

Hyperbolicité du complexe des courbes

A. Lonjou

16 juin 2014

Encadrant de mémoire : S. Lamy

Table des matières

1	Hyperbolicité	3
1.1	Premiers exemples	3
1.2	Courbure négative	4
1.3	Critère de Bowditch	6
1.4	Groupes hyperboliques	13
2	Complexe des courbes	15
2.1	Groupe modulaire	15
2.2	Propriétés du complexe des courbes	17
2.2.1	Connexité du complexe des courbes	20
2.2.2	Diamètre infini du complexe des courbes	21
2.2.3	Hyperbolicité du complexe des courbes	26
2.2.4	Graphe non localement fini	29
3	Propriété WPD	30

Introduction

Faire agir un groupe sur un graphe hyperbolique est en général une bonne idée pour obtenir des propriétés sur le groupe à étudier. Le groupe modulaire agit sur le complexe des courbes. De ce fait, le but de ce mémoire est de montrer l'hyperbolicité du complexe des courbes à l'aide d'un critère dû à Bowditch. Au passage nous étudierons certaines de ses propriétés : diamètre infini, connexité et localement infini.

La première partie du mémoire est une approche des différentes notions d'hyperbolicité : δ -hyperbolicité, courbure négative, groupes hyperboliques. Le premier exercice a donc été de trouver la meilleure constante δ pour le demi-plan de Poincaré. Le théorème phare de cette partie est le critère de Bowditch. Énoncé par Bowditch [Bow13] pour les graphes, j'ai modifié ce critère pour qu'il puisse s'appliquer à n'importe quel espace métrique géodésique ce qui nous permettra de montrer que la δ -hyperbolicité se transporte par quasi-isométrie lorsque les espaces sont des espaces géodésiques métriques quelconques. Ce résultat sera utilisé pour montrer que le complexe des courbes ainsi que le graphe de Cayley du groupe fondamental d'une surface de genre supérieur ou égal à deux sont deux espaces δ -hyperboliques.

Dans la seconde partie, nous étudierons rapidement le groupe modulaire qui n'est pas un groupe hyperbolique. De ce fait l'action sur son graphe de Cayley n'est pas facile à exploiter. C'est pour cette raison que l'on fait agir le groupe modulaire sur le graphe des courbes (le 1-squelette du complexe des courbes). En effet nous montrerons à l'aide du critère de Bowditch qu'il est δ -hyperbolique, mais avant cela nous nous assurerons qu'il est bien de diamètre infini (ce qui n'est pas évident).

En guise d'illustration, nous mentionnerons dans la dernière partie, un résultat tiré des notes de Guirardel [Gui] : faire agir le groupe modulaire sur le complexe des courbes permet de montrer que le groupe modulaire possède un grand nombre de sous-groupes distingués. L'existence de sous-groupes distingués est connue. On peut en construire un en considérant le noyau de l'action du groupe modulaire sur le premier groupe d'homologie de la surface S , ce sous-groupe est appelé le groupe de Torelli. Ce qui n'est pas évident c'est de savoir qu'il y en a un grand nombre.

Avant d'introduire les premiers outils mathématiques, je tiens à remercier vivement Stéphane Lamy pour sa grande disponibilité et ses nombreux conseils.

Nous allons maintenant introduire quelques définitions élémentaires qui seront utiles tout au long du mémoire. Considérons un espace métrique (X, d_X) . Un *segment géodésique* dans X d'extrémités x et y où $d = d_X(x, y)$ est l'image d'une isométrie $\phi : [0, d] \rightarrow X$ telle que $\phi(0) = x$ et $\phi(d) = y$. On dit qu'un espace métrique (X, d_X) est *géodésique* si pour tout couple de points x et y de X il existe un segment géodésique d'extrémités x et y . On ne demande pas l'unicité d'un tel segment.

Remarque 1. Un espace géodésique est donc connexe par arcs. Mais il existe des espaces métriques connexes par arcs qui ne sont pas des espaces géodésiques. Par exemple si on considère deux sommets reliés par une infinité d'arêtes $\{a_i\}$ où chaque arête a_i est de longueur $1 + \frac{1}{i}$ (figure 1).

Dans ce mémoire, les *graphes* seront étudiés d'un point de vue géométrique, de ce fait ils seront toujours considérés en tant qu'espace métrique. Sauf mention du contraire on munira chaque arête d'une métrique la rendant isométrique à un segment fermé de longueur 1. Ainsi, la distance sur le graphe sera la borne inférieure des longueurs de tous les chemins reliant deux points donnés.

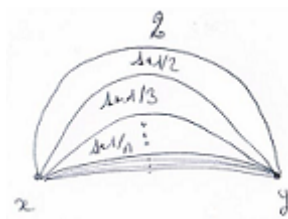


FIGURE 1 – Exemple d'espace métrique connexe par arcs non géodésique.

1 Hyperbolicité

1.1 Premiers exemples

On définit un *triangle* comme la donnée de trois sommets et d'un choix de trois segments géodésiques les reliant. Un triangle est dit δ -fin avec δ positif ou nul si chaque côté du triangle est inclus dans un δ -voisinage fermé de la réunion des deux autres côtés. Un espace X géodésique est δ -hyperbolique ou *hyperbolique au sens de Gromov* s'il existe δ tel que tous les triangles géodésiques de X soient δ -fins. Voici deux exemples classiques d'espaces métriques hyperboliques. Nous en verrons un troisième lors de la proposition 18 dans la partie sur les groupes hyperboliques : le graphe de Cayley du groupe fondamental d'une surface de genre supérieur ou égal à deux.

Exemple 2. Les arbres sont 0-hyperboliques.

Proposition 3. *Le demi-plan de Poincaré est δ -hyperbolique avec δ optimal égal à $\ln(1 + \sqrt{2})$.*

Démonstration. On se place dans le disque de Poincaré. Soit T un triangle. Il est contenu dans un triangle idéal ayant chacun de ses sommets a , b et c dans une des trois régions opposées aux sommets du triangle T (voir figure 2). Rappelons qu'un *triangle idéal* est la donnée de trois

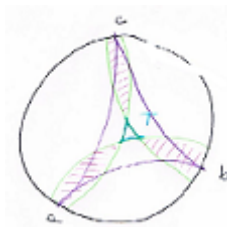


FIGURE 2 – Triangle inclus dans un triangle idéal dans le disque de Poincaré.

points à l'infini et des trois géodésiques complètes qui les relient. En faisant agir $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ sur le disque de Poincaré et par isométrie entre le disque de Poincaré et le demi-plan de Poincaré on peut envoyer a sur -1 , b sur 1 et c à l'infini. On peut donc se ramener à considérer le triangle idéal de \mathbb{H}^2 déterminé par les géodésiques $\alpha = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid \Re(z) = -1\}$, $\beta = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid \Re(z) = 1\}$ et $\gamma = \{\exp(i\theta) \mid \theta \in [0, \pi]\}$ (voir figure 3). Il nous suffit alors de trouver le plus petit δ -voisinage fermé de α et de β contenant entièrement la géodésique γ . Ainsi tous les triangles contenus dans ce triangle idéal seront δ -fin et comme on a montré qu'on peut toujours se ramener à ce cas, le demi-plan de Poincaré sera δ -hyperbolique.

