Etude critique de deux modèles de fonctions aléatoires max-stables

C. Lantuéjoul
christian.lantuejoul@ensmp.fr

Centre de Géostatistique
Ecole des Mines de Paris

Introduction

Source d'inspiration:

Etude de deux modèles de fonctions aléatoires proposées par M. Schlather dans "Models for stationary max-stable random fields" (Extremes, Vol. 5-1, pp. 33-44, 2002).

– fonctions aléatoires extrêmes

– fonctions aléatoires tempêtes

Questions:

– pertinence des modèles

– lois spatiales

– simulation

Fonctions aléatoires extrêmes

Definition

Ingrédients de base:

– Π processus de Poisson homogène de densité μ sur $I\!R_+$;

– $\big(Y_t,\ t \in I\!R_+\big)$ copies indépendantes d'une même fonction aléatoire stationnaire Y définie sur $I\!R^d$.

Définition:

$$Z(x) = \sup_{t \in \Pi} \frac{Y_t(x)}{t} \qquad x \in I\!R^d$$

Propriétés

– si $P\{Y > 0\} = 0$, alors $Z = 0$ p.s.;

– si $P\{Y > 0\} > 0$, alors $Z > 0$ p.s., mais peut être infinie;

– si $0 < E\{\max(Y, 0)\} < \infty$, alors $0 < Z < \infty$ p.s.

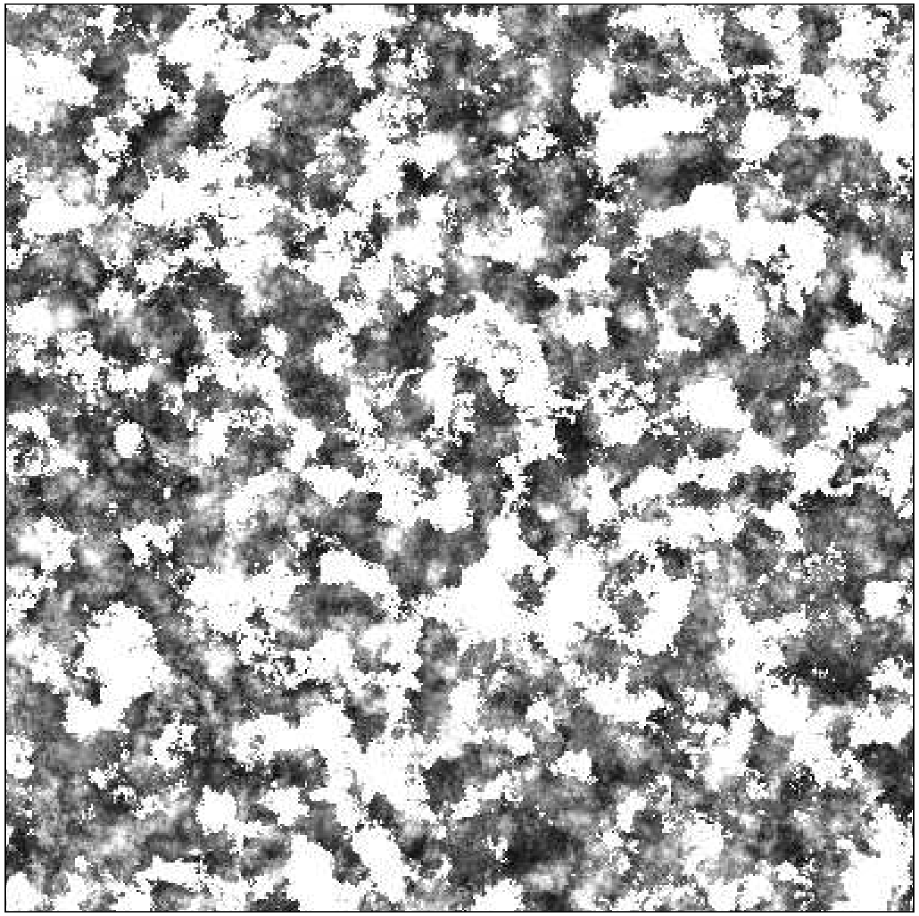
Dans ce cas, Z est une fonction aléatoire stationnaire à loi marginale Fréchet d'ordre 1:

