INDICE EXTREMAL

Modelling extremal events,
P. Embrechts, Cl. Kluppelberg, Th. Mikosch (99), Springer

Définition Soit $(X_n)_n$ une suite stationnaire, $M_n = \max_{i=1,n}(X_i)$, θ un nombre positif. On suppose que pour tout $\tau > 0$ il existe une suite $(u_n)_n$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} n(1 - F(u_n) = \tau$$

$$\lim_{n\to\infty} P(M_n \leq u_n) = e^{-\theta\tau}$$

Alors θ est appelé l'indice extrêmal de la suite $(X_n)_n$.

INDICE EXTREMAL

Propriétés

- θ est indépendant de la suite (u_n),
- $0 < \theta \leq 1$,
- Si $(\widetilde{X}_n)$ est une suite i.i.d. associée (i.e. avec la même loi marginale)

$$\lim_{n\to\infty} P(\widetilde{M}_n \leq u_n) = e^{-\tau}$$

- $\lim_{n\to\infty} P(M_n \leq u_n) > \lim_{n\to\infty} P(\widetilde{M}_n \leq u_n)$

INDICE EXTREMAL

Exemples

- $(X_n)_n$ i.i.d., $\theta = 1$
- sous les conditions D:

$$1 \leq i_1 < \ldots < i_p < j_1 < \ldots < j_q \leq n \text{ t.q. } j_1 - i_p \geq l$$

on a

$$|P(\max_{i \in A_1 \cup A_2} X_i \leq u_n) - P(\max_{i \in A_1} X_i \leq u_n) P(\max_{i \in A_2} X_i \leq u_n)| \leq \alpha_{n,l}$$

où $A_1 = \{i_1, \ldots, i_p\}$, $A_2 = \{j_1, \ldots, j_q\}$ et $\alpha_{n,l} \to 0$
et D':

$$\lim_{k \to \infty} \lim_{n \to \infty} \sup n \sum_{j=2}^{[n/k]} P(X_1 > u_n, X_j > u_n) = 0$$

alors $\theta = 1$. En particulier $(X_n)_n$ ARIMA Gaussien.

INDICE EXTREMAL

- $(Y_n)_n$ i.i.d. de loi $\sqrt{F}$, $X_n = max(Y_n, Y_{n+1})$, $\theta = 1/2$.

- $X_n = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j Z_{n-j}$, $(Z_n)_n$ i.i.d. avec $P(Z_1 > x) = x^{-\alpha} L(x)$,
$P(Z_1 > x) \sim pP(|Z_1| > x)$, $P(Z_1 \leq -x) \sim qP(|Z_1| > x)$, $p + q = 1$
Z_n domaine d'attraction de Gumbel,
$\max|\psi_j| = 1$, $k^+ = card\{\psi_j = 1\}$, $k^- = card\{\psi_j = -1\}$
$\theta = k^+ p + k^- q$,.

- ARCH(1), ...

INDICE EXTREMAL

Interprétation
Sous certaines conditions de mélange, on a

$$\theta = (\mathsf{E}\xi_1)^{-1}$$

où $(\xi_j)_j$ est la taille des clusters $(X_i > u_n)$.

θ peut être vu comme l'inverse de la taille moyenne des clusters d'un processus de Poisson composé, et $n\theta$ est parfois appelé le nombre équivalent de données indépendantes.

CAS SPATIAL

A dependance measure for multivariate and spatial extreme values : Properties and inference

M. Schlater, J. Tawn, Biometrika (2003), 90, 1, pp 139-156

$X(x)$ un champ aléatoire stationnaire pour $x \in \mathbf{R}^d$, avec des marginales Fréchet unité.
$(X^{(j)}(x))_{j=1,n}$ n répétitions indépendantes. Sous de faibles hypothèses il existe une fonction $\theta(h)$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\max_{j=1,n} \max\{X^{(j)}(h), X^{(j)}(0)\}/n \leq z\right) = e^{-\theta(h)/z}$$

$\theta(.)$ est la fonction d'indice extrémal.

Remarque Ce n'est pas une généralisation de l'indice extrémal des suites stationnaires dépendantes.

CAS SPATIAL

Propriétés

(i) La fonction $2-\theta(h)$ est semi définie positive.

(ii) La fonction $\theta(.)$ n'est pas différentiable à l'origine sauf si $\theta(h)=1$ pour tout $h\in\mathbf{R}$.

(iii) Si la dimension du champ est supérieure ou égale à 2 et si le champ est isotropique alors $\theta(.)$ est continue partout sauf peut être à l'origine.

CAS SPATIAL

Exemples

- Tempêtes :

$$Y(x) = \max_j \zeta_j g(s_j, x), g(s, x) = \phi_2(x - s, \Sigma_2)$$

$$\theta(h) = 2\phi(\beta_h/2), \beta_h = (h^T \Sigma_2^{-1} h)^{1/2}$$

- $Y(x) = \max_{t_j \in \Pi} t_j \max\{0, Z^{(j)}(x)\}$,

Π processus de Poisson d'intensité $\lambda(t) = (2\pi)^{1/2} t^{-2}$,
$Z^{(j)}(x)$ champs Gaussiens indépendants stationnaires de marginales $\mathcal{N}(0,1)$ et fonction de corrélation $\rho(h)$.

$$\theta(h) = 1 + 2^{-1/2}\{1 - \rho(h)\}^{1/2}$$

CAS SPATIAL

Estimation

$\widehat{\theta}_{ik}$: estimateur MV de $\theta(X(x_i), X(x_k))$

$$\widehat{\theta}^*(h) = \frac{\sum_{(i,k)\in S_h} |T_i \cap T_k|^{1/2} \widehat{\theta}_{ik}}{\sum_{(i,k)\in S_h} |T_i \cap T_k|^{1/2}}$$

$\widehat{\theta}(h) = 1 \bigvee \widehat{\theta}^*(h) \bigwedge 2$

ajustement sur une fonction admissible.

Utilisation du madogramme (D. Cooley, Ph. naveau, V. Jomelli, P. Poncet)