Le voisinage d'une géodésique orthogonale à l'axe réel est délimité par deux demi-droites issues du même réel telles que la géodésique soit la bissectrice de l'angle formé par les deux demi-

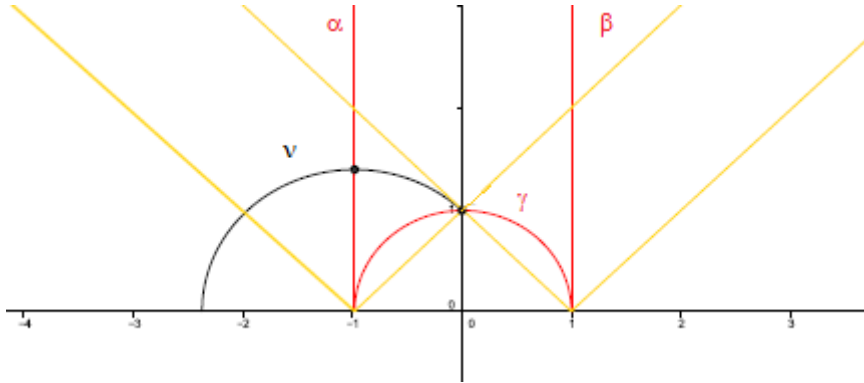


FIGURE 3 – Voisinage du triangle idéal dans le demi-plan de Poincaré.

droites. Le triangle étant symétrique il suffit de regarder le plus petit voisinage de α contenant le point i . Il nous reste à calculer la distance du point i à la géodésique α . Or si l'on considère l'unique géodésique orthogonale à α et passant par i c'est le demi-cercle centré en -1 et de rayon $\sqrt{2}$, noté ν . L'intersection des géodésiques α et ν est le point $-1 + \sqrt{2}i$, ainsi la constante δ est la distance entre i et $-1 + \sqrt{2}i$. On souhaite donc calculer la longueur du chemin $\nu(t) = \sqrt{2}e^{it} - 1$ avec $t \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$.

$$\begin{aligned} \text{long}(\nu) &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\|i\sqrt{2}e^{it}\|}{\sqrt{2}\sin(t)} dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(t)} dt = \log\left(\frac{\tan \frac{\pi}{4}}{\tan \frac{\pi}{8}}\right) = \log\left(\frac{\cos \frac{\pi}{8}}{\sin \frac{\pi}{8}}\right) = \log\left(\frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{\sqrt{2}-\sqrt{2}}\right) \\ &= \frac{1}{2} \log\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right) \\ &= \log(\sqrt{2}+1). \end{aligned}$$

□

1.2 Courbure négative

D'après [Thu97] et [Sti92].

La *courbure de Gauss* ou simplement la courbure d'une surface S est un invariant intrinsèque de la surface c'est-à-dire qu'il ne change pas lorsque l'on plie la surface sans l'étirer.

On peut voir la courbure d'une surface en un point P en fonction de sa position locale par rapport à son plan tangent en P . En effet si en un point la surface est de courbure positive alors elle se situe localement d'un seul côté de son plan tangent et P est le seul point d'intersection entre la surface et son plan tangent. Si elle est de courbure nulle alors la surface et le plan tangent se coupent le long d'une courbe et le plan tangent reste localement d'un côté de la surface. Enfin si en un point la courbure est négative alors le plan tangent traverse la surface. Ainsi sur le tore plongé dans \mathbb{R}^3 on peut trouver les trois types de points (figure 4).

Cependant la valeur précise de la courbure dépend du comportement de la surface à l'ordre deux. Une manière de résoudre cela est de considérer un système de coordonnées dans lequel le point P est à l'origine et le plan tangent est horizontal. Cela signifie que l'on peut voir la surface localement comme le graphe d'une fonction f à deux variables telle que f et ses deux

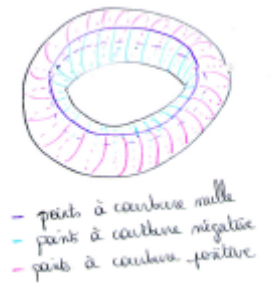


FIGURE 4 – Tore.

dérivées premières soient nulles à l'origine. La courbure de Gauss est le déterminant de la matrice hessienne.

Une autre manière de trouver la courbure de Gauss est de dessiner un cercle de rayon r sur la surface, centré au point étudié. Si la courbure est positive alors le cercle doit avoir, pour r assez petit, un périmètre égal à $2\pi \sin(r) = 2\pi r - \frac{\pi r^3}{3} + \dots$ alors que si la surface est de courbure négative, il doit être égal à $2\pi \sinh(r) = 2\pi r + \frac{\pi r^3}{3} + \dots$. La fonction sinus hyperbolique est en quelque sorte l'analogue de la fonction sinus en géométrie hyperbolique.

Il est facile de construire une surface de courbure constante positive : la sphère. En revanche cela est moins évident pour une surface de courbure constante négative. La pseudo-sphère en est un exemple (voir figure 5) : c'est la surface de révolution d'une tractrice le long de son asymptote.

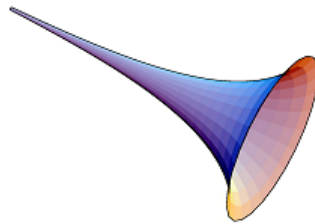


FIGURE 5 – Pseudo-sphère.

Une tractrice est une courbe déterminée par la propriété que ses tangentes rencontrent l'axe des abscisses avec une longueur constante.

Proposition 4. *La pseudo-sphère est de courbure constante négative et est localement isométrique à \mathbb{H}^2 .*

Démonstration. [Sti92, p.76] □

Cependant la pseudo-sphère est un modèle pour les surfaces à courbure constante négative moins satisfaisant que ne l'est la sphère en tant que modèle d'espace à courbure positive. D'une part, le modèle n'est pas complet car il s'arrête en $u = 0$ et d'autre part, seulement les sections tractrices de la pseudo-sphère ont une description simple dans \mathbb{R}^3 . En fait Hilbert montre en 1901 :

Théorème 5. *Il n'y a pas de surface complète C^∞ de courbure négative plongée dans l'espace Euclidien de dimension trois.*

Cela nous force donc à abandonner le point de vue euclidien pour les surfaces à courbure négative. La proposition 4 nous offre une alternative : étudier le demi-plan de Poincaré comme modèle d'espace à courbure négative.

1.3 Critère de Bowditch

Le critère suivant ainsi que la preuve sont tous deux tirés de l'article de Bowditch [Bow13]. J'ai légèrement modifié le critère et donc la preuve afin qu'il puisse être appliqué à des espaces métriques géodésiques quelconques. Initialement ce critère était écrit pour des graphes. Ceci me permettra dans la section 1.4 de montrer que le graphe de Cayley du groupe fondamental d'une surface de genre supérieur ou égal à deux est δ -hyperbolique. On utilisera le fait que la δ -hyperbolicité du demi-plan de Poincaré \mathbb{H}^2 (qui n'est bien évidemment pas un graphe) se transporte par quasi-isométrie au graphe de Cayley. Dans tout le mémoire, on notera $\mathcal{V}_h(E)$ le h -voisinage fermé d'un sous-espace E de l'espace métrique considéré.

Théorème 6 (Critère de Bowditch). *Soit $h \geq 0$ et soit X un espace métrique géodésique tel que pour tout x et y appartenant à X on associe un sous-espace connexe par arcs $\mathcal{L}(x, y)$ inclus dans X vérifiant :*

1. $\forall x, y \in X, x, y \in \mathcal{L}(x, y)$.
2. $\forall x, y, z \in X, \mathcal{L}(x, y) \subseteq \mathcal{V}_h(\mathcal{L}(x, z) \cup \mathcal{L}(z, y))$.
3. $\forall x, y \in X$ tel que $d(x, y) \leq 1$, le diamètre de $\mathcal{L}(x, y)$ dans X est au plus h .

