

Modèles ARMA quadrantaux

Etude de données spatio-temporelles

Aude ILLIG

Université Versailles Saint-Quentin en Yvelines

19 octobre 2006

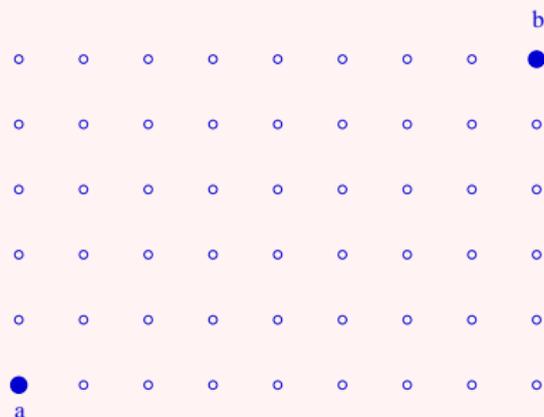
- 1 Modèles ARMA quadrantaux
- 2 Estimateurs des coefficients autorégressifs
- 3 Propriétés asymptotiques des estimateurs
- 4 Procédure d'identification
- 5 Etude de données spatio-temporelles

- **Ordre partiel usuel sur \mathbb{Z}^d , $d \geq 2$** : pour $s = (s_1, \dots, s_d)$ et $t = (t_1, \dots, t_d)$, on note $s \preceq t$ si pour tout $i = 1 \dots d$, $s_i \leq t_i$.
- **Quadrants** : Pour $a, b \in \mathbb{Z}^d$ tels que $a \preceq b$ et $a \neq b$, on note

$$\begin{aligned}
 S[a, b] &= \{x \in \mathbb{Z}^d \mid a \preceq x \preceq b\} & S\langle a, b \rangle &= S[a, b] \setminus \{a\} \\
 S[a, \infty] &= \{x \in \mathbb{Z}^d \mid a \preceq x\} & S\langle a, \infty \rangle &= S[a, \infty] \setminus \{a\}.
 \end{aligned}$$

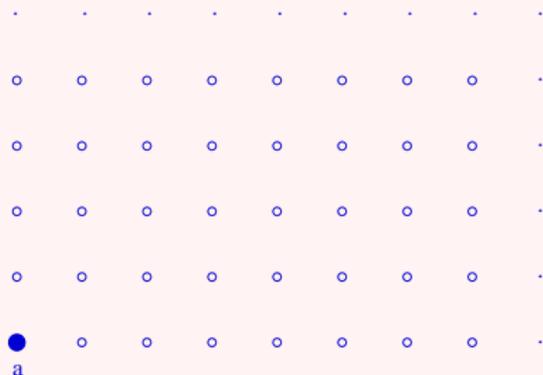
- **Ordre partiel usuel sur \mathbb{Z}^d , $d \geq 2$** : pour $s = (s_1, \dots, s_d)$ et $t = (t_1, \dots, t_d)$, on note $s \preceq t$ si pour tout $i = 1 \dots d$, $s_i \leq t_i$.
- **Quadrants** : Pour $a, b \in \mathbb{Z}^d$ tels que $a \preceq b$ et $a \neq b$, on note

$$\begin{aligned} S[a, b] &= \{x \in \mathbb{Z}^d \mid a \preceq x \preceq b\} & S\langle a, b \rangle &= S[a, b] \setminus \{a\} \\ S[a, \infty] &= \{x \in \mathbb{Z}^d \mid a \preceq x\} & S\langle a, \infty \rangle &= S[a, \infty] \setminus \{a\}. \end{aligned}$$



- **Ordre partiel usuel sur \mathbb{Z}^d , $d \geq 2$** : pour $s = (s_1, \dots, s_d)$ et $t = (t_1, \dots, t_d)$, on note $s \preceq t$ si pour tout $i = 1 \dots d$, $s_i \leq t_i$.
- **Quadrants** : Pour $a, b \in \mathbb{Z}^d$ tels que $a \preceq b$ et $a \neq b$, on note

$$\begin{aligned} S[a, b] &= \{x \in \mathbb{Z}^d \mid a \preceq x \preceq b\} & S\langle a, b \rangle &= S[a, b] \setminus \{a\} \\ S[a, \infty] &= \{x \in \mathbb{Z}^d \mid a \preceq x\} & S\langle a, \infty \rangle &= S[a, \infty] \setminus \{a\}. \end{aligned}$$



■ **Ordre partiel usuel sur \mathbb{Z}^d , $d \geq 2$** : pour $s = (s_1, \dots, s_d)$ et $t = (t_1, \dots, t_d)$, on note $s \preceq t$ si pour tout $i = 1 \dots d$, $s_i \leq t_i$.

■ **Quadrants** : Pour $a, b \in \mathbb{Z}^d$ tels que $a \preceq b$ et $a \neq b$, on note

$$\begin{aligned} S[a, b] &= \{x \in \mathbb{Z}^d \mid a \preceq x \preceq b\} & S\langle a, b \rangle &= S[a, b] \setminus \{a\} \\ S[a, \infty] &= \{x \in \mathbb{Z}^d \mid a \preceq x\} & S\langle a, \infty \rangle &= S[a, \infty] \setminus \{a\}. \end{aligned}$$

■ **Stationnarité** : un champ $(\epsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$ à valeurs réelles, de carré intégrable et de fonction d'autocovariance $\gamma(\cdot, \cdot)$ est dit

→ **stationnaire** si

- $\mathbb{E}(\epsilon_t) = m \forall t \in \mathbb{Z}^d$,
- $\gamma(u, v) = \gamma(u + h, v + h) \forall u, v, h \in \mathbb{Z}^d$.