$$P\{Z(x) < z\} = \exp\left(-\frac{\mu E\{\max(Y,0)\}}{z}\right)$$

Plus généralement, la loi spatiale de Z est donnée par

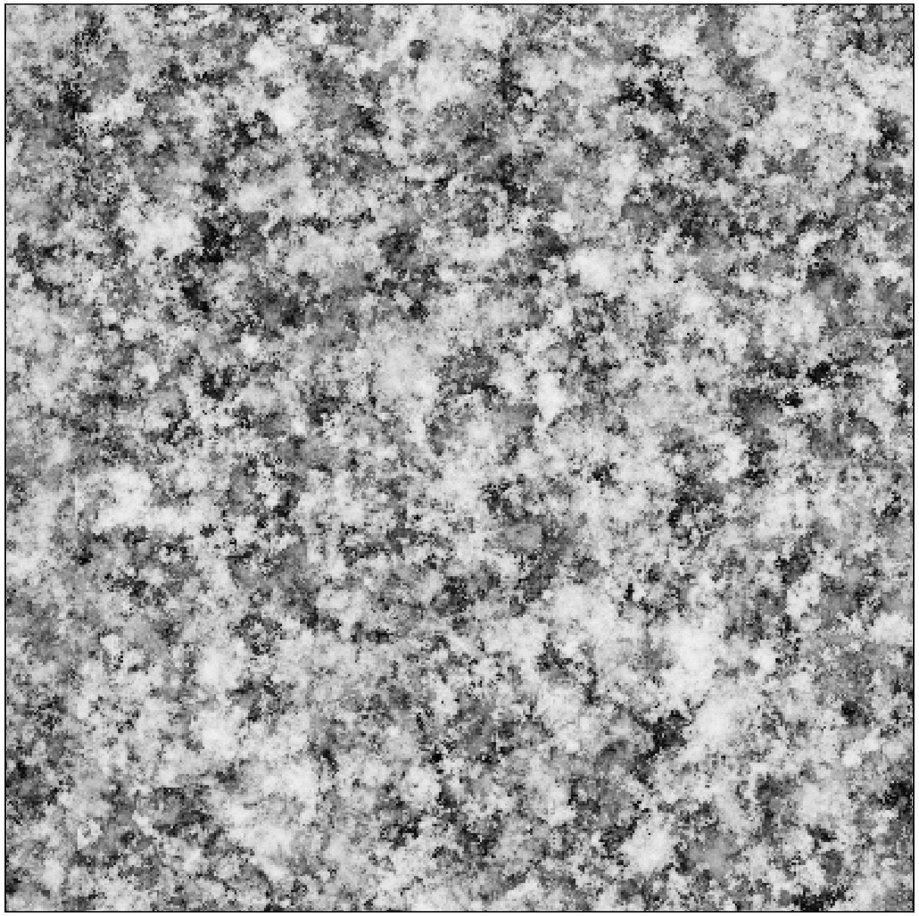
$$P\{\cap_{i=1}^n Z(x_i) < z_i\} = \exp\left(-\mu \int_0^\infty \left[1 - P\{\cap_{i=1}^n Y(x_i) < t z_i\}\right] dt\right)$$