Alors X est δ -hyperbolique avec δ dépendant de h .

Remarque 7. On pose $s = \frac{m}{2} - 2h$ où $m \geq 2h(5 + \lceil \log_2(m+2) \rceil)$. La constante δ donnée par la preuve sera égale à $3s + h$.

Étant donnés x et y dans X , on note \mathcal{G}_{xy} l'union des géodésiques reliant x et y . Soit $r \in \mathbb{R}_+$, on pose $f(r)$ le plus petit f positif ou nul tel que pour tout x et y appartenant à X vérifiant $d(x, y) \leq r$ on ait $\mathcal{L}(x, y) \subseteq \mathcal{V}_f(\mathcal{G}_{xy})$. Remarquons que $f(r)$ peut être infini.

Lemme 8. *Pour tout $r \in \mathbb{R}_+$ posons $g(r) = (1 + \lceil \log_2 r \rceil)h$. La fonction f est majorée par la fonction g .*

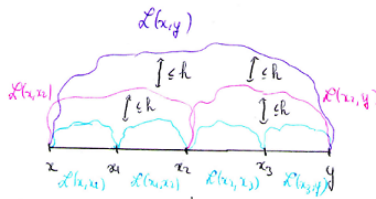


FIGURE 6 –

Démonstration. Soient x et y dans X tels que $d(x, y) \leq r$. On note $l = d(x, y)$ et $p = \lceil \log_2 l \rceil$. Soit α une géodésique reliant x et y , on considère son milieu puis les milieux des segments géodésiques obtenus etc... Comme $2^{\lceil \log_2 l \rceil - 1} \leq l \leq 2^{\lceil \log_2 l \rceil}$ après p étapes nous avons obtenus 2^p segments

de longueur inférieure ou égale à 1 et $2^p + 1$ sommets notés : $x = x_0, x_1, \dots, x_{2^p} = y$ (voir figure 6). Montrons par récurrence que pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}(x, x_{2^k}) \subseteq \mathcal{V}_{kh} \left(\bigcup_{i=0}^{2^k-1} \mathcal{L}(x_i, x_{i+1}) \right) \\ \mathcal{L}(x_{2^k}, x_{2 \cdot 2^k}) \subseteq \mathcal{V}_{kh} \left(\bigcup_{i=2^k}^{2^{k+1}-1} \mathcal{L}(x_i, x_{i+1}) \right) \\ \mathcal{L}(x_{2 \cdot 2^k}, x_{3 \cdot 2^k}) \subseteq \mathcal{V}_{kh} \left(\bigcup_{i=2^{k+1}}^{3 \cdot 2^k-1} \mathcal{L}(x_i, x_{i+1}) \right) \\ \dots \\ \mathcal{L}(x_{2^p-2^k}, y) \subseteq \mathcal{V}_{kh} \left(\bigcup_{i=2^p-2^k}^{2^p-1} \mathcal{L}(x_i, x_{i+1}) \right). \end{array} \right.$$

La propriété est vraie pour $k = 1$. En effet, le point 2 entraine :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}(x, x_2) \subseteq \mathcal{V}_h(\mathcal{L}(x, x_1) \cup \mathcal{L}(x_1, x_2)) \\ \mathcal{L}(x_2, x_4) \subseteq \mathcal{V}_h(\mathcal{L}(x_2, x_3) \cup \mathcal{L}(x_3, x_4)) \\ \dots \\ \mathcal{L}(x_{2^p-2}, y) \subseteq \mathcal{V}_h(\mathcal{L}(x_{2^p-2}, x_{2^p-1}) \cup \mathcal{L}(x_{2^p-1}, y)). \end{array} \right.$$

Supposons le résultat vrai pour $k < p$ et montrons le pour $k + 1$. D'après 2, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}(x, x_{2^{k+1}}) \subseteq \mathcal{V}_h(\mathcal{L}(x, x_{2^k}) \cup \mathcal{L}(x_{2^k}, x_{2^{k+1}})) \\ \dots \\ \mathcal{L}(x_{2^p-2^{k+1}}, y) \subseteq \mathcal{V}_h(\mathcal{L}(x_{2^p-2^{k+1}}, x_{2^p-2^k}) \cup \mathcal{L}(x_{2^p-2^k}, y)). \end{array} \right.$$

Par hypothèse de récurrence on obtient le résultat voulu. En particulier pour $k = p$ on obtient :

$$\mathcal{L}(x, y) \subseteq \mathcal{V}_{ph} \left(\bigcup_{i=0}^{2^p-1} \mathcal{L}(x_i, x_{i+1}) \right).$$

D'après le point 3, pour tout $i \in \llbracket 0, 2^p - 1 \rrbracket$ le diamètre de $\mathcal{L}(x_i, x_{i+1})$ est inférieur ou égal à h . Ainsi pour tout $i \in \llbracket 0, 2^p - 1 \rrbracket$ et pour tout u dans $\mathcal{L}(x_i, x_{i+1})$ on a $d(u, \alpha) \leq d(u, \{x_i, x_{i+1}\}) \leq h$ c'est-à-dire $\bigcup_{i=0}^{2^p-1} \mathcal{L}(x_i, x_{i+1}) \subseteq \mathcal{V}_h(\alpha)$. Par conséquent, $\mathcal{L}(x, y) \subseteq \mathcal{V}_{ph+h}(\alpha) = \mathcal{V}_{(p+1)h}(\alpha)$.

D'où par définition de f on conclut que : $f(r) \leq (p + 1)h \leq (1 + \lceil \log_2 r \rceil)h$. \square

Lemme 9. La fonction f est majorée par une constante ne dépendant que de h :

$$\forall r \in \mathbb{R}_+, f(r) \leq s$$

où $s = \frac{m}{2} + 2h$ comme dans la remarque 7.

Démonstration. Soient x et y dans X tels que $l = d(x, y)$ soit inférieure ou égale à r et α la géodésique les reliant. On choisit $w \in \mathcal{L}(x, y)$. On pose $t = f(r) + 2h + 1$, $l_0 = \max\{0, d(w, x) - t\}$ et $l_1 = \max\{0, d(w, y) - t\}$. Par l'inégalité triangulaire nous avons : $l \leq d(x, w) + d(w, y) \leq l_0 + l_1 + 2t$. On peut donc trouver des sommets x' et y' de α le coupant en sous-chemins $\alpha = \alpha_0 \cup \delta \cup \alpha_1$

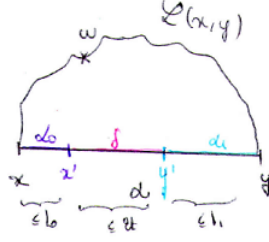


FIGURE 7 - .

$(\alpha_0 = [x, x'], \delta = [x', y'], \alpha_1 = [y, y'])$ tels que $d(x, x') \leq l_0$, $d(y, y') \leq l_1$ et $d(x', y') \leq 2t$. Si x est égal à x' (et/ou y est égal à y') on n'a pas de α_0 (et/ou de α_1) dans la décomposition de α . On peut toujours supposer x' différent de y' .