→ **stationnaire au sens strict** si

$$(\epsilon_t)_{t \in S[a, b]} \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} (\epsilon_{t+h})_{t \in S[a, b]} \forall h, a, b \in \mathbb{Z}^d.$$

■ **Notation** : $\gamma(h) = \gamma(0, h)$.

■ Modèles ARMA spatiaux :

- Modèles ARMA quadrantaux (Tjøstheim (1978), Tjøstheim (1983)).
- Modèles ARMA définis à l'aide de l'ordre lexicographique (Huang & Anh (1992)).
- Modèles ARMA séparables (Martin (1990), Etchison, Pantula & Brownie (1994)).

Definition

Un champ de carré intégrable $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$ est appelé modèle ARMA(p, q) spatial de paramètres $p, q \in \mathbb{N}^d$ s'il satisfait l'équation

$$X_t - \sum_{j \in S(\mathbf{0}, p)} \phi_j X_{t-j} = \epsilon_t + \sum_{k \in S(\mathbf{0}, q)} \theta_k \epsilon_{t-k} \quad \forall t \in \mathbb{Z}^d$$

où $(\epsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$ est un champ de carré intégrable stationnaire, de variance σ^2 et vérifiant

$$\mathbb{E}(\epsilon_t) = 0 \text{ et } \mathbb{E}(\epsilon_s \epsilon_t) = 0 \quad \forall s, t \in \mathbb{Z}^d.$$

Si $q = \mathbf{0}$ (resp. $p = \mathbf{0}$), la somme sur $S(\mathbf{0}, q]$ (resp. sur $S(\mathbf{0}, p]$) est supposée nulle et le champ est appelé champ AR(p) (resp. MA(q)).

Définition (Tjøstheim (1978))

Un champ ARMA(p, q) $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$ est dit causal s'il admet une expression unilatérale du type

$$X_t = \epsilon_t + \sum_{j \in S(0, \infty]} \psi_j \epsilon_{t-j} \quad \forall t \in \mathbb{Z}^d$$

avec $\sum_{j \in S(0, \infty]} |\psi_j| < \infty$.

Remarque

Un champ ARMA causal est donc stationnaire.

■ Notations :

→ **Polynôme autorégressif :**

$$\phi(z) = 1 - \sum_{j \in S(0, p]} \phi_j z^j, \quad z = (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{C}^d.$$

→ **Polynôme moyenne mobile :** $\theta(z) = 1 + \sum_{k \in S(0, q]} \theta_k z^k, \quad z \in \mathbb{C}^d$.

■ Hypothèses :

→ **Causalité :** ϕ n'admet pas de zéros dans $D(0, 1)^d \subset \mathbb{C}^d$.

→ **Identifiabilité :** ϕ et θ n'ont pas de facteurs communs.

X champ ARMA causal quadrantal de fonction de covariance $\gamma(\cdot)$

Equations de Yule-Walker généralisées (EYWG) :

Pour $\lambda \in S\langle 0, \infty]$ et $\nu \in S[0, \infty]$, considérons $\Phi_\lambda^{(\nu)} = (\phi_{\lambda,j}^{(\nu)})_{j \in S\langle 0, \lambda]}$ solution des équations suivantes,

$$\mathbb{E}(Y_{\lambda,t}^{(\nu)} X_{t-\nu-j}) = 0 \quad \forall j \in S\langle 0, \lambda],$$

avec

$$Y_{\lambda,t}^{(\nu)} = X_t - \sum_{j \in S\langle 0, \lambda]} \phi_{\lambda,j}^{(\nu)} X_{t-j}.$$

- **Coefficients autorégressifs** : X vérifie les EYWG pour $\lambda = p$, $\nu = q$ et $\phi_{\lambda,j}^{(q)} = \phi_j$ pour tout $j \in S\langle 0, p]$.

Ecriture matricielle des EYWG :

$$\Gamma_{\lambda}^{(\nu)} \Phi_{\lambda}^{(\nu)} = \gamma_{\lambda}^{(\nu)}$$

où pour $\forall i, j \in S\langle 0, \lambda \rangle$, $\Gamma_{\lambda}^{(\nu)}(j, i) = \gamma(\nu + j - i)$ et $\gamma_{\lambda}^{(\nu)}(j) = \gamma(\nu + j)$.

■ Cas particulier AR correspondant à $\nu = 0$:

Equations pour la variance :

$$\mathbb{E}(Y_{\lambda,t}^{(0)} X_t) = \sigma^2 \quad \lambda \succeq p$$

avec

$$Y_{\lambda,t}^{(0)} = X_t - \sum_{i \in S\langle 0, \lambda \rangle} \phi_{\lambda,i}^{(0)} X_{t-i}.$$

Ecriture matricielle des équations pour la variance :

$$\sigma^2 = \gamma_{\lambda}^{(\nu)}(\mathbf{0}) - \Phi_{\lambda}^{(\nu)T} \gamma_{\lambda}^{(\nu)} \quad \lambda \succeq p$$

$\{X_t, t \in S[1, \mathbf{N}]\}$ une observation du champ X sur $S[1, \mathbf{N}]$