Exemple de fonction aléatoire extrême gaussienne



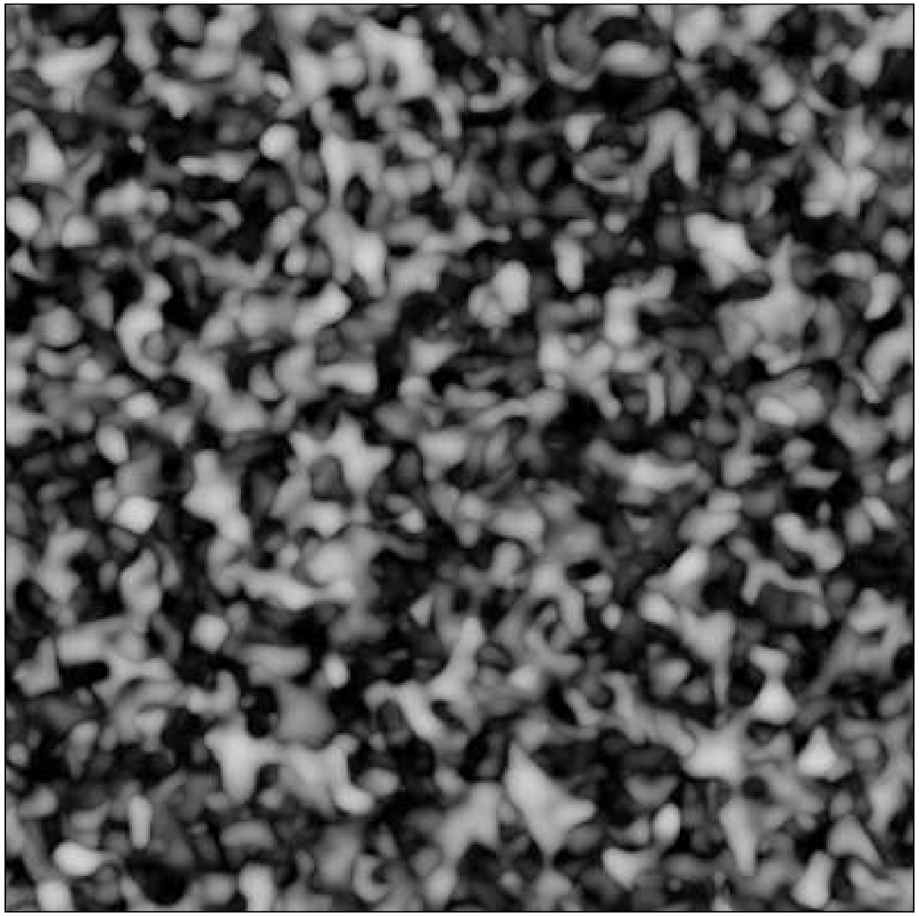
Variogramme sphérique, facteur d'échelle = 10
Champ 400 x 400

Exemple de fonction aléatoire extrême gaussienne



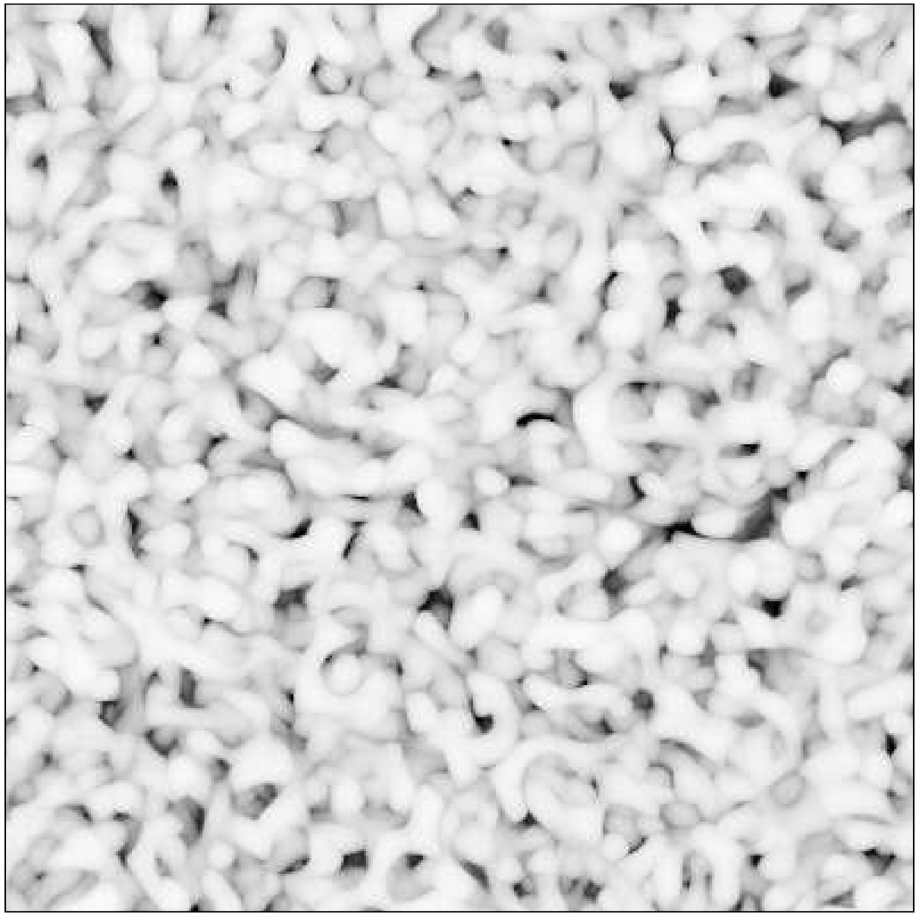
Variogramme exponentiel, facteur d'échelle = 6.325
Champ 400 x 400

