

Modéliser et tester la longue mémoire dans les champs aléatoires

Frédéric Lavancier

lavancier@math.univ-lille1.fr

Université Lille 1
LS-CREST Paris

24 janvier 2006

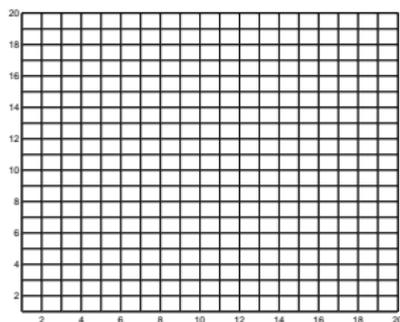
1 Introduction

- Les champs aléatoires à longue mémoire
- Motivations
- Travaux préexistants : la longue mémoire isotrope

Les champs aléatoires stationnaires sur le réseau \mathbb{Z}^d

Champ aléatoire **discret** : processus prenant des valeurs aléatoires sur le réseau \mathbb{Z}^d

En dimension 2 : réseau=grille

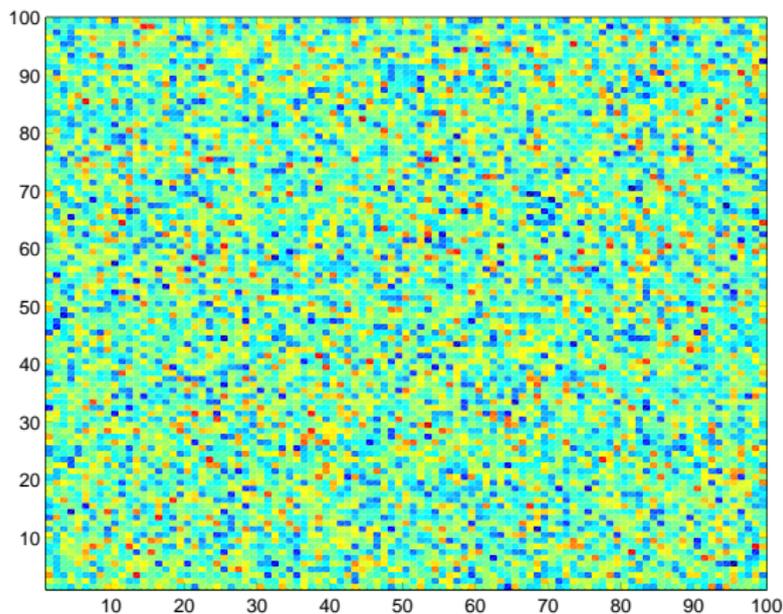


La valeur en un point du réseau est modélisée par une couleur :

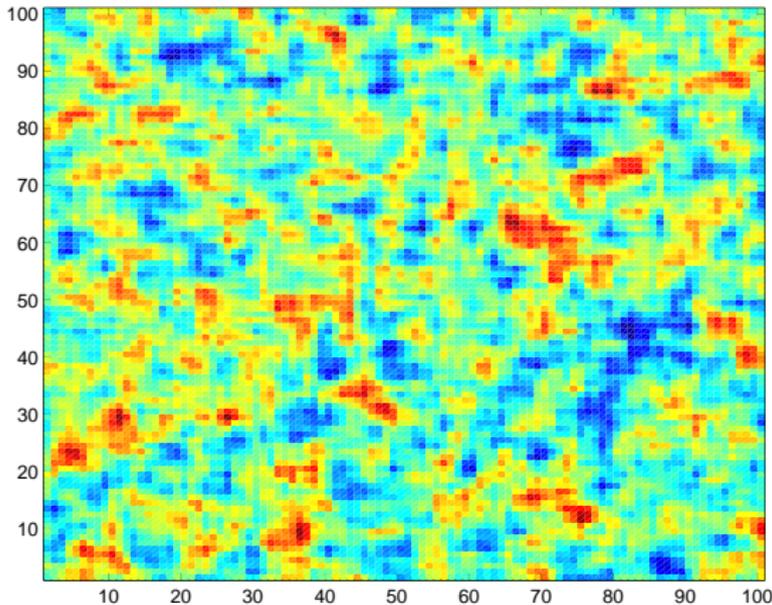


Champ aléatoire **stationnaire** : la loi générant les couleurs est invariante par translation.

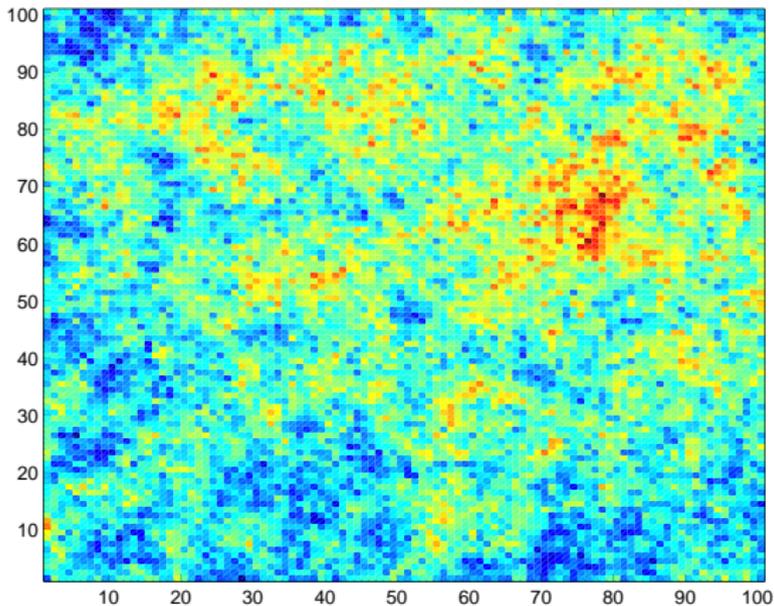
Un champ aléatoire stationnaire sur \mathbb{Z}^2 : le bruit blanc