Estimateurs des coefficients solution des EYWG

$$\hat{\Gamma}_\lambda^{(\nu)} \hat{\Phi}_\lambda^{(\nu)} = \hat{\gamma}_\lambda^{(\nu)}$$

avec

$$\hat{\Gamma}_\lambda^{(\nu)}(j, i) = \frac{1}{N^d} \sum_{t \in S[1+\tau, \mathbf{N}]} X_{t-i} X_{t-\nu-j} \quad \forall i, j \in S\langle 0, \lambda \rangle$$

$$\hat{\gamma}_\lambda^{(\nu)}(j) = \frac{1}{N^d} \sum_{t \in S[1+\tau, \mathbf{N}]} X_t X_{t-\nu-j} \quad \forall j \in S\langle 0, \lambda \rangle$$

et

$$\tau = \lambda + \nu.$$

- **Covariances empiriques :** Sommation sur les indices

$$t \in S[1+i, \mathbf{N}] \cap S[1+j+\nu, \mathbf{N}] ?$$

Afin d'éviter les phénomènes de biais pour $d \geq 2$, sommation sur les indices

$$t \in S[1+\tau, \mathbf{N}], \quad \forall i, j \in S\langle 0, \lambda \rangle.$$

■ Cas particulier AR correspondant à $\nu = 0$:

- Lorsque $\lambda = p$, l'estimateur $\hat{\Phi}_\lambda^{(0)}$ coïncide avec l'estimateur des moindres carrés du vecteur des coefficients autorégressifs $\Phi_p^{(0)}$ étudié par Tjøstheim (1983).
- $\hat{\Phi}_p^{(0)}$ diffère de l'estimateur de Yule-Walker (Ha & Newton (1993)).

Estimateurs de la variance

$$\hat{\sigma}_\lambda^2 = \hat{\gamma}_\lambda^{(\nu)}(\mathbf{0}) - \hat{\Phi}_\lambda^{(\nu)T} \hat{\gamma}_\lambda^{(\nu)} \quad \forall \lambda \succeq p$$

où

$$\hat{\gamma}_\lambda^{(\nu)}(\mathbf{0}) = \frac{1}{N^d} \sum_{t \in S[\mathbf{1}+\lambda, \mathbf{N}]} X_t^2.$$

■ Hypothèses générales:

→ $X = (X_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$ champ linéaire :

$$X_t = \epsilon_t + \sum_{j \in S(0, \infty]} \psi_j \epsilon_{t-j} \quad \forall t \in \mathbb{Z}^d$$

avec $\sum_{j \in S(0, \infty]} |\psi_j| < \infty$.

→ $(\epsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$ famille de v.a. i.i.d centrées, de variance $\sigma^2 > 0$ vérifiant

$$\mathbb{E}(\epsilon_t^4) = \eta \sigma^4.$$

■ Consistance :

Théorème

Pour $\lambda \in S(0, \infty]$ et $\nu \in S(0, \infty]$ tels que $\Gamma_\lambda^{(\nu)}$ soit inversible,

$$\hat{\Phi}_\lambda^{(\nu)} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \Phi_\lambda^{(\nu)}$$

■ Normalité asymptotique :

$\gamma(\cdot)$ et $\gamma_y(\cdot)$ désignent les fonctions d'autocovariance de X et de $Y_\lambda^{(\nu)} = (Y_{\lambda,t}^{(\nu)})_{t \in \mathbb{Z}^d}$ où

$$Y_{\lambda,t}^{(\nu)} = X_t - \sum_{j \in S\langle 0, \lambda \rangle} \phi_{\lambda,j}^{(\nu)} X_{t-j}.$$

et $\gamma_{xy}(\cdot)$ est la fonction de covariance croisée correspondante.

Théorème

Pour $\lambda \in S\langle 0, \infty \rangle$ et $\nu \in S[0, \infty]$ tels que $\Gamma_\lambda^{(\nu)}$ soit inversible,

$$N^{d/2}(\hat{\Phi}_\lambda^{(\nu)} - \Phi_\lambda^{(\nu)}) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \Sigma_\lambda^{(\nu)} V \Sigma_\lambda^{(\nu)'})$$

où

$$\Sigma_\lambda^{(\nu)} = (\Gamma_\lambda^{(\nu)})^{-1}$$

et où pour tout $u, v \in S\langle 0, \lambda \rangle$,

$$V(u, v) = \sum_{h \in \mathbb{Z}^d} \gamma_y(h) \gamma(h - u + v) + \gamma_{yx}(-h - v - u) \gamma_{yx}(h - v - u).$$

IDEE DE LA PREUVE.

→ L'étude de la normalité asymptotique du vecteur

$$\hat{\Gamma}_{\lambda}^{(\nu)}(\hat{\Phi}_{\lambda}^{(\nu)} - \Phi_{\lambda}^{(\nu)}) = \left(\frac{1}{N^d} \sum_{t \in S[1+\tau, \mathbf{N}]} Y_{\lambda, t}^{(\nu)} X_{t-\nu-j} \right)_{j \in S\langle 0, \lambda \rangle}$$

se ramène (Cramèr-Wold, troncature des champs, sommes sur $S[0, \mathbf{N}]$) à l'étude pour tout $r = (r_j)_{j \in S\langle 0, \lambda \rangle}$ de

$$W_{N, K} = \frac{1}{N^d} \sum_{t \in S[1, \mathbf{N}]} Y_{\lambda, t}^{(\nu), K} \sum_{j \in S\langle 0, \lambda \rangle} r_j X_{t-\nu-j}^K$$

où $X_t^K = \sum_{k \in S[0, K]} \psi_k \epsilon_{t-k}$ et $Y_{\lambda, t}^{(\nu), K} = X_t^K - \sum_{j \in \langle 0, \lambda \rangle} \phi_{\lambda, j}^{(\nu)} X_{t-j}^K$.