Exemple de fonction aléatoire extrême gaussienne



Variogramme gaussien, facteur d'échelle = 8.944
Champ 400 x 400

Exemple de fonction aléatoire extrême gaussienne



Variogramme sinus cardinal, facteur d'échelle $= 3.651$
Champ 400 x 400

Fonction aléatoire extrême gaussienne
Calcul de la loi bivariable

Notations:

– $\rho =$ coefficient de correlation entre $Y(x_1)$ et $Y(x_2)$;

– $g_\rho(y_1, y_2) =$ densité de $\big(Y(x_1), Y(x_2)\big)$;

– $G_\rho(y_1, y_2) =$ fonction de répartition de $\big(Y(x_1), Y(x_2)\big)$.

Pour calculer

$$P\{Z(x_1) < z_1, Z(x_2) < z_2\} = \exp\left(-\mu \int_0^\infty \big[1 - G_\rho(tz_1, tz_2)\big]\, dt\right)$$

on peut partir de

$$\frac{\partial G_\rho}{\partial \rho}(y_1, y_2) = g_\rho(y_1, y_2)$$

Anomalies

– Même si Y a ses variables indépendantes, celles de Z ne le sont pas

$$
\begin{aligned}
P\left\{\bigcap_{i=1}^{n} Z(x_i) < z_i\right\} &= \exp\left(-\mu \int_0^\infty \left[1 - \prod_{i=1}^{n} P\{Y(x_i) < t z_i\}\right] dt\right) \\
&\neq \prod_{i=1}^{n} \exp\left(-\mu \int_0^\infty \left[1 - P\{Y(x_i) < t z_i\}\right] dt\right) ;
\end{aligned}
$$

– le type de dépendance observé est toujours le même, quelque soit l'ensemble des points d'appui $x_1, ..., x_n$;

– la fonction aléatoire Z n'est en géneral pas ergodique.

Fonctions aléatoires tempêtes

Definition

Ingrédients de base:

– Π processus de Poisson homogène de densité μ sur $I\!R^d \times I\!R_+$;

– $\left(Y_{y,t},\ y \in I\!R^d,\ t \in I\!R_+\right)$ copies indépendantes d'une même fonction aléatoire stationnaire Y définie sur $I\!R^d$ et à valeurs positives.

Définition:

$$Z(x) = \sup_{(y,t) \in \Pi} \frac{Y_{y,t}(x-y)}{t} \qquad x \in I\!R^d$$

Propriétés

$$\text{On pose } m = \int_{\mathbb{R}^d} E\{Y(x)\}\, dx$$

Si $0 < m < \infty$ (Y est à support compact ou bien à décroissance rapide à l'infini), alors $0 < Z < \infty$ p.s.

Dans ce cas, Z est une fonction aléatoire stationnaire à loi marginale Fréchet d'ordre 1:

$$P\{Z(x) < z\} = \exp\left(-\frac{\mu m}{z}\right)$$

Plus généralement, la loi spatiale de Z est donnée par

$$P\left\{\bigcap_{i=1}^{n} Z(x_i) < z_i\right\} = \exp\left(-\mu \int_{\mathbb{R}^d} E\left\{\bigvee_{i=1}^{n} \frac{Y(x_i - y)}{z_i}\right\} dy\right)$$