Un champ aléatoire $\left\{ \begin{array}{l} \text{faiblement dépendant} \\ \text{à courte mémoire} \end{array} \right.$



Un champ aléatoire $\left\{ \begin{array}{l} \text{fortement dépendant} \\ \text{à longue mémoire} \end{array} \right.$



Quantification de la dépendance du champ $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}^d}$

La dépendance d'un champ aléatoire stationnaire X entre deux points distants de $h \in \mathbb{Z}^d$ est quantifiée par **la fonction de covariance**

$$r(h) = \text{cov}(X_k, X_{k+h}) = \text{cov}(X_0, X_h).$$

Autre outil d'étude de la dépendance : **la densité spectrale** f définie sur $[-\pi, \pi]^d$ par

$$r(h) = \int_{[-\pi, \pi]^d} e^{i\langle \lambda, h \rangle} f(\lambda) d\lambda.$$

Remarque

Les deux approches sont très liées mais pas équivalentes

La longue mémoire

Définition

Un champ aléatoire X est à longue mémoire si sa fonction de covariance est non sommable, i.e.

$$\sum_{h \in \mathbb{Z}^d} |r(h)| = \infty.$$

Proposition

Si la densité spectrale f de X est non-bornée alors X est à longue mémoire.

Exemples

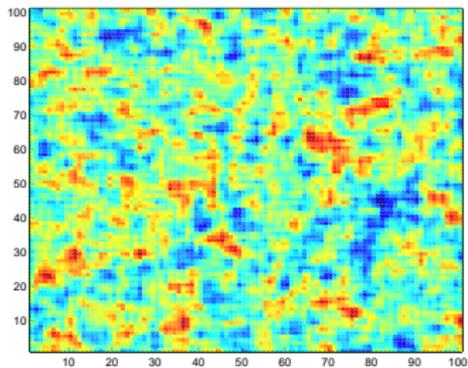
En dimension $d = 2$,

$$f(x, y) = |x|^{-\alpha} |y|^{-\beta}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad 0 < \beta < 1;$$

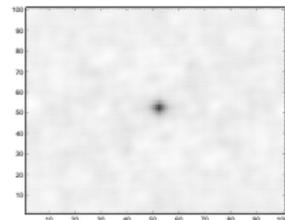
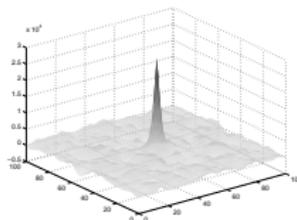
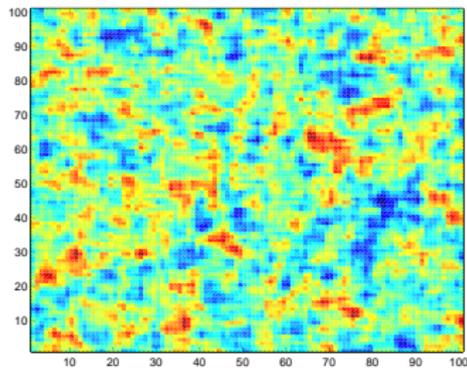
$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^{-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1;$$

$$f(x, y) = |x - y|^{-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Exemple : champ à courte mémoire

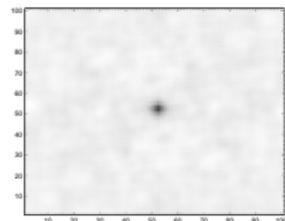
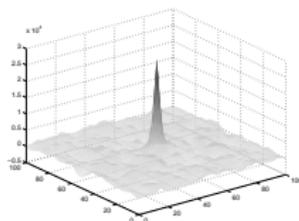
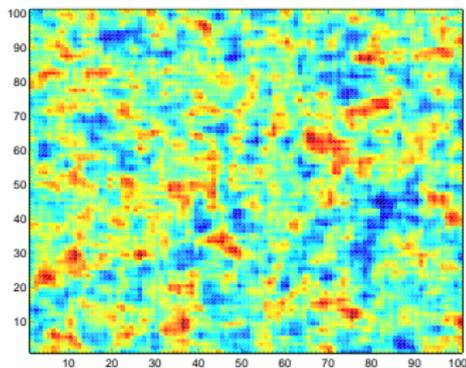


Exemple : champ à courte mémoire

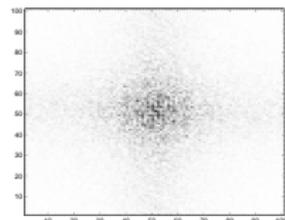
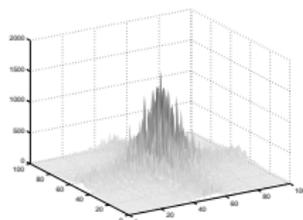


Sa fonction de covariance.