Si x est différent de x' , on a $d(w, \alpha_0) = \min_{u \in \alpha_0} d(w, u) \geq \min_{u \in \alpha_0} (|d(w, x) - d(x, u)|)$. Or le terme $d(w, x) - d(x, u)$ est positif : $d(w, x) \geq d(x, x') \geq d(x, u)$ pour tout $u \in \alpha_0$. Finalement, on obtient

$$d(w, \alpha_0) \geq \min_{u \in \alpha_0} (d(w, x) - d(x, u)) = d(w, x) - d(x, x') \geq d(w, x) - l_0.$$

De plus, $l_0 = d(w, x) - t$ (car x différent de x') donc $d(w, \alpha_0)$ est supérieure ou égale à t . Comme x' appartient à α on a $d(x, x') \leq d(x, y) \leq r$ et on obtient par définition de f que $\mathcal{L}(x, x') \subseteq \mathcal{V}_{f(r)}(\alpha_0)$. Par conséquent, on a $d(w, \mathcal{L}(x, x')) \geq t - f(r) = 2h + 1$ (voir figure 8). De

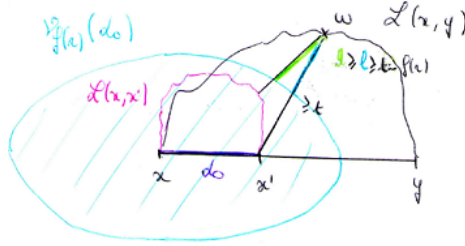


FIGURE 8 -

même si y est différent de y' , on a $d(w, \mathcal{L}(y, y')) \geq 2h + 1$.

Mais $w \in \mathcal{L}(x, y) \subseteq \mathcal{V}_{2h}(\mathcal{L}(x, x') \cup \mathcal{L}(x', y') \cup \mathcal{L}(y', y))$ par 2 et donc $d(w, \mathcal{L}(x', y')) \leq 2h$. Or $d(x', y') \leq 2t$ ce qui entraîne par définition de f que $\mathcal{L}(x', y') \subseteq \mathcal{V}_{f(2t)}(\delta)$. Par conséquent, on a $w \in \mathcal{V}_{f(2t)+2h}(\delta) \subseteq \mathcal{V}_{f(2t)+2h}(\alpha)$. Comme w est un point arbitraire de $\mathcal{L}(x, y)$ on obtient que $\mathcal{L}(x, y) \subseteq \mathcal{V}_{f(2t)+2h}(\alpha)$ ce qui implique $f(r) \leq f(2t) + 2h = f(2f(r) + 4h + 2) + 2h$.

Posons $F(r) = 2f(r) + 4h + 2$ donc $2f(r) + 4h + 2 \leq 2f(F(r)) + 8h + 2$ et on obtient finalement que pour tout $r \in \mathbb{R}_+$ $F(r) \leq F(F(r)) + 4h$. Maintenant d'après le lemme 8 :

$$F(r) \leq 2h(1 + \lceil \log_2(r) \rceil) + 4h + 2 = 2h(3 + \lceil \log_2(r) \rceil) + 2.$$

Soit m comme dans la remarque 7 ($m \geq 2h(5 + \lceil \log_2(m+2) \rceil)$) on obtient pour tout $r > m + 2$: $F(r) + 4h \leq 2h(5 + \lceil \log_2(r) \rceil) + 2 < r$ (car pour $x > \frac{2h}{\ln(2)}$ l'application $x \mapsto 2h(5 + \lceil \log_2(x) \rceil) + 2 - x$ est strictement décroissante et $m + 2 > \frac{2h}{\ln(2)}$).

En résumé on a :

$$\begin{aligned} \forall r \in \mathbb{R}_+, \quad F(r) &\leq F(F(r)) + 4h \\ \forall r > m + 2, \quad F(r) + 4h &< r. \end{aligned}$$

Supposons $F(r) > m + 2$ on a alors $F(r) \leq F(F(r)) + 4h < F(r)$ ce qui est absurde. On conclut donc que pour tout $r \in \mathbb{R}_+$, $F(r) \leq m + 2$ c'est-à-dire $f(r) \leq \frac{m}{2} - 2h =: s$. \square

Remarquons que le lemme 9 implique que pour tout x et y dans X et pour toute géodésique α reliant x et y on a $\mathcal{L}(x, y) \subseteq \mathcal{V}_s(\alpha)$.

Lemme 10. Soient x et y deux points quelconques de X . Toute géodésique reliant x et y est contenue dans $\mathcal{V}_{2s}(\mathcal{L}(x, y))$.

Démonstration. Soit $w \in \alpha$, w coupe α en deux géodésiques α^+ et α^- . Montrons par l'absurde

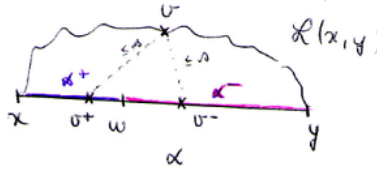


FIGURE 9 –

qu'il existe $v \in \mathcal{L}(x, y)$, $v^+ \in \alpha^+$ et $v^- \in \alpha^-$ tels que $d(v, v^+) \leq s$ et $d(v, v^-) \leq s$. Supposons qu'il n'existe pas un tel $v \in \mathcal{L}(x, y)$ on peut alors décomposer $\mathcal{L}(x, y)$ en deux parties disjointes : $L_1 = \{u \in \mathcal{L}(x, y) \mid d(u, \alpha^+) \leq s\}$ et $L_2 = \{u \in \mathcal{L}(x, y) \mid d(u, \alpha^-) \leq s\}$. L_1 et L_2 sont non vides ($x \in L_1$, $y \in L_2$) et fermés dans $\mathcal{L}(x, y)$ tels que leur réunion soit $\mathcal{L}(x, y)$ (car $\mathcal{L}(x, y) \subseteq \mathcal{V}_s(\alpha)$ d'après le lemme 9). Ce qui est impossible par connexité de $\mathcal{L}(x, y)$.

Montrons maintenant que $d(w, \{v^-, v^+\}) \leq s$. Supposons que $d(w, \{v^-, v^+\}) > s$, comme $w, v^+, v^- \in \alpha$ qui est une géodésique on a alors :

$$d(x, y) = d(x, v^+) + d(v^+, w) + d(w, v^-) + d(v^-, y) > d(x, v^+) + d(v^-, y) + 2s.$$

Or,

$$d(x, y) \leq d(x, v^+) + d(v^+, v) + d(v, v^-) + d(v^-, y) \leq d(x, v^+) + d(v^-, y) + 2s$$

ce qui est absurde. On a donc $d(w, \{v^-, v^+\}) \leq s$.

D'après l'inégalité triangulaire on obtient $d(v, w) \leq 2s$ et comme $d(w, \mathcal{L}(x, y)) \leq d(w, v)$ on conclut que $d(w, \mathcal{L}(x, y)) \leq 2s$. \square

Démonstration du théorème 6. Soient $x, y, z \in X$, α , β et γ des géodésiques reliant respectivement x et y , x et z , y et z . On a :

$$\alpha \stackrel{\text{(lemme 10)}}{\subseteq} \mathcal{V}_{2s}(\mathcal{L}(x, y)) \stackrel{2}{\subseteq} \mathcal{V}_{2s+h}(\mathcal{L}(x, z) \cup \mathcal{L}(z, y)).$$

Or d'après le lemme 9 on a :

$$\begin{cases} \mathcal{L}(x, z) \subseteq \mathcal{V}_s(\beta) \\ \mathcal{L}(z, y) \subseteq \mathcal{V}_s(\gamma) \end{cases}$$

ce qui entraîne que $\mathcal{L}(x, z) \cup \mathcal{L}(z, y) \subseteq \mathcal{V}_s(\beta \cup \gamma)$. Par conséquent on a $\alpha \subseteq \mathcal{V}_{3s+h}(\beta \cup \gamma)$ d'où $\alpha \subseteq \mathcal{V}_\delta(\beta \cup \gamma)$ où $\delta = 3s + h$.