→ On applique un TCL pour champs m -dépendants ($m \in \mathbb{N}^d$) de Choi (2000) au champ $Y_{\lambda, t}^{(\nu), K} \sum_{j \in S\langle 0, \lambda \rangle} r_j X_{t-\nu-j}^K$ ($K + \tau$)-dépendant :

$$N^{d/2}(W_{N, K} - \mathbb{E}(W_{N, K})) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, v_K)$$

avec $v_K = \lim_{N \rightarrow \infty} N^d \text{Var}(W_{N, K}) = r' V_K r$ et où pour $u, v \in S\langle 0, \lambda \rangle$,

$$\begin{aligned} V_K(u, v) &= (\eta - 3) \gamma_{xy}^K(-\nu - u) \gamma_{xy}^K(-\nu - v) \\ &+ \sum_{h \in \mathbb{Z}^d} \gamma_y^K(h) \gamma_x^K(h - u + v) + \gamma_{xy}^K(-h - \nu - v) \gamma_{xy}^K(h - \nu - u). \end{aligned}$$

■ Cas particulier AR correspondant à $\nu = 0$:

- $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$ champ AR(p) causal.
- $(\epsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$ champ stationnaire au sens strict de dM quadrantaux vérifiant

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\epsilon_t^2 | \mathcal{G}_t^*) &= \sigma^2 \text{ p.s.} \\ \sup_t \mathbb{E}(\epsilon_t^4) &< \infty \end{aligned}$$

Théorème

Pour tout $\lambda \in S(\mathbf{0}, \infty]$ tel que $\Gamma_\lambda^{(0)}$ est inversible,

$$\hat{\Phi}_\lambda^{(0)} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \Phi_\lambda^{(0)}$$

De plus pour $\lambda \succeq p$,

$$\hat{\sigma}_\lambda \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \sigma$$

Théorème (Tjøstheim (1983) pour $\lambda = p$)

Pour tout $\lambda \succeq p$ tel que $\Gamma_\lambda^{(0)}$ est inversible,

$$N^{d/2} (\hat{\Phi}_\lambda^{(0)} - \Phi_\lambda^{(0)}) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2 \Gamma_\lambda^{(0)-1})$$

IDEE DE LA PREUVE

- L'étude de la normalité asymptotique du vecteur $\hat{\Gamma}_\lambda^{(0)}(\hat{\phi}_\lambda^{(0)} - \phi_\lambda^{(0)})$ se ramène à l'étude pour tout $r = (r_j)_{j \in S(0, \lambda]}$ de

$$W_{N,K} = \frac{1}{N^d} \sum_{t \in S[1, N]} Y_{\lambda, t}^{(0)} \sum_{j \in S(0, \lambda]} r_j X_{t-j}^K$$

où $X_t^K = \sum_{k \in S[0, K]} \psi_k \epsilon_{t-k}$ et $Y_{\lambda, t}^{(0)} = \epsilon_t$.

- On applique un TCL pour martingales spatiales quadrantales de Tjøstheim (1983) au tableau de différences de martingales quadrantales suivant

$$\forall t \in S[1, u], \quad H_u(t) = H(t) \left(\mathbb{E} \left(\sum_{t \in S[1, u]} H^2(t) \right) \right)^{-\frac{1}{2}}$$

où $H(t) = \sum_{j \in S(0, \lambda]} \sum_{k \in S[0, K]} r_j \psi_k \epsilon_t \epsilon_{t-j-k}$:

$$\sum_{t \in S[1, N]} H_N(t) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

On en déduit la normalité asymptotique de $N^{d/2} W_{N,K}$.

■ Identification de modèles AR(p)

→ Lorsque $\lambda \succeq p$, pour tout $j \in S\langle \mathbf{0}, p \rangle$,

$$\phi_{\lambda,j}^{(0)} = \phi_j$$

et tout $j \in S\langle \mathbf{0}, \lambda \rangle \setminus S\langle \mathbf{0}, p \rangle$,

$$\phi_{\lambda,j}^{(0)} = 0.$$

→ Pour tout $\lambda \succeq p$, $\lambda \neq p$,

$$N^{d/2} \frac{\hat{\phi}_{\lambda,\lambda}^{(0)}}{\hat{\sigma}_\lambda \sqrt{\hat{w}_\lambda}} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$$

où \hat{w}_λ est l'estimateur du terme (λ, λ) de la matrice $\Gamma_\lambda^{(0)-1}$.

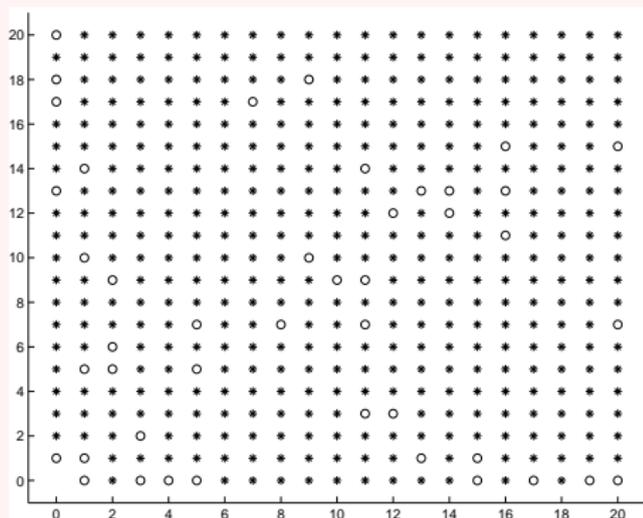
Procédure d'identification :

Pour tester $H_0 : p = p_0$ contre $H_1 : p \succ p_0$, on décide d'accepter H_0 si pour tout $\lambda \in S[\mathbf{0}, \mathbf{K}] \setminus S[\mathbf{0}, p_0]$,

$$(\star) \quad \hat{\phi}_{\lambda,\lambda}^{(0)} \in \left[-u_{1-\alpha/2} \frac{\hat{\sigma}_\lambda \sqrt{\hat{w}_\lambda}}{N^{d/2}}, u_{1-\alpha/2} \frac{\hat{\sigma}_\lambda \sqrt{\hat{w}_\lambda}}{N^{d/2}} \right].$$

■ **Modèle AR((1,1))** : $X_t - 0.7X_{(t_1-1, t_2)} + 0.56X_{(t_1-1, t_2-1)} - 0.8X_{(t_1, t_2-1)} = \epsilon_t$.