Exemple : champ à courte mémoire

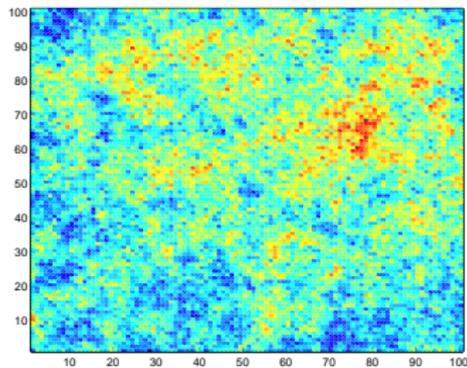


Sa fonction de covariance.

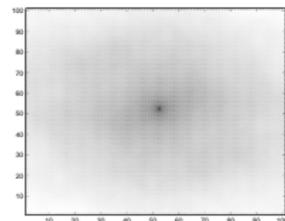
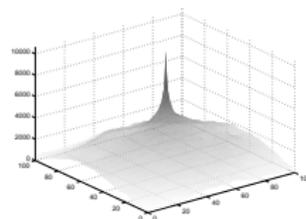
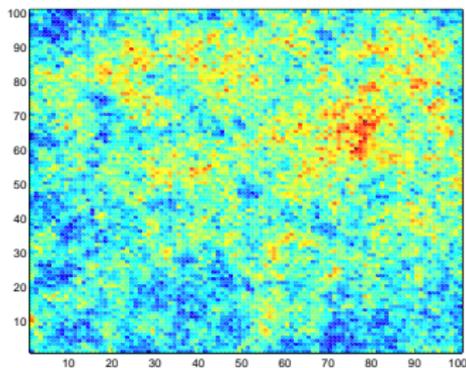


Son périodogramme.

Exemple : champ à longue mémoire isotrope

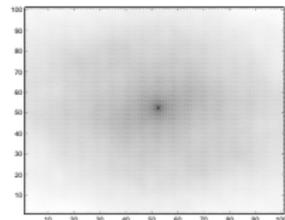
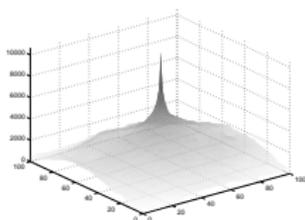
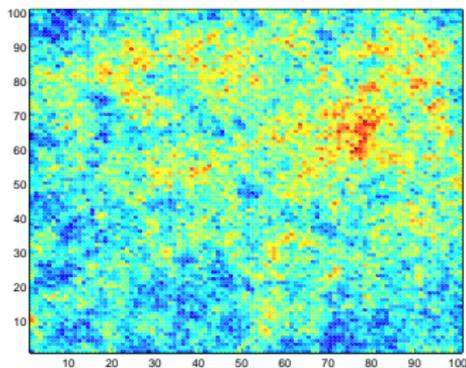


Exemple : champ à longue mémoire isotrope

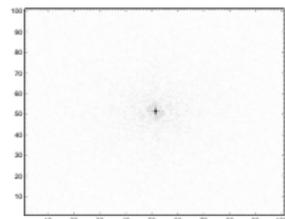
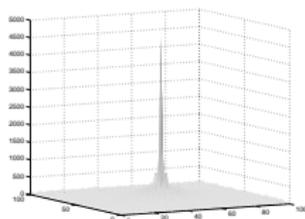


Sa fonction de covariance.

Exemple : champ à longue mémoire isotrope

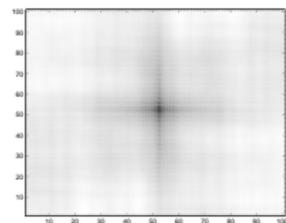
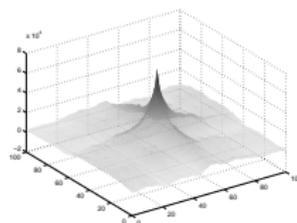
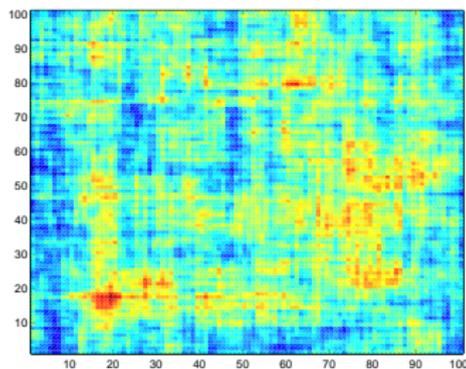


Sa fonction de covariance.

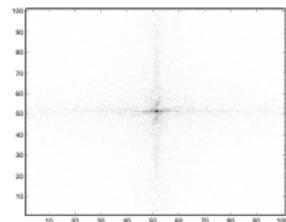
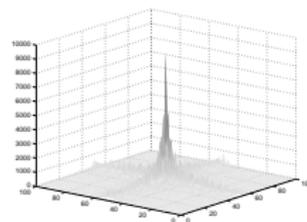


Son périodogramme.