L'espace métrique X est donc δ -hyperbolique. \square

Nous allons maintenant introduire la notion de *quasi-isométrie* qui sera très importante par la suite nous allons voir que la δ -hyperbolicité se transporte par quasi-isométrie. Je vais énoncer deux définitions et montrer qu'elles sont équivalentes ce qui me permettra d'utiliser la définition la mieux adaptée à chaque cas.

Définition 11 (quasi-isométrie). Soient (X, d_X) et $(X', d_{X'})$ deux espaces métriques. On dit que X et X' sont quasi-isométriques s'il existe des applications $f : X' \rightarrow X$ et $g : X \rightarrow X'$ et des constantes $\lambda > 0$ et $C \geq 0$ telles que :

$$\begin{aligned} d_X(f(x'), f(y')) &\leq \lambda d_{X'}(x', y') + C & \forall x', y' \in X' & \text{(i)} \\ d_{X'}(g(x), g(y)) &\leq \lambda d_X(x, y) + C & \forall x, y \in X & \text{(ii)} \\ d_{X'}(g(f(x')), x') &\leq C & \forall x' \in X' & \text{(iii)} \\ d_X(f(g(x)), x) &\leq C & \forall x \in X & \text{(iv)}. \end{aligned}$$

Définition 12. Soient (X, d_X) et $(X', d_{X'})$ deux espaces métriques. Une application $g : X \rightarrow X'$ est une *quasi-isométrie plongée* s'il existe des constantes K et L telles que :

$$\frac{1}{K} d_X(x, y) - L \leq d_{X'}(g(x), g(y)) \leq K d_X(x, y) + L$$

pour tout x et y dans X . Si de plus il existe une constante D telle que $\mathcal{V}_D(g(X)) = X'$ alors g est une *quasi-isométrie*. Dans ce cas on dit que les espaces métriques X et X' sont *quasi-isométriques*.

Proposition 13. Les définitions 11 et 12 sont équivalentes.

Démonstration. Montrons que la définition 11 implique la définition 12. Soient $f : X' \rightarrow X$ et $g : X \rightarrow X'$ deux applications vérifiant les quatre points de la définition 11 avec les constantes λ et C . Nous voulons montrer que l'application g vérifie l'inégalité de la définition 12. Intéressons-nous dans un premier temps à l'inégalité de droite. D'après le point (ii) nous avons pour tout x et y dans X :

$$d_{X'}(g(x), g(y)) \leq \lambda d_X(x, y) + C.$$

Pour l'inégalité de gauche, on a d'après l'inégalité triangulaire pour tout x et y dans X :

$$\begin{aligned} d_X(x, y) &\leq d_X(x, f \circ g(x)) + d_X(f \circ g(x), f \circ g(y)) + d_X(f \circ g(y), y) \\ &\leq 3C + \lambda d_{X'}(g(x), g(y)) \text{ d'après (i) et (iv)}. \end{aligned}$$

Ce qui entraîne : $\frac{1}{\lambda} d_X(x, y) - \frac{3C}{\lambda} \leq d_{X'}(g(x), g(y))$. En posant $K = \lambda$ et $L = \max(C, \frac{3C}{\lambda})$ l'inégalité de la définition 12 est vérifiée et g est une quasi-isométrie plongée. Pour conclure que c'est une quasi-isométrie au sens de la définition 12 il faut montrer que pour tout élément x' appartenant à X' il existe x appartenant à X tel que $d_{X'}(x', g(x))$ soit majorée indépendamment de x' , par la constante D . En utilisant le point (iii) de la définition 11 on a pour tout x' dans X' : $d_{X'}(g(f(x')), x') \leq C$. Comme $f(x')$ appartient à X on obtient bien ce que l'on cherchait en prenant $x = f(x')$ et $D = C$.

Montrons maintenant l'autre implication. Soit $g : X \rightarrow X'$ l'application vérifiant l'inégalité de la définition 12 avec les constantes K, L et D nous voulons montrer qu'il existe une application $f : X' \rightarrow X$ telle que les applications f et g vérifient les quatre points de la définition 11. L'inégalité de droite donne immédiatement pour tout x et y dans X :

$$d_{X'}(g(x), g(y)) \leq K d_X(x, y) + L.$$

Construisons maintenant l'application f . Soit x' appartenant à X' , deux cas se présentent :

- si x' appartient à l'ensemble $g(X)$ alors on choisit $f(x')$ comme étant un des antécédents par g de x' .
- sinon par hypothèse il existe y' appartenant à $g(X)$ tel que $d_{X'}(y', x') \leq D$. Ainsi on pose $f(x')$ égal à l'un des antécédents de y' par l'application g .

Pour la construction de f nous avons utilisé deux fois l'axiome du choix : une fois pour trouver y' et une autre fois pour choisir un antécédent. Remarquons que deux éléments de X ayant la même image par g sont proches de manière uniforme. En effet, si x et y appartiennent à X tels que $g(x) = g(y)$ alors on a par l'inégalité de gauche de la définition 12 : $\frac{1}{K} d_X(x, y) - L \leq 0$ ce qui implique que $d_X(x, y) \leq KL$. On a immédiatement que pour tout x dans X :

$$d_X(f \circ g(x), x) \leq KL.$$

Le point (iv) est alors vérifié en posant $\lambda = K$ et $C = \max(L, KL)$.

Vérifions maintenant que f et g satisfont les points (i) et (iii) de la définition 11. Soit x' appartenant à X' . Si x' appartient à l'ensemble $g(X)$ alors par définition de f , $f(x')$ appartient à $g(x')^{-1}$ d'où $g \circ f(x') = x'$ donc $d_{X'}(g \circ f(x'), x') = 0$. Si x' n'est pas dans l'image de g alors $f(x')$ appartient à $g(y')^{-1}$ où $d_{X'}(x', y') \leq D$ donc $g \circ f(x') = y'$ ce qui implique que $d_{X'}(g \circ f(x'), x') = d_{X'}(y', x') \leq D$. En posant $C = \max(L, KL, D)$ le point (iii) est vérifié.

Soient x' et y' appartenant à X' , par l'inégalité de gauche dans la définition 12 on a :

$$\begin{aligned} d_X(f(x'), f(y')) &\leq K d_{X'}(g \circ f(x'), g \circ f(y')) \\ &\leq K(d_{X'}(g \circ f(x'), x') + d_{X'}(x', y') + d_{X'}(y', g \circ f(y'))) \\ &\leq K d_{X'}(x', y') + 2KD \text{ (d'après l'étape ci-dessus)}. \end{aligned}$$

On conclut en posant $\lambda = K$ et $C = \max(L, KL, D, 2KD)$ les quatre points de la première définition sont remplis donc on a montré que la définition 12 implique la définition 11. Les deux définitions sont donc équivalentes. \square

Corollaire 14 (du théorème 6). *Soient (X, d_X) et $(X', d_{X'})$ deux espaces métriques géodésiques quasi-isométriques. Si $(X', d_{X'})$ est δ' -hyperbolique alors il existe δ positif ou nul tel que (X, d_X) soit δ -hyperbolique.*

Démonstration. Dans cette démonstration nous utiliserons la définition 11 de quasi-isométrie. Comme X et X' sont quasi-isométriques il existe des applications $f : X' \rightarrow X$ et $g : X \rightarrow X'$ et des constantes $\lambda > 0$ et $C \geq 0$ vérifiant les quatre points de la définition 11. Pour tout x et y dans X on pose $\mathcal{L}(x, y) = \mathcal{V}_C(f(\mathcal{G}_{g(x)g(y)}))$.

