ESTIMATION d'INDICATEURS de DEPENDANCE

$(X^{(1)}, \ldots, X^{(d)})_i$ suite de vecteurs indépendants de loi $F(x^{(1)}, \ldots, x^{(d)})$ de marginales Fréchet unité.

$$\lim_{n\to\infty} P(\max_{j\in A} \max_i \frac{X_i^{(j)}}{n} < z) = e^{-\theta_A/z}$$

$1 \leq \theta_A \leq |A|$

- $\theta_A = 1$ dépendance complète

- $\theta_A = |A|$ indépendance

Cas Spatial

On pourrait regarder $(Z(s_1), \ldots, Z(s_n))_t$. Trop compliqué.

On regarde

$$\lim_{n\to\infty} P(\max_{t=1,T} \max(Z_t(0), Z_t(h))/n < z) = e^{-\theta(h)/z}$$

$1 \leq \theta(h) \leq 2$

- $h = 0$, $\theta(h) = 1$ dépendance complète

- dès que $\theta(h) = 2$ indépendance

ne caractérise pas complètement la loi du max.

CAS SPATIAL

Propriétés

(i) La fonction $2 - \theta(h)$ est semi définie positive.

(ii) La fonction $\theta(.)$ n'est pas différentiable à l'origine sauf si $\theta(h) = 1$ pour tout $h \in \mathbf{R}$.

(iii) Si la dimension du champ est supérieure ou égale à 2 et si le champ est isotropique alors $\theta(.)$ est continue partout sauf peut être à l'origine.

Idée : estimer θ sur les données, trouver un modèle avec les mêmes θ pour simuler et estimer des probabilités de dépassement, ...

Maximum de vraisemblance

z, un seuil fixé

$$l_A(\theta_A) = \text{card}\{i, \max_j(X_i^{(j)}\overline{X^{(j)}}) > z\} \log(\theta_A) - \theta_A \sum_i \Big(\max_j(z, X_i^{(j)}\overline{X^{(j)}})\Big)^{-1}$$

$$\widehat{\theta_A} = \frac{N_A(z)}{\frac{n-N_A(z)}{z} + \tau(z)}$$

$\widehat{\theta_A} = z\frac{N_A(z)}{n}$ si $\max_j(z, X_i^{(j)}) = z$

$\widehat{\theta_A} = z\frac{N_A(z)}{n-N_A(z)}$ si $\max_j(z, X_i^{(j)}) >> z$

Il faut encore tronquer à 1 et $|A|$, et imposer les contraintes de compatibilité.

CAS SPATIAL

$\widehat{\theta}_{ik}$: estimateur MV de $\theta(Z(s_i), Z(s_k))$

$$\widehat{\theta}^*(h) = \frac{\displaystyle\sum_{(i,k)\in S_h} |T_i \cap T_k|^{1/2}\widehat{\theta}_{ik}}{\displaystyle\sum_{(i,k)\in S_h} |T_i \cap T_k|^{1/2}}$$

$$\widehat{\theta}(h) = 1 \bigvee \widehat{\theta}^*(h) \bigwedge 2$$

ajustement sur une fonction admissible.

Autres estimateurs

madogramme

$$\nu = \frac{1}{2}\mathsf{E}|X - Y| \qquad \theta = u\Big(\mu + \frac{\nu}{\Gamma(1-\xi)}\Big) \qquad u(x) = \Big(1 + \xi\frac{(x-\mu)}{\sigma}\Big)^{1/\xi}$$

$$\nu_\lambda = \frac{1}{2}\mathsf{E}|G^\lambda(X) - G^\lambda(Y)| = \frac{\lambda(\theta - 1)}{(\lambda+1)(\theta+\lambda)}$$

Estimation du madogramme, puis identification.

Modèles spatiaux

- Tempêtes :

$$Z(s) = \sup_{(\zeta,y)\in\Pi} \zeta Y_{\zeta,y}(s-y)$$

Π processus de Poisson sur $\mathbb{R}^d \times]0; +\infty[$ d'intensité
$d\lambda(\zeta, y) = \mu^{-1} dy \zeta^{-2} d\zeta$,
stationnaire, max-stable de marginales Fréchet unité.

Exemples

Processus gaussien extrême : $Y(x) = \phi_2(x, \Sigma_d)$

$$\theta(h) = 2\Phi_d(\frac{a}{2}) \quad a^2 = h^t \Sigma_d^{-1} h$$

$1 \leq \theta(h) \leq 2$

Modèle disque : $Y(x) = \mathbf{1}_{D(r)}$, $D(r)$ disque de rayon r aléatoire

$$\theta(h) = -\frac{1}{2}\Big(\min(1, |h|)\Big)^3 + \frac{3}{2}\min(1, |h|) + 1$$

$1 \leq \theta(h) \leq 2$

généralisation (Ch. Lantuéjoul) : $A(x)$ compact aléatoire, ζ de loi F

$$\theta(h) = 2 - \rho(h) \quad \rho(h)\text{corrélogramme géométrique}$$

$1 \leq \theta(h) \leq 2$

Processus Gaussien extrêmal

$$Z(s) = \max_{\zeta \in \Pi} \zeta Y_\zeta(s),$$

Y processus Gaussien stationnaire de fonction de corrélation $\rho(h)$

$$\theta(h) = 1 + 2^{-1/2}\{1 - \rho(h)\}^{1/2}$$

$1 \leq \theta(h) \leq 1 + \sqrt{\frac{1}{2}}$

Combiné

$$Z(s) = \max_{(\zeta,y)\in\Pi} \zeta \mathbf{1}_{B_{\zeta,y}}(s-y) Y_{\zeta,y}(s),$$

$$\theta(h) = 2 - \frac{\mathsf{E}|B \cup (h+B)|}{\mathsf{E}|B|}\Big(1 - 2^{-1/2}\{1-\rho(h)\}^{1/2}\Big)$$

$1 \leq \theta(h) \leq 2$