Exemple : champ à longue mémoire de type produit

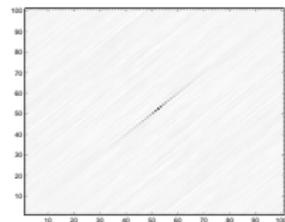
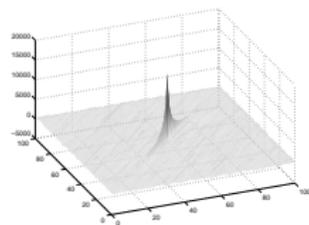
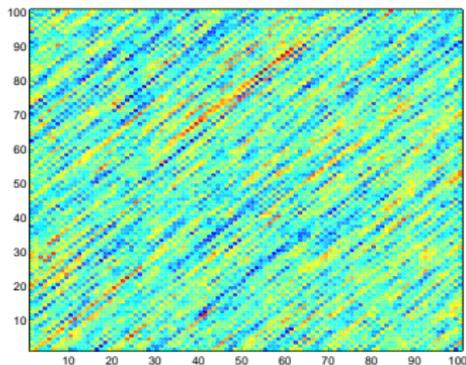


Sa fonction de covariance.

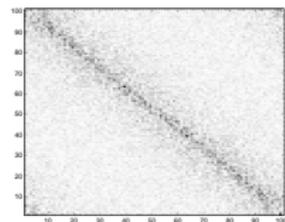
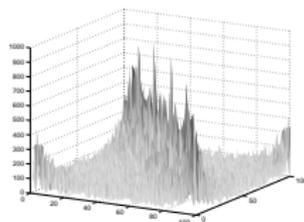


Son périodogramme.

Exemple : champ à longue mémoire non isotrope



Sa fonction de covariance.



Son périodogramme.

Motivations

- Existe-t-il des modèles mathématiques “naturels” conduisant à des champs à longue mémoire ?
- Etant donné une réalisation d’un champ à longue mémoire,
 - peut-on tester la propriété de forte dépendance ?
 - peut-on estimer la longue mémoire (direction, intensité,...) ?
- Peut-on utiliser les méthodes statistiques usuelles (en régression, en prévision,...) ?
- Comment se comportent les outils théoriques de base de la statistique asymptotique (sommes partielles, processus empirique,...) ?

Travaux préexistants

- En analyse d'images :
 - Quelques modèles de textures d'images (Kashyap et Lapsa, 1984, Bennett et Khotanzad, 1998 et Eom, 2001).
- En statistique asymptotique, sous l'hypothèse de **longue mémoire "isotrope"** :
 - Etude des sommes partielles (Dobrushin et Major, 1979 et Surgailis, 1982).
 - Etude du processus empirique (Doukhan, Lang et Surgailis, 2002).
 - Etude des formes quadratiques (Heyde et Gay, 1993 et Doukhan, Leon et Soulier, 1996).
 - Etude des temps locaux (Doukhan et Leon, 1996).

La longue mémoire “isotrope”

Définition

Un champ aléatoire stationnaire est à longue mémoire “isotrope” si l’une des deux conditions suivantes est vérifiée

- *sa fonction de covariance vérifie*

$$r(n) = \|n\|^{-\alpha} b \left(\frac{n}{\|n\|} \right) L(\|n\|), \quad 0 < \alpha < d.$$

- *sa densité spectrale est continue partout sauf en l’origine où elle vérifie :*

$$f(x) \underset{0}{\sim} \|x\|^{\alpha-d} b \left(\frac{x}{\|x\|} \right) L \left(\frac{1}{\|x\|} \right), \quad 0 < \alpha < d.$$

où L est une fonction à variation lente à l’infini et b est une fonction continue sur la sphère unité de \mathbb{R}^d .

2 Modélisation

- Modélisation par filtrage
- Modélisation par agrégation
- Modélisation en mécanique statistique

Modélisation par filtrage : champs autorégressifs

Soit $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{Z}^d}$ un bruit blanc, $P(L_1, \dots, L_d)X_{n_1, \dots, n_d} = \epsilon_{n_1, \dots, n_d}$ admet une unique solution stationnaire ssi

$$\int_{[-\pi, \pi]^d} \left| \frac{1}{P(e^{i\lambda_1}, \dots, e^{i\lambda_d})} \right|^2 d\lambda < \infty.$$

Si $d = 1 \quad \forall \lambda, P(e^{i\lambda}) \neq 0 \iff \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{1}{P(e^{i\lambda})} \right|^2 d\lambda < \infty$

Si $d \geq 2 \quad \forall \lambda, P(e^{i\lambda_1}, \dots, e^{i\lambda_d}) \neq 0 \implies \int_{[-\pi, \pi]^d} \left| \frac{1}{P(e^{i\lambda_1}, \dots, e^{i\lambda_d})} \right|^2 d\lambda < \infty.$

Exemple

$$X_{n_1, \dots, n_5} - \frac{1}{5}(X_{n_1-1, n_2, \dots, n_5} + \dots + X_{n_1, \dots, n_5-1}) = \epsilon_{n_1, \dots, n_5}$$

admet une solution stationnaire de densité spectrale

$$f_X(\lambda_1, \dots, \lambda_5) \propto \frac{1}{\left| 1 - \frac{1}{5}(e^{i\lambda_1} + \dots + e^{i\lambda_5}) \right|^2}.$$

Modélisation par filtrage : cas général

Soit $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{Z}^d}$ un bruit blanc de représentation spectrale

$$\epsilon_n = \int_{[-\pi, \pi]^d} e^{i\langle n, \lambda \rangle} dW(\lambda),$$

où W est la mesure spectrale aléatoire de ϵ .