D'après iv) les points x et y appartiennent à $\mathcal{L}(x, y)$ ainsi l'hypothèse 1 du théorème 6 est vérifiée. Il reste à trouver h afin que les hypothèses 2 et 3 du théorème 6 soient validées.

Intéressons nous dans un premier temps à l'assertion 2 du théorème. Par hypothèse l'espace X' est δ' -hyperbolique donc par définition : $\mathcal{G}_{g(x)g(y)} \subseteq \mathcal{V}_{\delta'}(\mathcal{G}_{g(x)g(z)} \cup \mathcal{G}_{g(y)g(z)})$. On a par (i), $f(\mathcal{G}_{g(x)g(y)}) \subseteq \mathcal{V}_{\lambda\delta'+C}(f(\mathcal{G}_{g(x)g(z)}) \cup f(\mathcal{G}_{g(y)g(z)}))$ ce qui implique :

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_C(f(\mathcal{G}_{g(x)g(y)})) &\subseteq \mathcal{V}_{\lambda\delta'+2C}(f(\mathcal{G}_{g(x)g(z)}) \cup f(\mathcal{G}_{g(y)g(z)})) = \mathcal{V}_{\lambda\delta'+C}(\mathcal{V}_C(f(\mathcal{G}_{g(x)g(z)})) \cup \mathcal{V}_C(f(\mathcal{G}_{g(y)g(z)}))) \\ &= \mathcal{V}_{\lambda\delta'+C}(\mathcal{L}(x, z) \cup \mathcal{L}(z, y)). \end{aligned}$$

On obtient : $\mathcal{L}(x, y) \subseteq \mathcal{V}_{\lambda\delta'+C}(\mathcal{L}(x, z) \cup \mathcal{L}(z, y))$.

On considère maintenant l'hypothèse 3 du théorème. Soient x et y appartenant à X tels que $d_X(x, y) \leq 1$, (ii) implique que pour tout $\alpha \in \mathcal{G}_{g(x)g(y)}$, $\text{long}(\alpha) = d_{X'}(g(x), g(y)) \leq \lambda + C$. Soient u et v deux points quelconques de $\mathcal{G}_{g(x)g(y)}$: il existe deux géodésiques α et β reliant les points $g(x)$ et $g(y)$ telles que u appartienne à α et v à β (α pouvant être égale à β si les

deux points sont sur la même géodésique). La longueur du lacet $\alpha \vee \beta$ étant inférieure ou égale à $2(\lambda + C)$, deux points sur ce lacet sont à une distance inférieure ou égale à $\lambda + C$. C'est en particulier le cas pour u et v , d'où $\text{Diam}(\mathcal{G}_{g(x)g(y)}) \leq \lambda + C$ ce qui implique d'après le (iii) que : $\text{Diam}(f(\mathcal{G}_{g(x)g(y)})) \leq \lambda^2 + \lambda C + C$. On a donc :

$$\text{Diam}(\mathcal{L}(x, y)) = \text{Diam}(f(\mathcal{G}_{g(x)g(y)})) + 2C \leq \lambda^2 + \lambda C + 3C.$$

On pose $h = \max(\lambda\delta' + C, \lambda^2 + \lambda C + 3C)$ et toutes les hypothèses du théorème 6 sont alors vérifiées pour X . Il existe donc δ positif ou nul tel que X soit δ -hyperbolique. \square

Comme je l'ai dit plus haut, dans l'article [Bow13] le critère de Bowditch est énoncé dans le cas où l'espace considéré est un graphe.

Théorème 15 (Critère de Bowditch pour les graphes). *Soit $h \geq 0$ et soit G un graphe connexe tel que pour tout x et y appartenant à l'ensemble des sommets $V(G)$ on associe un sous-graphe connexe par arcs $\mathcal{L}(x, y)$ inclus dans G vérifiant :*

1. $\forall x, y \in V(G), x, y \in \mathcal{L}(x, y)$.
2. $\forall x, y, z \in V(G), \mathcal{L}(x, y) \subseteq \mathcal{V}_h(\mathcal{L}(x, z) \cup \mathcal{L}(z, y))$.
3. $\forall x, y \in V(G)$ tel que $d(x, y) \leq 1$, le diamètre de $\mathcal{L}(x, y)$ dans G est au plus h .

Alors G est δ -hyperbolique avec δ dépendant de h .

Remarque 16. Dans les deux énoncés du critère, les sous-espaces $\mathcal{L}(., .)$ doivent satisfaire les mêmes hypothèses. Cependant, le second nous dit que sur un graphe il suffit de trouver des sous-graphes seulement pour les couples de sommets alors que le premier critère nous dit qu'il faut le faire pour tous les couples de points du graphe. Nous allons déduire le critère de Bowditch pour les graphes du critère 6.

Démonstration. Supposons construits, pour tout couple de sommets, les sous-graphes $\mathcal{L}(x, y)$ vérifiant les hypothèses du théorème 15 avec la constante h' . Il faut montrer que G est δ -hyperbolique. Pour cela nous allons montrer que le graphe dilaté d'un facteur 2 est δ -hyperbolique : pour tout couple de points du graphe dilaté nous allons construire des sous-graphes vérifiant les hypothèses du théorème 6. En effet le graphe dilaté est quasi-isométrique au graphe initial donc on pourra transporter la δ -hyperbolicité du graphe dilaté au graphe de départ grâce au corollaire 14. Pour tout point x de G on note x' et x'' les sommets de l'arête contenant x , avec x' le sommet le plus proche. Si x est déjà un sommet on a alors $x = x' = x''$. Si x est au milieu d'une arête on choisit indifféremment un des deux sommets comme étant x' . On pose alors pour tout x et y appartenant à G , $\mathcal{L}(x, y) = \mathcal{L}(x', y') \cup \mathcal{G}_{x'x''} \cup \mathcal{G}_{y'y''}$ où $\mathcal{G}_{x'x''}$ est la géodésique reliant x' et x'' c'est-à-dire l'arête contenant x . Le point 1 du critère de Bowditch est immédiatement vérifié : x et y appartiennent à $\mathcal{L}(x, y)$ par construction.

Soient x et y appartenant à G tels que $d_2(x, y)$ soit inférieure ou égale à 1. Alors forcément les sommets x' et y' sont confondus ou reliés par une arête (voir figure 10). Ainsi dans le graphe

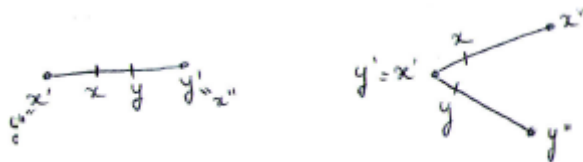


FIGURE 10 –

initial ces sommets sont à une distance inférieure ou égale à un ce qui entraîne par hypothèse que le diamètre de $\mathcal{L}(x', y')$ est majoré par h' . Donc dans le graphe dilaté, le diamètre de $\mathcal{L}(x', y')$ est majoré par $2h'$ d'où $\text{Diam}(\mathcal{L}(x, y)) \leq 2h' + 1$. De ce fait, le point 3 du critère est vérifié pour h supérieur ou égal à $2h' + 1$.

Soient x, y et z trois points du graphe G . On a :

$$\begin{cases} \mathcal{L}(x, y) = \mathcal{L}(x', y') \cup \mathcal{G}_{x'x''} \cup \mathcal{G}_{y'y''} \\ \mathcal{L}(x, z) = \mathcal{L}(x', z') \cup \mathcal{G}_{x'x''} \cup \mathcal{G}_{z'z''} \\ \mathcal{L}(z, y) = \mathcal{L}(z', y') \cup \mathcal{G}_{z'z''} \cup \mathcal{G}_{y'y''} \end{cases} .$$

On conclut que $\mathcal{L}(x, y) \subseteq \mathcal{V}_{h'}(\mathcal{L}(x, z) \cup \mathcal{L}(z, y))$ par hypothèse sur les sous-graphes $\mathcal{L}(., .)$ associés à deux sommets. Ainsi le point 2 du critère de Bowditch est vérifié.