→ **Identification du paramètre p** : Pour une réplique de $\{X_t, t \in S[1, 500]\}$, nous calculons $\hat{\phi}_{\lambda, \lambda}^{(0)}$ pour $\lambda \in S[0, 20]$ et construisons un maillage sur $S[0, 20]$ avec au point λ une * si la relation (\star) est vérifiée et un \circ sinon.



→ **Estimation des moindres carrés $\hat{\phi}_{(1,1)}^{(0)}$** , calculée sur la même simulation : (0.7018, -0.5603, 0.8000).

■ Identification de modèles ARMA(p, q) :

→ Sous les hypothèses faites sur les polynômes ϕ et θ , on a

$$\phi_{p,p}^{(\nu)} = \phi_p \text{ pour } \nu \succeq q$$

et

$$\phi_{\lambda,\lambda}^{(q)} = 0 \text{ pour } \lambda \succeq p, \lambda \neq p.$$

→ De plus, d'après ce qui précède :

$$\hat{\phi}_{\lambda,\lambda}^{(\nu)} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \phi_{\lambda,\lambda}^{(\nu)}$$

et

$$\hat{\phi}_{\lambda,\lambda}^{(\nu)} \sim \mathcal{AN}(\phi_{\lambda,\lambda}^{(\nu)}, \frac{(\Sigma_{\lambda}^{(\nu)} V \Sigma_{\lambda}^{(\nu)})'_{\lambda,\lambda}}{N^d}).$$

Procédure d'identification :

On cherche à détecter les propriétés suivantes

$$\rightarrow \hat{\phi}_{p,p}^{(\nu)} \sim \phi \quad \forall \nu \succeq q,$$

$$\rightarrow \hat{\phi}_{\lambda,\lambda}^{(q)} \sim 0 \quad \forall \lambda \succeq p, \lambda \neq p.$$

■ Application au modèle ARMA((1, 1), (1, 1)) :

$$X_t - 0.7 X_{(t_1-1, t_2)} + 0.56 X_{(t_1-1, t_2-1)} - 0.8 X_{(t_1, t_2-1)} = \epsilon_t + 0.8 \epsilon_{(t_1-1, t_2)} + 0.3 X_{(t_1-1, t_2-1)} + 0.5 \epsilon_{(t_1, t_2-1)}$$

→ **Validation de la procédure d'identification** : Pour 500 répliques de $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}^2}$ sur $S[1, 500]$, nous calculons la moyenne et l'écart-type empirique de $\hat{\phi}_{\lambda, \lambda}^{(\nu)}$.

$\lambda \setminus \nu$	(0,0)	(1,0)	(1,1)	(0,1)	(2,0)	(2,1)	(2,2)	(1,2)	(0,2)
(1,0)	0.8459 (0.0020)	0.7000 (0.0043)	0.7000 (0.0049)	0.8438 (0.0023)	0.7000 (0.0060)	0.7000 (0.0068)	0.6998 (0.0086)	0.6999 (0.0061)	0.8437 (0.0031)
(1,1)	-0.7503 (0.0013)	-0.6101 (0.0031)	-0.5601 (0.0069)	-0.6596 (0.0038)	-0.6026 (1.7365)	-0.2996 (6.0823)	-1.1368 (8.0261)	-0.6368 (2.6394)	-0.5403 (-)
(0,1)	0.8838 (0.0014)	0.8816 (0.0019)	0.7998 (0.0032)	0.7999 (0.0027)	0.8816 (0.0029)	0.7997 (0.0047)	0.7996 (0.0057)	0.7998 (0.0039)	0.7999 (0.0033)
(2,0)	-0.4338 (0.0037)	0.0000 (0.0120)	0.0001 (0.0137)	-0.4264 (0.0042)	-0.4416 (5.4969)	-0.0821 (-)	-0.3245 (6.4595)	0.0001 (0.0172)	-0.4264 (0.0054)
(2,1)	0.3932 (0.0019)	0.0000 (0.0059)	-0.0006 (0.0181)	0.2864 (0.0059)	0.5443 (3.6323)	0.5380 (7.7085)	1.5312 (-)	0.5471 (-)	0.1610 (8.9205)
(2,2)	-0.1815 (0.0022)	-0.0002 (0.0051)	-0.0005 (0.0181)	-0.0008 (0.0066)	-0.0498 (4.2745)	-0.0619 (1.3050)	-0.5708 (-)	-0.0008 (0.1578)	0.5430 (-)
(1,2)	0.2977 (0.0021)	0.1984 (0.0048)	-0.0023 (0.0185)	-0.0003 (0.0072)	0.4343 (-)	3.3674 (-)	0.5869 (9.0931)	0.2002 (5.1565)	2.0200 (-)
(0,2)	-0.3392 (0.0030)	-0.3295 (0.0037)	0.0005 (0.0134)	0.0005 (0.0110)	-0.3296 (0.0056)	0.0001 (0.0195)	-0.4020 (-)	-0.5037 (-)	0.2199 (-)

