad y > 0$$

où

$$V(x, y) = 2\int_0^1 \max\left(\frac{w}{x}, \frac{1-w}{y}\right) dH(w)$$

et H est une loi sur [0,1] vérifiant $\int_0^1 w dH(w) = 1/2$