De plus comme les sous-graphes $\mathcal{L}(., .)$ sur les sommets sont connexes par arcs ainsi que les arêtes $\mathcal{G}_{x'x''}$, et que $x' \in \mathcal{G}_{x'x''} \cap \mathcal{L}(x', y')$ et $y' \in \mathcal{G}_{y'y''} \cap \mathcal{L}(x', y')$ on a bien que les sous-graphes $\mathcal{L}(., .)$ sont connexes par arcs.

Les sous-graphes $\mathcal{L}(., .)$ vérifient toutes les hypothèses du théorème 6 ce qui implique que le graphe dilaté est δ -hyperbolique et donc que le graphe initial l'est. Ainsi le critère de Bowditch pour les graphes 15 est prouvé. \square

1.4 Groupes hyperboliques

Les groupes hyperboliques sont intéressants car ils vérifient un principe général : ils agissent sur un graphe hyperbolique. En effet par définition les *groupes hyperboliques* sont les groupes possédant un graphe de Cayley δ -hyperbolique et tout groupe agit sur son graphe de Cayley.

Nous allons dans un premier temps définir le graphe de Cayley associé à un groupe afin de fixer les notations. Soit G un groupe de type fini et \mathcal{S} son système de générateurs supposé symétrique (pour tout élément $s \in \mathcal{S}$ son inverse appartient aussi à \mathcal{S}) et ne possédant pas l'élément neutre. Le graphe de Cayley est un graphe, noté $\mathcal{GC}(G, \mathcal{S})$, dont les sommets sont les éléments du groupe G et une arête relie deux sommets si l'on peut passer de l'un à l'autre par multiplication d'un élément de \mathcal{S} . La distance associée à ce graphe est notée $d_{\mathcal{S}}$. Remarquons que la distance dépend du système de générateurs choisis. Cependant ce n'est pas très important car ici ce qui nous intéresse c'est la δ -hyperbolicité du graphe de Cayley. Or si l'on considère deux systèmes de générateurs \mathcal{S} et \mathcal{S}' d'un groupe G les espaces métriques $(\mathcal{GC}(G, \mathcal{S}), d_{\mathcal{S}})$ et $(\mathcal{GC}(G, \mathcal{S}'), d_{\mathcal{S}'})$ sont quasi-isométriques. En effet, si l'on pose $\lambda = \max_{g \in G} \{d_{\mathcal{S}}(e, g)\}$ et $\lambda' = \max_{g \in G} \{d_{\mathcal{S}'}(e, g)\}$ on a alors pour tout élément g_1 et g_2 du groupe G : $d_{\mathcal{S}}(g_1, g_2) = d_{\mathcal{S}}(g_1 g_2^{-1}, e) \leq \lambda$. On utilise le même raisonnement pour l'autre distance ce qui entraîne :

$$d_{\mathcal{S}} \leq \lambda d_{\mathcal{S}'} \text{ et } d_{\mathcal{S}'} \leq \lambda' d_{\mathcal{S}} .$$

D'après le corollaire 14 si l'un des deux graphes est δ -hyperbolique, il en sera de même de l'autre. Ainsi les groupes hyperboliques sont bien définis.

Exemple 17. Les groupes finis sont les premiers exemples triviaux de groupes hyperboliques. Les groupes libres sont quant à eux les archétypes des groupes hyperboliques.

Le corollaire 14 du critère de Bowditch permet de nous donner le troisième exemple fondamental d'espace δ -hyperbolique : le graphe de Cayley du groupe fondamental d'une surface hyperbolique.

Avant de prouver le résultat nous allons faire quelques rappels. Soit S une surface de genre g supérieur ou égal à deux, son revêtement universel est le demi-plan de Poincaré. D'après le

théorème d'uniformisation de Riemann S est isomorphe à $\mathbb{H}^2/\pi_1(S)$. Le demi-plan de Poincaré est pavé par l'action proprement discontinue du groupe fondamental sur un $4g$ -gone. Rappelons qu'une action d'un groupe G sur un espace X est dite *proprement discontinue* si l'ensemble $\{g \in G \mid gK \cap K \neq \emptyset\}$ est fini pour tout compact K de X . Les géodésiques sur S sont définies localement comme la projection des géodésiques de \mathbb{H}^2 . De même la métrique sur S est induite par celle du demi-plan de Poincaré.

Proposition 18. *Le groupe fondamental d'une surface de genre supérieur ou égal à deux est hyperbolique.*

Démonstration. Nous allons voir d'après [FM12, p.225] que le graphe de Cayley du groupe fondamental d'une surface de genre supérieur ou égal à deux est quasi-isométrique (définition 12) au demi-plan de Poincaré. Comme \mathbb{H}^2 est δ -hyperbolique on en déduira que $\mathcal{GC}(\pi_1(S))$ l'est aussi par le corollaire 14 et donc que le groupe fondamental d'une surface hyperbolique est un groupe hyperbolique.

Soit x_0 appartenant à \mathbb{H}^2 . Notons P le $4g$ -gone pavant \mathbb{H}^2 sous l'action du groupe fondamental de la surface. Notons H l'ensemble des générateurs du groupe fondamental, il possède $2g$ éléments. Remarquons que $H = \{g \in \pi_1(S) \mid g \neq 1 \text{ et } gP \cap P \neq \emptyset\}$. Soit d la métrique sur \mathbb{H}^2 , on définit $\lambda = \max_{h \in H} d(x_0, h \cdot x_0)$ et $r = \min\{d(P, gP) \mid g \notin H \cup \{1\}\}$. La constante r est bien définie car l'action du groupe fondamental sur le demi-plan de Poincaré est proprement discontinue. Nous voulons montrer que l'application $f: \mathcal{GC}(\pi_1(S)) \rightarrow \mathbb{H}^2$ définit une quasi-isométrie.

$$g \longmapsto g \cdot x_0$$

Nous voulons donc montrer que pour tout g_1, g_2 appartenant à $\pi_1(S)$ nous avons

$$\frac{1}{\lambda} d(g_1 \cdot x_0, g_2 \cdot x_0) \leq d_{\mathcal{GC}}(g_1, g_2) \leq \frac{1}{r} d(g_1 \cdot x_0, g_2 \cdot x_0) + 1.$$

Comme $\pi_1(S)$ agit par isométrie sur lui-même et sur \mathbb{H}^2 cela revient à montrer que pour tout g appartenant au groupe fondamental on a : $\frac{1}{\lambda} d(x_0, g \cdot x_0) \leq d_{\mathcal{GC}}(1, g) \leq \frac{1}{r} d(x_0, g \cdot x_0) + 1$ en remplaçant $g_1^{-1}g_2$ par g . Montrons l'inégalité de gauche : $d(x_0, g \cdot x_0) \leq \max_{h \in H} d(x_0, h \cdot x_0) d_{\mathcal{GC}}(1, g)$. Comme H génère $\pi_1(S)$ tout élément g du groupe fondamental s'écrit comme un produit d'éléments de H : $g = h_1 \dots h_k$ avec h_i appartenant à H . On a donc :

$$\begin{aligned} d(x_0, g \cdot x_0) &= d(x_0, h_1 \dots h_k \cdot x_0) \leq d(x_0, h_1 \cdot x_0) + d(h_1 \cdot x_0, h_1 \cdot (h_2 \dots h_k) \cdot x_0) \\ &\leq \max_{h \in H} d(x_0, h \cdot x_0) + d(x_0, h_2 \dots h_k \cdot x_0) \\ &\dots \\ &\leq k \max_{h \in H} d(x_0, h \cdot x_0) = \max_{h \in H} d(x_0, h \cdot x_0) d_{\mathcal{GC}}(1, g). \end{aligned}$$