Cas particulier des indicatrices

On suppose ici que Y est l'indicatrice d'un compact aléatoire X

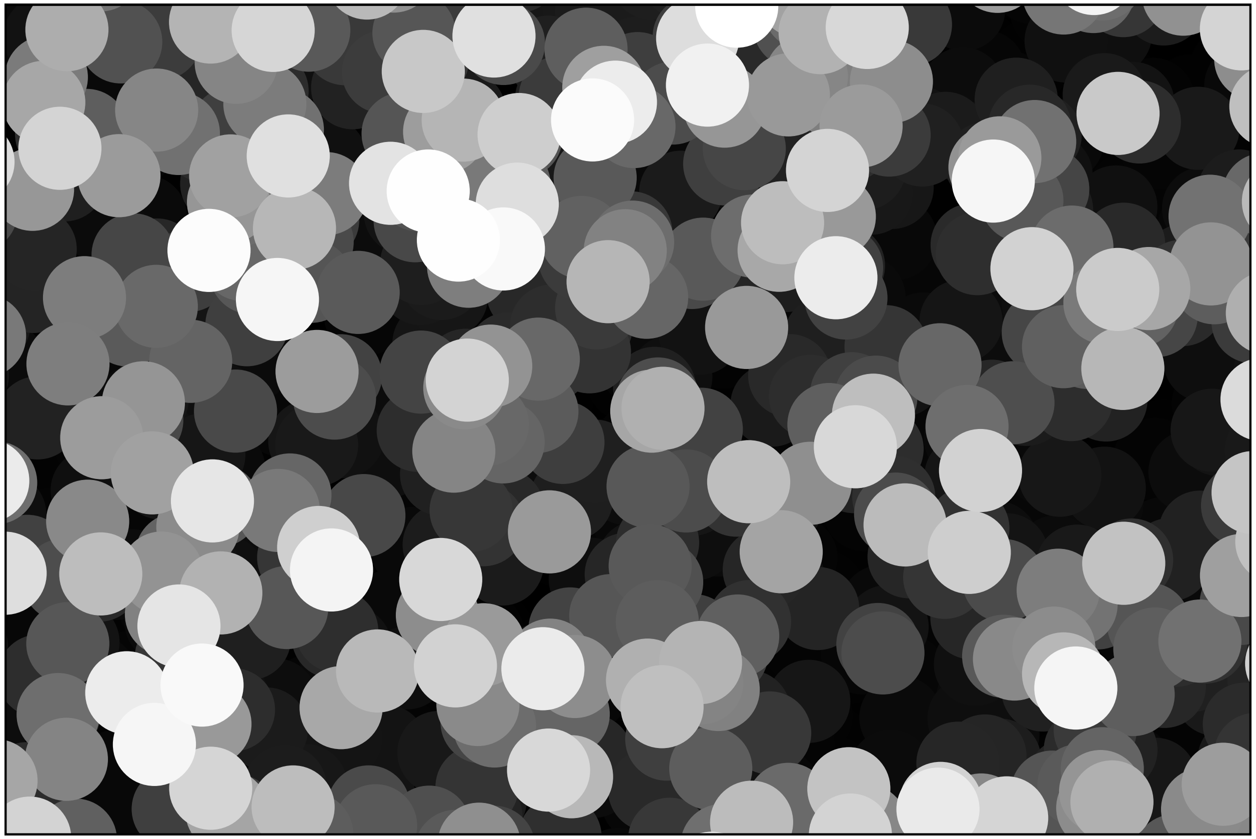
$$Y(x) = 1_{x \in X} \qquad x \in \mathbb{R}^d$$

On a alors

$$P\left\{\bigcap_{i=1}^{n} Z(x_i) < z_i\right\} = \exp\left(-\mu \sum_I (-1)^{|I|-1} \frac{E\{|X \ominus \check{X}_I|\}}{\bigvee_{i \in I} z_i}\right)$$

où l'on a posé $X_I = \{x_i,\, i \in I\}$ pour toute partie non vide I de $\{1, ..., n\}$.