Propriété

Le champ obtenu par filtrage de ϵ à travers le filtre a , défini par

$$X_n = \int_{[-\pi, \pi]^d} e^{i\langle n, \lambda \rangle} a(\lambda) dW(\lambda) = \sum_{j_1, \dots, j_d} \hat{a}_{j_1, \dots, j_d} \epsilon_{n_1 - j_1, \dots, n_d - j_d},$$

où \hat{a} sont les coefficients de Fourier de a , admet la densité spectrale

$$f_X(\lambda) \propto |a(\lambda)|^2.$$

X est à longue mémoire dès que le filtre a est non-borné

Exemples de filtrage en dimension $d = 2$

Exemple (Longue mémoire anisotrope)

$$a(\lambda_1, \lambda_2) = |\lambda_1 - \lambda_2|^{-\alpha} \text{ où } 0 < \alpha < \frac{1}{2}.$$

Exemple (Longue mémoire dépendant des directions)

$$X_{n_1, n_2} = \left(1 - \frac{L_1 + L_2}{2}\right)^{-\alpha} \epsilon_{n_1, n_2}, \quad 0 < \alpha < \frac{1}{2},$$

admet la densité spectrale

$$f(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\sigma^2}{4\pi^2} \left(4 \sin^2 \frac{\lambda_1}{2} \sin^2 \frac{\lambda_2}{2} + \sin^2 \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\right)\right)^{-\alpha}.$$

Modélisation par agrégation

On construit N copies indépendantes du champ autorégressif

$$P(L_1, L_2)X_{n_1, n_2} = \epsilon_{n_1, n_2},$$

où P est un polynôme à coefficients aléatoires indépendant de ϵ .
Le champ agrégé est obtenu par le TCL classique :

$$Z_{n, m} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N X_{n, m}^{(k)}.$$

Le champ gaussien Z admet la densité spectrale :

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{(2\pi)^d} \mathbb{E} |P^{-1}(e^{i\lambda_1}, e^{i\lambda_2})|^2.$$

Si la loi sur les coefficients de P est choisie convenablement, Z est un champ gaussien à longue mémoire.

Exemple (Modélisation d'une l.m. de type produit)

$$P(L_1, L_2) = (1 - \beta_1 L_1)(1 - \beta_2 L_2)$$

où β_1 et β_2 suivent une loi de densité $\sqrt{1-x}$.

On a alors

- $f(\lambda_1, \lambda_2) \propto \frac{1}{\sqrt{|\lambda_1||\lambda_2|}}$ en $(\lambda_1, \lambda_2) = (0, 0)$
- $r(h, l)$ non sommable.

Exemple (Modélisation d'une l.m dans une direction privilégiée)

$$P(L_1, L_2) = 1 - \beta L_1 L_2$$

où β suit une loi de densité $\sqrt{1-x}$.

On a alors

- $f(\lambda_1, \lambda_2) \propto \frac{1}{\sqrt{|\lambda_1 + \lambda_2|}}$ en $(\lambda_1, \lambda_2) = (0, 0)$
- $r(h, l) = 0$ si $h \neq l$ et $r(h, h)$ non sommable.

Modélisation en mécanique statistique

Le modèle d'Ising : Les spins sont à valeurs dans $\{-1, 1\}$ et le potentiel d'interactions est

$$\Phi_{i,j}(x_i, x_j) = \begin{cases} \beta x_i x_j & \text{si } \sum_{k=1}^d |i_k - j_k| = 1 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $\beta > 0$ représente l'inverse de la température.

Lorsque $d \geq 2$, il y a transition de phase si $\beta \geq \beta_c$ et

$$r(h) \underset{h \rightarrow \infty}{\sim} |h|^{-(d-2+\mu)}, \quad \text{en } \beta = \beta_c,$$

où $\mu \in [0, 2]$ est un paramètre qui dépend de d .

Modélisation en mécanique statistique

-Les systèmes gaussiens homogènes : $x_i \in \mathbb{R}$ et

$$\Phi_{i,j}(x_i, x_j) = \begin{cases} \frac{1}{2}J(0)x_i^2 & \text{si } i = j \\ J(i-j)x_i x_j & \text{si } i \neq j, \end{cases}$$

où $(J(i))_{i \in \mathbb{Z}^d}$ est une suite paire définie positive de $l^1(\mathbb{Z}^d)$.

Théorème (Dobrushin 1980, Künsch 1980)

Si

$$\int_{[-\pi, \pi]^d} \hat{J}^{-1}(\lambda) d\lambda < \infty,$$

*alors les phases pures sont gaussiennes de mesures spectrales \hat{J}^{-1} .
De plus, il y a transition de phase ssi \hat{J} admet une racine.*

Pour les systèmes homogènes gaussiens,

Système en transition de phase \iff Champ à longue mémoire.