→ Moyenne empirique de $\hat{\phi}_{(1,1)}^{((1,1))}$: (0.7998, -0.5601, 0.7003)

→ Ecart-type empirique de $\hat{\phi}_{(1,1)}^{((1,1))}$: (0.0040, 0.0059, 0.0069)

- **Descriptions des données globales :** Données mensuelles de températures de surface dans l'océan pacifique tous les 2 degrés le long de l'équateur

Jan 1999	(1,600)	(2,600)	(64,600)	(65,600)
Déc 1998	(1,599)	(2,599)			(64,599)	(65,599)
	⋮					⋮
Mois n° t	(1,t)			(x,t)		(65,t)
	⋮					⋮
Fév 1950	(1,2)	(2,2)	(64,2)	(65,2)
Jan 1950	(1,1)	(2,1)	(64,1)	(65,1)
	150°E	152°E		180°	82°W	80°W
	Degré n° x					

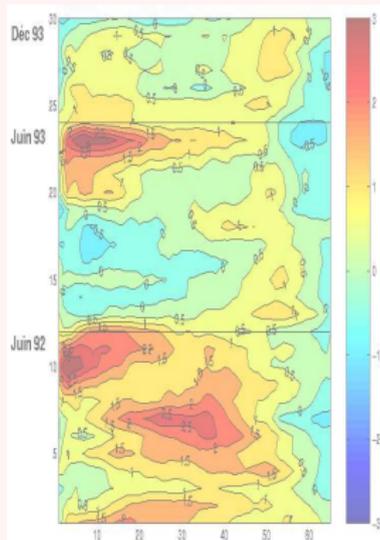
- **Modélisation AR quadrantale stationnaire** : On retranche aux données les phénomènes annuels et semi-annuels au moyen de processus MA classiques
- **Prédiction** : On s'intéresse à la prédiction de grandes phases chaudes connues sous le nom El Niño
- **Démarche** :
 - Ajustement d'un modèle AR quadrantal sur une base d'apprentissage de deux ans précédent le mois de juillet de l'année d'intérêt
 - Prédiction à 6 mois du mois de juillet au mois de décembre

Formule de prédiction en un point (u, v) du maillage

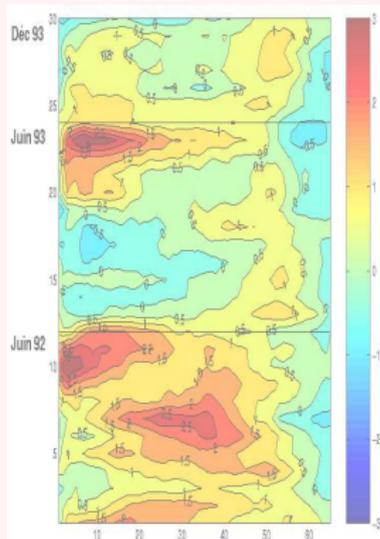
$$\hat{x}_{(u,v)} = \underline{\hat{\epsilon}_{(u,v)}} + \sum_{j \in S(\mathbf{0}, (p_x, p_t))} \hat{\phi}_{p,j} x_{(u,v)-j}$$

où $\hat{\epsilon}_{(u,v)}$ est une réalisation d'une loi normale $\mathcal{N}(0, \hat{\sigma}_p^2)$

■ Année 93 : El Niño

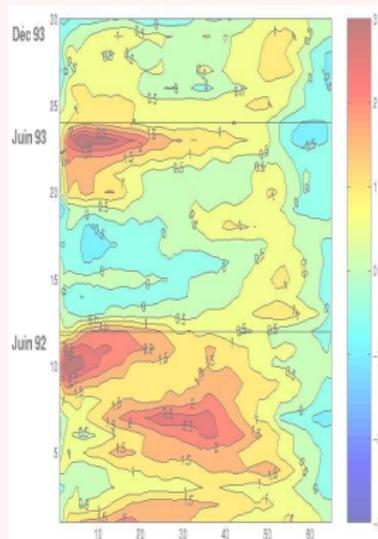


■ Année 93 : El Niño



Identification de l'ordre : $p = (3, 2)$

■ Année 93 : El Niño



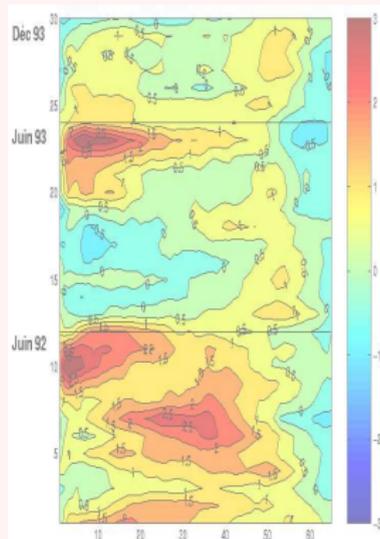
Identification de l'ordre : $p = (3, 2)$

L'observation du tableau des estimateurs $\hat{\phi}_{\lambda, \lambda}^{(\nu)}$ inciterait à choisir entre