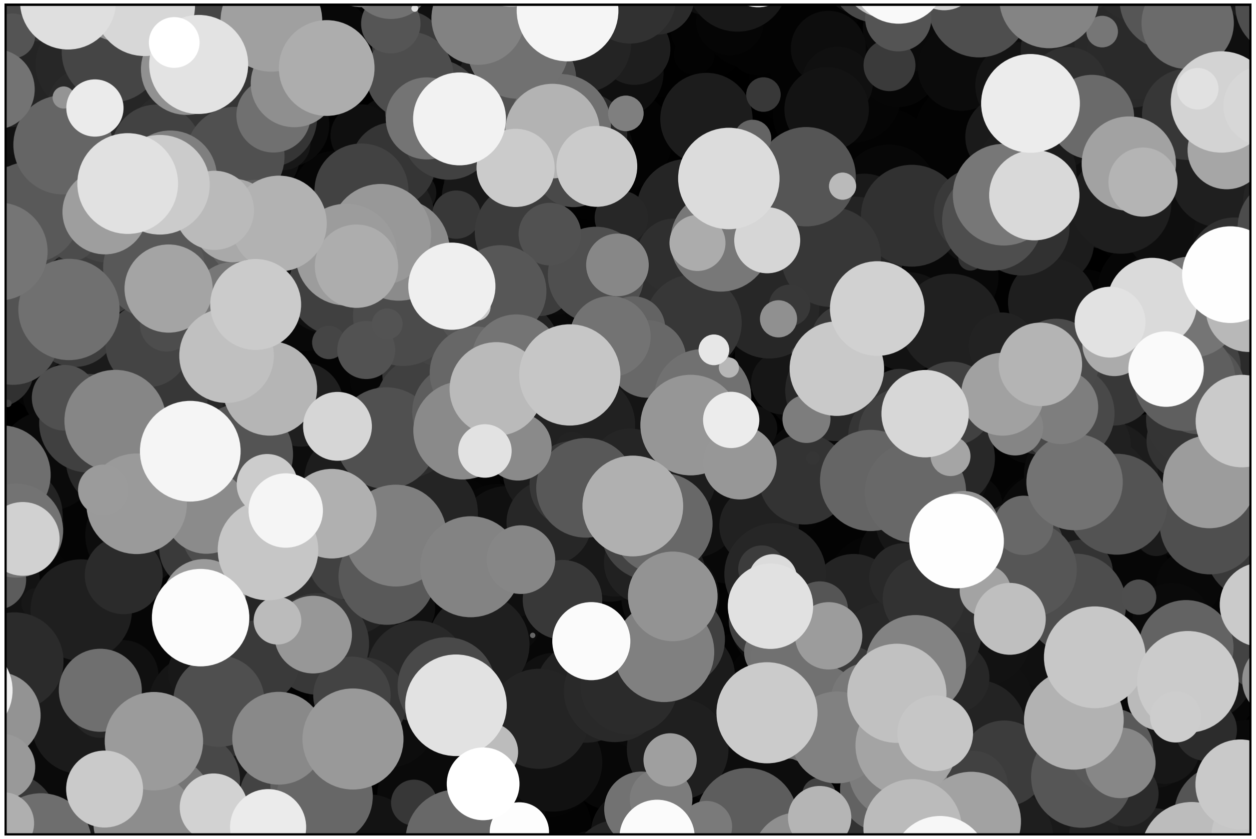
Disques de rayon constant



Rayon = 10

Champ 300 x 200

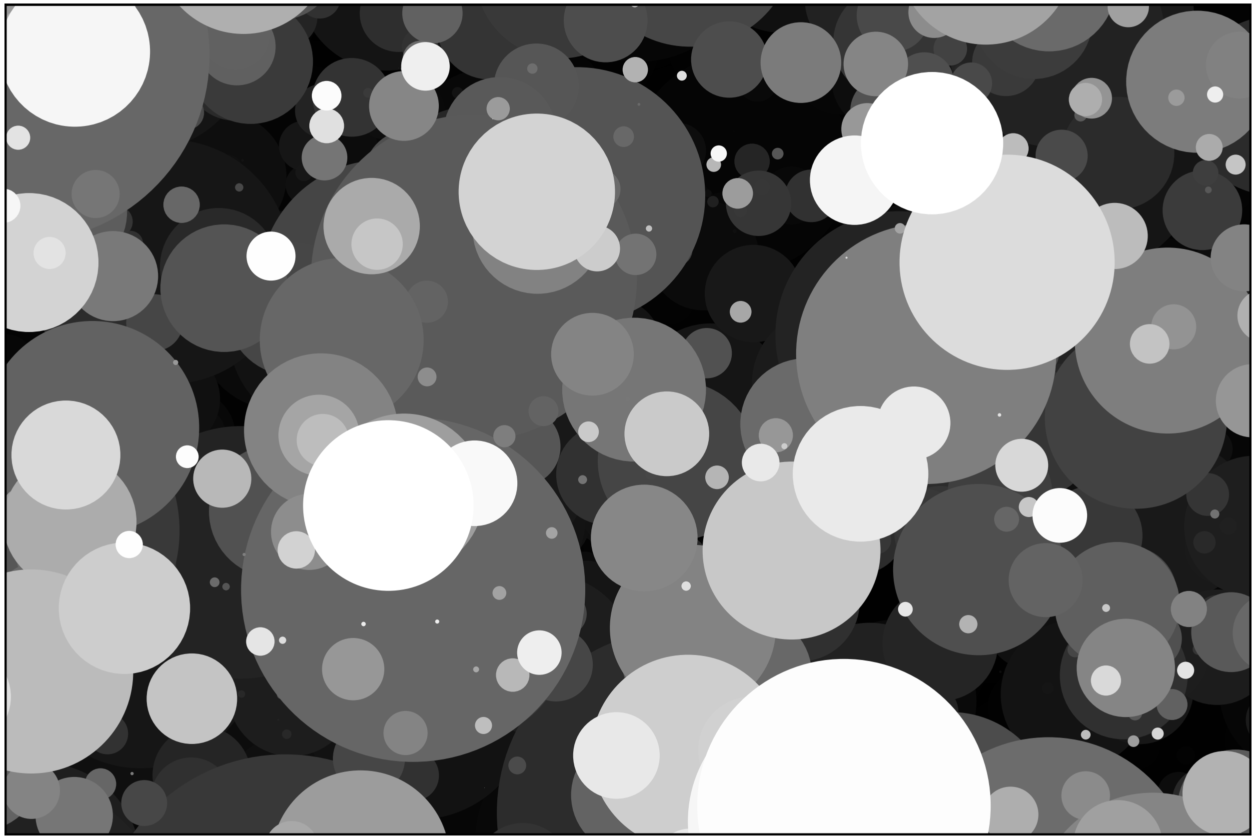
Sections planes de boules de même rayon



Rayon des boules = 12.248

Champ 300 x 200

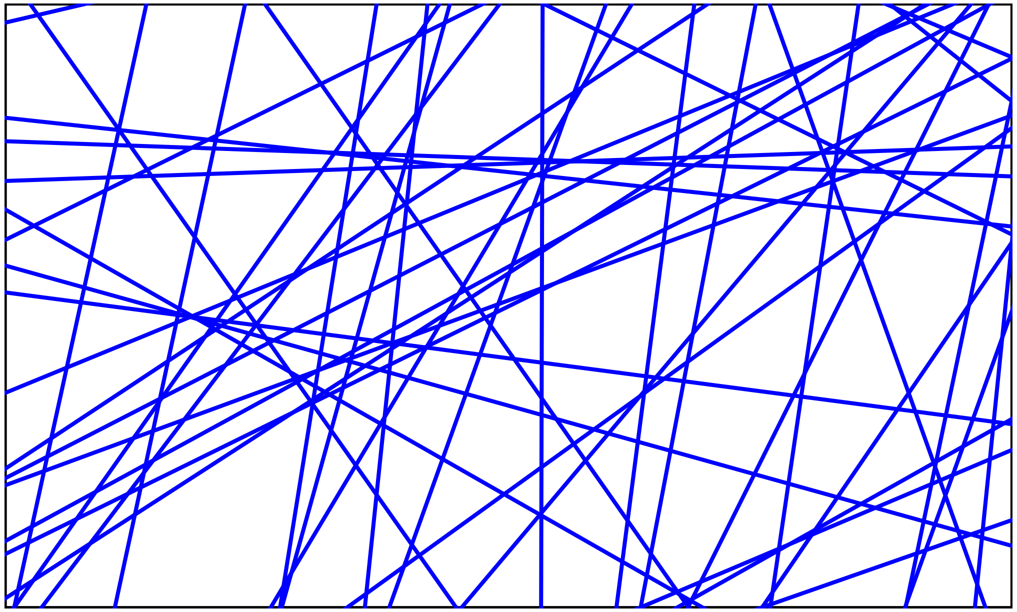