Exemple (Le potentiel harmonique en dimension $d \geq 3$)

$$J(n) = \begin{cases} -\frac{1}{2d} & \text{si } |n| = 1 \\ 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a

$$\hat{J}(\lambda)^{-1} \sim \left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^d \lambda_k^2 \right)^{-1}, \quad \text{lorsque } \lambda \rightarrow 0.$$

Exemple (En dimension $d = 2$, direction privilégiée)

$$J(k, \ell) = \begin{cases} \prod_{0 < j \leq k} \frac{j-1-\alpha}{j+\alpha} & \text{si } \ell = \theta k, |k| > 1 \\ 1 & \text{si } k = \ell = 0 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $\alpha \in]0, 1/2[$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On montre que

$$\hat{J}(\lambda_1, \lambda_2)^{-1} \propto \left| 2 \sin \left(\frac{\lambda_1 + \theta \lambda_2}{2} \right) \right|^{-2\alpha}.$$

3 Tester la longue mémoire

Test recherché

- Hypothèse nulle : X est à courte mémoire
- Hypothèse alternative : X est à longue mémoire

La statistique de test est basée sur la variance des sommes partielles

$$S_j^* = \sum_{i_1=1}^{j_1} \cdots \sum_{i_d=1}^{j_d} (X_{i_1, \dots, i_d} - \bar{X}_n).$$

Pourquoi ?

→ Le comportement asymptotique des sommes partielles permet de distinguer la faible dépendance de la forte dépendance.

- ④ Etude asymptotique des sommes partielles
 - Sommes partielles en courte mémoire
 - Résultats préexistants en longue mémoire “isotrope”
 - Approche spectrale
 - Application aux sommes partielles

Sommes partielles en courte mémoire

Théorème (Wichura (1971), Dedecker (2001))

Soit X un champ aléatoire stationnaire et du second ordre vérifiant

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}^d} |r(j)| < \infty.$$

Sous des hypothèses de moments sur X et en posant

$$\sigma^2 = \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} r(j),$$

$$\frac{1}{\sigma n^{d/2}} \sum_{k_1=1}^{[nt_1]} \cdots \sum_{k_d=1}^{[nt_d]} X_{k_1, \dots, k_d} \xrightarrow{\mathcal{D}([0,1]^d)} B(t_1, \dots, t_d),$$

où B est le drap brownien sur $[0, 1]^d$ i.e. le champ gaussien de fonction de covariance $\gamma(s, t) = \prod_{i=1}^d s_i \wedge t_i$.

Résultats préexistants en longue mémoire “isotrope”

Soit $X_k = \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} a_j \xi_{k-j}$ où $(\xi_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$ est un bruit blanc fort et où

$$a_j = |j|^{-\beta} L(|j|) b \left(\frac{j}{|j|} \right), \quad \frac{d}{2} < \beta < d,$$

avec L une fonction à variation lente à l’infini et b une fonction continue sur la sphère unité de \mathbb{R}^d .

→ Le champ X est à longue mémoire “isotrope”.

Théorème (Dobrushin and Major (1979), Surgailis (1982), Avram et Taqqu (1987))

$$\frac{1}{n^{d-m(\beta-\frac{d}{2})} L(n)^m} \sum_{k_1=1}^{[nt_1]} \cdots \sum_{k_d=1}^{[nt_d]} P_m(X_{k_1, \dots, k_d}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{fidi} Z_m(t),$$

où P_m est le polynôme d’Appell de degré m et Z_m le processus de Hermite d’ordre m .

Approche spectrale pour des champs linéaires

Soit le champ linéaire

$$X_{k_1, \dots, k_d} = \sum_{j_1, \dots, j_d} \hat{a}_{j_1, \dots, j_d} \xi_{k_1 - j_1, \dots, k_d - j_d} = \int_{[-\pi, \pi]^d} e^{i\langle k, \lambda \rangle} a(\lambda) dW(\lambda),$$

où \hat{a} est la transformée de Fourier du filtre a et où ξ est un bruit de représentation spectrale :

$$\xi_k = \int e^{i\langle k, \lambda \rangle} dW(\lambda).$$

Les sommes partielles de X ,

$$S_n^X(t_1, \dots, t_d) = n^{-d/2} \sum_{k_1=0}^{[nt_1]-1} \dots \sum_{k_d=0}^{[nt_d]-1} X_{k_1, \dots, k_d},$$

peuvent se réécrire

$$S_n^X(t) = \int_{[-n\pi, n\pi]^d} a\left(\frac{\lambda}{n}\right) \prod_{j=1}^d \frac{e^{i\lambda_j [nt_j]/n} - 1}{n(e^{i\lambda_j/n} - 1)} dW_n(\lambda),$$

où $W_n(A) = n^{d/2} W(n^{-1}A)$.

Théorème (Lang et Soulier (2000) pour $d = 1$, Lavancier pour $d \geq 1$)

Soit $W_n(A) = n^{d/2}W(n^{-1}A)$ où W est la mesure spectrale aléatoire d'un bruit blanc fort.

Si

$$\Phi_n \xrightarrow{L^2(\mathbb{R}^d)} \Phi,$$

alors

$$\int \Phi_n dW_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \int \Phi dW_0,$$

où W_0 est la mesure spectrale associée au bruit blanc gaussien.

Remarque

Le résultat reste vrai lorsque W est associé à un bruit non i.i.d. pourvu que sa densité spectrale soit bornée et qu'il vérifie un théorème central limite fonctionnel.

Application aux sommes partielles pour $d \leq 2$

Rappel : $X_k = \sum \hat{a}_j \xi_{k-j} = \int_{[-\pi, \pi]^d} e^{i\langle k, \lambda \rangle} a(\lambda) dW(\lambda)$,
d'où $f_X(\lambda) \propto |a|^2(\lambda)$.