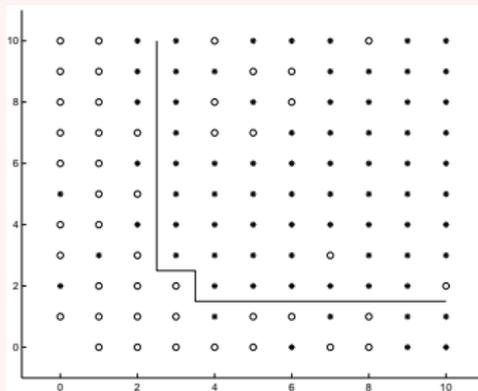
$$\rightarrow (p_x, p_t) = (3, 2) \text{ et } (q_x, q_t) = (0, 0)$$

$$\rightarrow (p_x, p_t) = (2, 1) \text{ et } (q_x, q_t) = (0, 1)$$

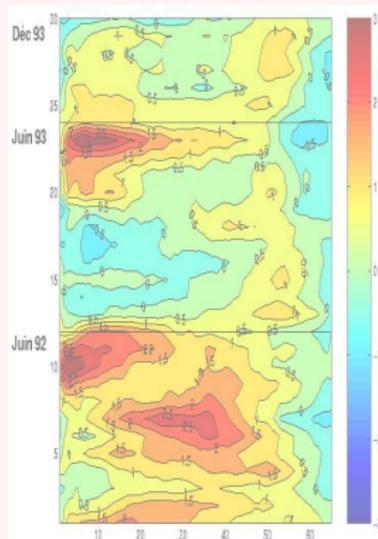
■ Année 93 : El Niño



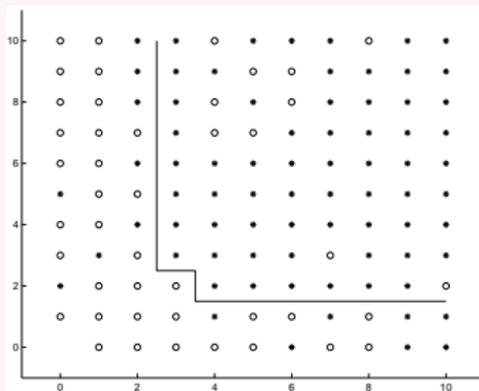
Identification de l'ordre : $p = (3, 2)$



■ Année 93 : El Niño



Identification de l'ordre : $p = (3, 2)$

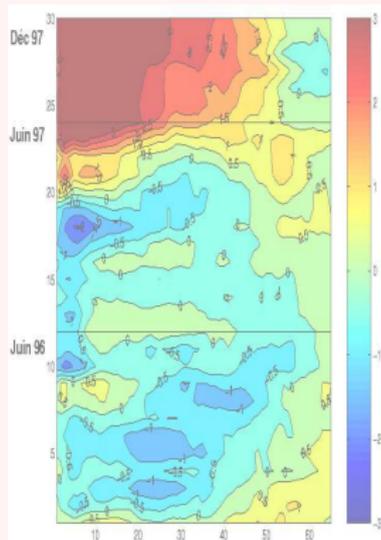


Estimation des coefficients :

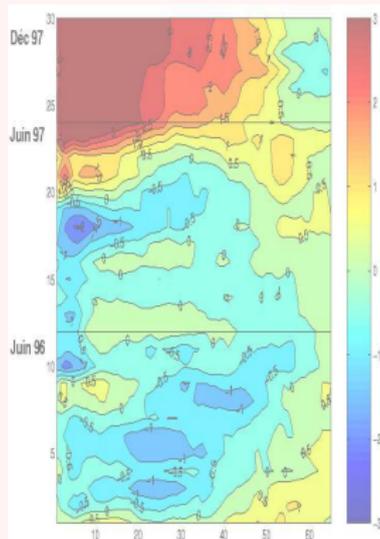
2	0.12	-0.22	0.15	-0.05
1	0.43	-0.66	0.33	-0.09
0		1.53	-0.67	0.11
j/i	0	1	2	3

Estimation de l'écart-type : $\hat{\sigma} = 0.06$

■ Année 97 : El Niño

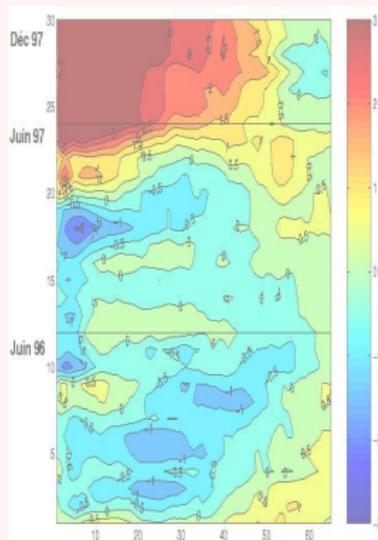


■ Année 97 : El Niño



Identification de l'ordre : $p = (5, 2)$

■ Année 97 : El Niño

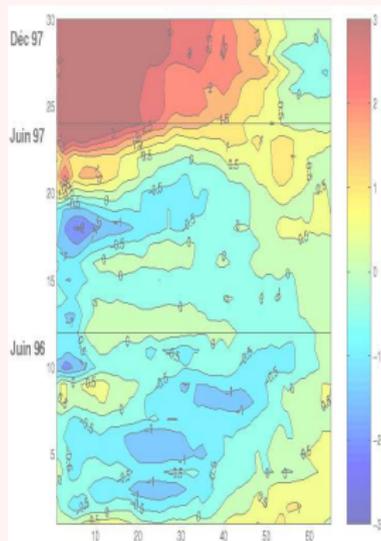


Identification de l'ordre : $p = (5, 2)$

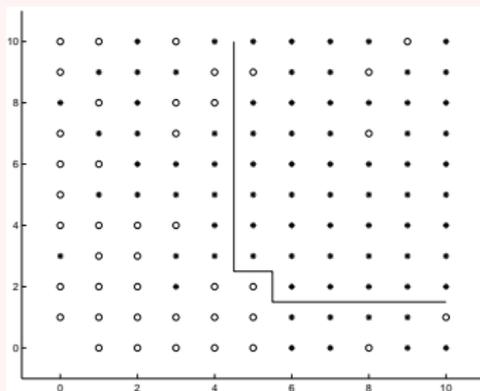
L'observation du tableau des estimateurs $\hat{\phi}_{\lambda, \lambda}^{(\nu)}$ inciterait à choisir entre