Disques de rayon exponentiel



Rayon moyen = 7.072

Champ 300 x 200

Polygones poissonniens

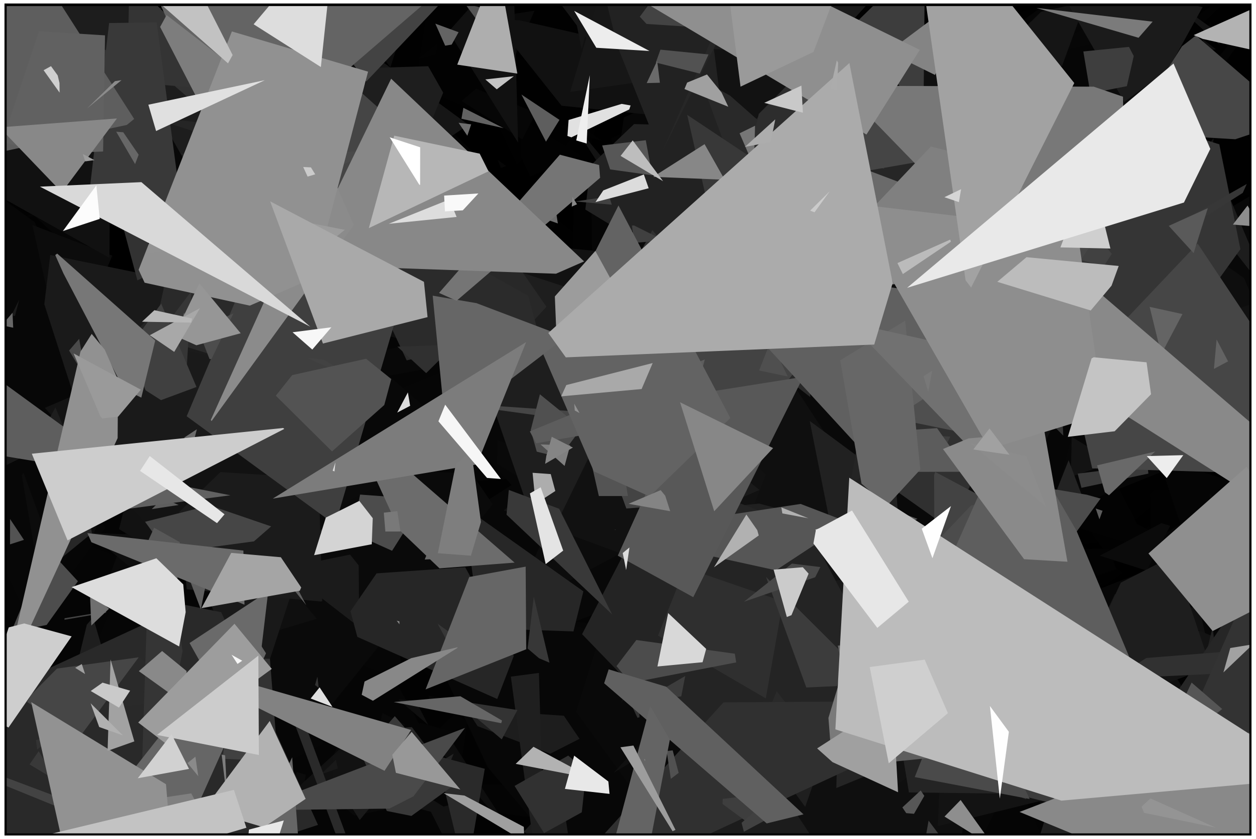


$$P\left\{\bigcap_{i=1}^{n} Z(x_i) < z_i\right\} = \exp\left(-\frac{\mu}{\pi\lambda^2}\sum_I (-1)^{|I|-1}\frac{\exp(-\lambda p(X_I))}{\bigvee_{i\in I} z_i}\right)$$

$\lambda =$ densité poissonnienne

$p(X_I) =$ périmètre de l'enveloppe convexe de $X_I = \{x_i, i \in I\}$

Polygones poissonniens (2)



Surface moyenne d'un polygone = 314

Champ 300 x 200