Proposition (Lavancier, CLT)

Si a est continue en 0 et $a(0) \neq 0$,

$$\frac{1}{n^{d/2}} \sum_{k_1=0}^{[nt_1]} \cdots \sum_{k_d=0}^{[nt_d]} X_{k_1, \dots, k_d} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{fidi} a(0)B(t),$$

où B est le drap Brownien.

Remarque

Le résultat concerne

- Des champs à courte mémoire (lorsque a est continue partout)
- Des champs à longue mémoire dont la singularité spectrale est hors de l'origine (ex : $a(\lambda_1, \lambda_2) = |\lambda_1 \lambda_2 - 1|^\alpha$, $0 < \alpha < 1/2$)

Application aux sommes partielles pour $d \leq 2$

Proposition (Lavancier, Non-CLT)

Si $a(\lambda) \sim \tilde{a}(\lambda)$ en 0 avec $\tilde{a}(c\lambda) = |c|^{-\alpha} \tilde{a}(\lambda)$ ($0 < \alpha < 1$),

$$\frac{1}{n^{d/2+\alpha}} \sum_{k_1=0}^{[nt_1]} \cdots \sum_{k_d=0}^{[nt_d]} X_{k_1, \dots, k_d} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{fidi} \int \tilde{a}(\lambda) \prod_{j=1}^d \frac{e^{it_j \lambda_j} - 1}{i \lambda_j} dW_0(\lambda).$$

Remarque

Ce résultat concerne des champs à longue mémoire

- isotrope, ex : $\tilde{a}(\lambda_1, \lambda_2) = (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)^{-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$.
- non-isotrope, ex : $\tilde{a}(\lambda_1, \lambda_2) = |\lambda_1 + \theta \lambda_2|^{-\alpha}$, $0 < \alpha < 1/2$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Rappel :

$$X_n = \int_{[-\pi, \pi]^d} e^{i\langle n, \lambda \rangle} a(\lambda) dW(\lambda).$$

Remarque (Convergence vers le Drap Brownien Fractionnaire)

Si

$$a(\lambda) = \prod_{j=1}^d a_j(\lambda_j),$$

où, pour tout j , $a_j(\lambda_j) \sim_0 |\lambda_j|^{-\alpha_j}$, $0 < \alpha_j < 1/2$, alors

$$\frac{1}{n^{(d/2 + \sum_j \alpha_j)}} \sum_{k_1=0}^{[nt_1]} \cdots \sum_{k_d=0}^{[nt_d]} X_{k_1, \dots, k_d} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{fidi} \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{j=1}^d \frac{e^{it_j \lambda_j} - 1}{i \lambda_j |\lambda_j|^{\alpha_j}} dW_0(\lambda).$$

- 5 Procédure de test et simulations
 - Hypothèses et Statistique du test
 - Consistance du test
 - Simulations en dimension $d = 2$

Hypothèses du test

Hypothèse nulle : courte mémoire

- $\sum_{j \in \mathbb{Z}^d} |r(j)| < \infty$
-

$$\frac{n^{-d/2}}{\sigma} \sum_{k_1=1}^{[nt_1]} \cdots \sum_{k_d=1}^{[nt_d]} X_k \xrightarrow{\mathcal{D}([0,1]^d)} B(t),$$

où $\sigma^2 := \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} r(j)$ et où B est le drap Brownien sur $[0, 1]^d$.

- Hypothèses de moments.

Hypothèse alternative : longue mémoire

$$\frac{n^{-\gamma}}{L(n)} \sum_{k_1=1}^{[nt_1]} \cdots \sum_{k_d=1}^{[nt_d]} X_k \xrightarrow{\mathcal{D}([0,1]^d)} Y(t),$$

où $\gamma > d/2$, L est fonction à variation lente à l'infini et Y est un processus mesurable.

Statistique du test

Soit q_n un entier dans $[1, n]$, un estimateur de $\sigma^2 := \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} r(j)$ est

$$\hat{s}_{q_n, n}^2 = \sum_{j \in \{-q_n, \dots, q_n\}^d} \omega_{q_n, j} \hat{r}(j), \quad \text{où } \begin{cases} \hat{r} : \text{fonction de covariance empirique} \\ \omega_{q_n, j} = \prod_{i=1}^d (1 - \frac{|j_i|}{q_n}) \end{cases}$$

Soit
$$S_j^* = \sum_{i_1=1}^{j_1} \dots \sum_{i_d=1}^{j_d} (X_{i_1, \dots, i_d} - \bar{X}_n).$$

Définition (Extension de la statistique V/S au cas $d > 1$)

Soit $A_n = \{1, \dots, n\}^d$, la statistique V/S est définie par

$$M_n = n^{-d} \frac{\widehat{\text{Var}}(S_j^*, j \in A_n)}{\hat{s}_{q_n, n}^2},$$

soit en développant

$$M_n = \frac{n^{-2d}}{\hat{s}_{q_n, n}^2} \left[\sum_{j \in A_n} S_j^{*2} - n^{-d} \left(\sum_{j \in A_n} S_j^* \right)^2 \right].$$

Consistance du test

Proposition (Lavancier, Sous l'hypothèse nulle)