- $(p_x, p_t) = (5, 2)$ et $(q_x, q_t) = (0, 0)$
- $(p_x, p_t) = (2, 4)$ et $(q_x, q_t) = (0, 0)$
- $(p_x, p_t) = (5, 2)$ et $(q_x, q_t) = (0, 1)$

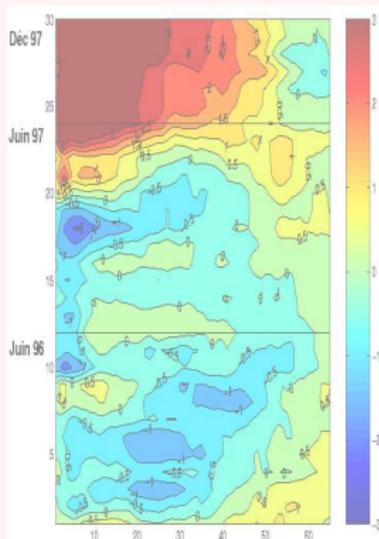
■ Année 97 : El Niño



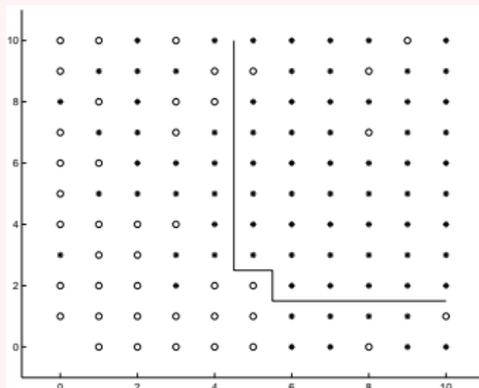
Identification de l'ordre : $p = (5, 2)$



■ Année 97 : El Niño



Identification de l'ordre : $p = (5, 2)$

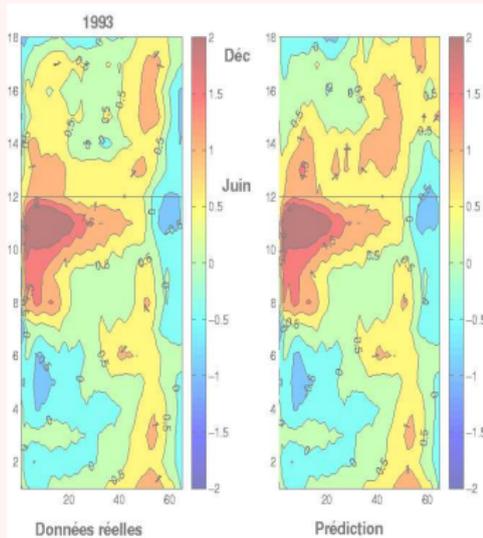


Estimation des coefficients :

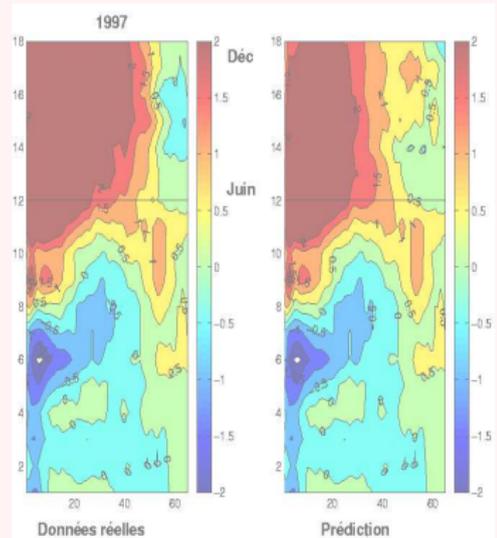
2	0.19	-0.29	0.10	-0.02	-0.05	0.07
1	0.45	-0.68	0.39	-0.20	0.04	0.02
0		1.53	-0.77	0.25	0.14	-0.18
j/i	0	1	2	3	4	5

Estimation de l'écart-type : $\hat{\sigma} = 0.05$

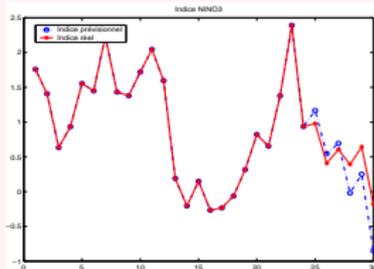
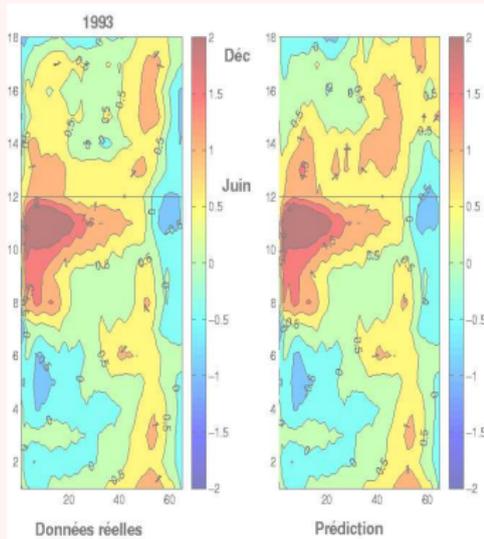
■ Année 93 : El Niño



■ Année 97 : El Niño



■ Année 93 : El Niño



■ Année 97 : El Niño