Sous l'hypothèse nulle, en choisissant q_n tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \infty$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n/n = 0$, on a

$$M_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \int_{[0,1]^d} \left(B(t) - \left(\prod_{i=1}^d t_i \right) B(1) \right)^2 dt - \left[\int_{[0,1]^d} \left(B(t) - \left(\prod_{i=1}^d t_i \right) B(1) \right) dt \right]^2,$$

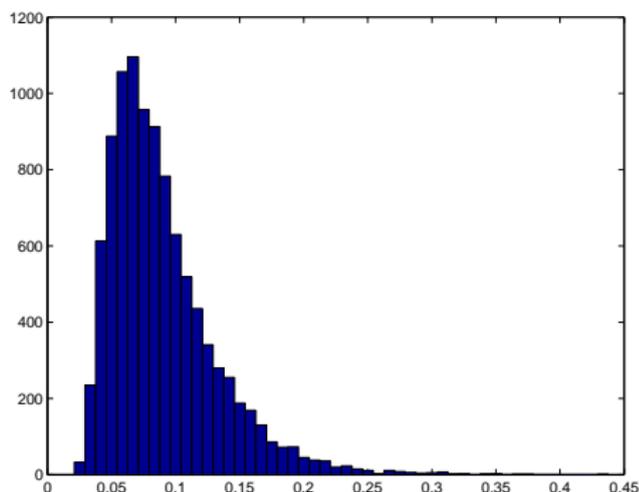
où B est le drap brownien standard sur $[0, 1]^d$.

Proposition (Lavancier, Sous l'hypothèse alternative)

Sous l'hypothèse alternative, en choisissant q_n tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \infty$ et pour tout $\delta > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n/n^\delta = 0$,

$$M_n \xrightarrow{P} \infty.$$

Simulation de la loi asymptotique sous l'hypothèse nulle lorsque $d = 2$



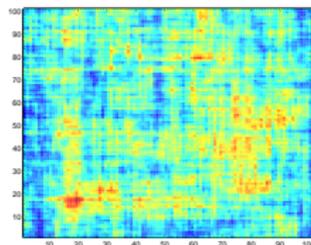
$$\text{Moyenne} = 0,0897$$

$$\text{Variance} = 0,0018$$

$$c_{90\%} = 0,1448$$

$$c_{95\%} = 0,1692$$

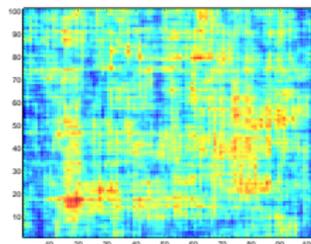
Simulations sur des champs 50×50 avec $q = 8$



$$f(\lambda_1, \lambda_2) \propto |\lambda_1|^{-\gamma} |\lambda_2|^{-\gamma}, \quad 0 < \gamma < 1.$$

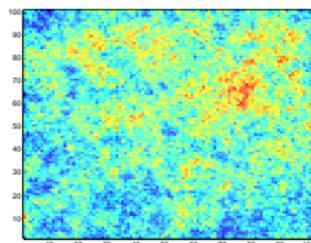
γ	0,75	0,5	0,25
\hat{p}	81%	75,4%	62,4%

Simulations sur des champs 50×50 avec $q = 8$



$$f(\lambda_1, \lambda_2) \propto |\lambda_1|^{-\gamma} |\lambda_2|^{-\gamma}, \quad 0 < \gamma < 1.$$

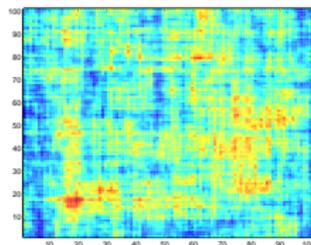
γ	0,75	0,5	0,25
\hat{p}	81%	75,4%	62,4%



$$f(\lambda_1, \lambda_2) \propto (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)^{-\gamma}, \quad 0 < \gamma < 1.$$

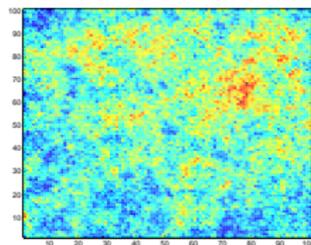
γ	0,96	0,7	0,4
\hat{p}	75%	58,1%	32,7%

Simulations sur des champs 50×50 avec $q = 8$



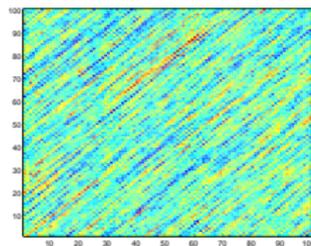
$$f(\lambda_1, \lambda_2) \propto |\lambda_1|^{-\gamma} |\lambda_2|^{-\gamma}, \quad 0 < \gamma < 1.$$

γ	0,75	0,5	0,25
\hat{p}	81%	75,4%	62,4%



$$f(\lambda_1, \lambda_2) \propto (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)^{-\gamma}, \quad 0 < \gamma < 1.$$

γ	0,96	0,7	0,4
\hat{p}	75%	58,1%	32,7%



$$f(\lambda_1, \lambda_2) \propto |\lambda_1 - \lambda_2|^{-\gamma}, \quad 0 < \gamma < 1.$$

γ	0,75	0,5	0,25
\hat{p}	27%	27%	24,5%