Montrons maintenant l'inégalité de droite : $d_{\mathcal{GC}}(1, g) \leq \frac{1}{r} d(x_0, g \cdot x_0) + 1$. Comme le demi-plan de Poincaré est un espace métrique géodésique, il existe un segment géodésique reliant x_0 et $g \cdot x_0$ de longueur $d(x_0, g \cdot x_0)$. Soit n le plus petit entier strictement plus grand que la longueur du segment géodésique divisée par r . On a donc : $n - 1 \leq \frac{d(x_0, g \cdot x_0)}{r} < n$ ce qui entraîne que $d(x_0, g \cdot x_0) < nr$. Ainsi, on peut trouver $n - 1$ points sur le segment géodésique $x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = g \cdot x_0$ tels que $d(x_i, x_{i+1}) < r$ pour tout i strictement plus petit que n . Comme \mathbb{H}^2 est recouvert par l'action du $\pi_1(S)$ sur P , pour tout i on peut trouver g_i appartenant au groupe fondamental de S tel que x_i appartienne à $g_i P$. On a évidemment $g_0 = 1$ et $g_n = g$. En posant $h_i = g_{i-1}^{-1}g_i$ on a :

$$d(h_i P, P) = d(g_{i-1}^{-1}g_i P, P) = d(g_i P, g_{i-1} P) \leq d(x_i, x_{i-1}) < r.$$

Ce qui implique que pour tout i , h_i appartient à $H \cup \{1\}$. De plus comme $g = h_1 \dots h_n$, on obtient que g est de longueur inférieure ou égale à n . Ce qui nous permet de conclure que :

$$d_{\mathcal{GC}}(1, g) \leq n \leq \frac{1}{r} d(x_0, g \cdot x_0) + 1.$$

On a donc une quasi-isométrie plongée. De plus en notant D le diamètre du $4g$ -gone, le D -voisinage de $f(\pi_1(S))$ est tout \mathbb{H}^2 ce qui nous permet de conclure que c'est bien une quasi-isométrie. \square

Nous allons maintenant énoncer le théorème de classification des sous-groupes d'un groupe hyperbolique qui nous permettra entre autres de montrer dans la section 2.1 que le groupe modulaire n'est pas un groupe hyperbolique.

Théorème 19 (Classification des sous-groupes d'un groupe hyperbolique). *Soit H un sous-groupe d'un groupe hyperbolique. On a nécessairement l'un des trois cas suivants :*

1. *Le sous-groupe H est fini.*
2. *Le sous-groupe H contient un sous-groupe cyclique infini d'indice fini.*
3. *Le sous-groupe H contient un sous-groupe libre à deux générateurs.*

Démonstration. [GdlH90, p.157] \square

2 Complexe des courbes

Nous allons voir que le groupe modulaire n'est pas un groupe hyperbolique. C'est pour remédier à ce problème que l'on introduit le complexe des courbes. Ainsi on a un graphe hyperbolique sur lequel on peut faire agir notre groupe.

Par la suite, S et S_g désigneront respectivement une surface et une surface de genre g . Sauf mention du contraire les surfaces considérées sont connexes orientées compactes et de genre supérieur ou égal à deux. Un lacet est dit *essentiel* s'il n'est pas homotope à un point ou à une composante de bord. Un lacet est dite *simple* s'il ne possède pas d'auto-intersection. Enfin si la surface obtenue en coupant le long d'un lacet simple est connexe le lacet sera dit *non séparant*. Nous noterons S_α la surface obtenue en coupant S le long du lacet α .

2.1 Groupe modulaire

On note $\text{Homeo}^+(S)$ le groupe des homéomorphismes de S préservant l'orientation. Le *mapping class group* ou *groupe modulaire* associé à la surface S est le groupe des classes d'isotopie des éléments de $\text{Homeo}^+(S)$: $\text{Mod}(S) = \pi_0(\text{Homeo}^+(S))$.

Il existe une famille particulière d'éléments du groupe modulaire. Ce sont les twists de Dehn.



FIGURE 11 – Twist de Dehn le long du lacet α .

Nous verrons dans la section 2.2.1 qu'un nombre fini d'éléments de cette famille engendrent le

groupe modulaire. Un twist de Dehn le long d'une classe de lacets a est la classe d'isotopie de l'homéomorphisme qui coupe la surface le long d'un représentant α de a qui fait une rotation d'un tour du voisinage d'une des composantes de bord et qui recolte (voir figure 11).

Définition 20. Soit a la classe d'isotopie du lacet α et soit N un voisinage régulier de α . Le voisinage N est homéomorphe à $S^1 \times [0, 1]$. Notons T_α l'application qui va de S dans lui-même qui a (θ, t) appartenant à N associe $(\theta + 2\pi t, t)$ et qui est l'identité partout ailleurs. Si deux lacets α et α' sont isotopes il en sera de même des homéomorphismes T_α et $T_{\alpha'}$, on note cette classe d'isotopie T_a où a est la classe d'isotopie de α . On appelle twist de Dehn le long du lacet α l'homéomorphisme T_α et twist de Dehn le long de la classe d'isotopie a la classe d'isotopie T_a .

Proposition 21. *Le groupe modulaire n'est pas un groupe hyperbolique.*

Démonstration. Soit a la classe d'isotopie de α , un des générateurs usuels du groupe fondamental de la surface (voir figure 12). Soit b la classe d'isotopie d'un autre des générateurs classiques qui n'intersecte pas α . Alors le sous-groupe engendré par T_a et T_b est isomorphe à \mathbb{Z}^2 car ils commutent. Cela interdit au groupe modulaire d'être hyperbolique d'après la proposition 19 sur la classification des sous-groupes d'un groupe hyperbolique. \square



FIGURE 12 – Twists de Dehn qui commutent.

Nous allons maintenant énoncer un théorème de classification des éléments du groupe modulaire que l'on peut trouver avec sa preuve par exemple dans [FM12, p.376]. Mais avant cela donnons quelques définitions. Un homéomorphisme ϕ est dit :

- *périodique* s'il est d'ordre fini.
- *réductible* s'il préserve une famille finie de classes de lacets simples et essentiels $\{a_1, \dots, a_n\}$ disjoints deux à deux : $\{\phi(a_i)\}_{i=1, \dots, n} = \{a_i\}_{i=1, \dots, n}$.
- *pseudo-Anosov* s'il existe une paire de laminations transverses mesurés (Γ_+, μ_+) et (Γ_-, μ_-) sur la surface S et une constante λ strictement plus grande que un, telles que :

$$\phi \cdot (\Gamma_-, \mu_-) = (\Gamma_-, \lambda \mu_-) \text{ et } \phi \cdot (\Gamma_+, \mu_+) = (\Gamma_+, \frac{1}{\lambda} \mu_+).$$

Les laminations mesurées (Γ_-, μ_-) et (Γ_+, μ_+) sont respectivement appelés *lamination instable* et *lamination stable*.

Remarque 22. Une lamination mesurée est un ensemble fermé, union disjointe de géodésiques simples, muni d'une mesure transverse. Pour plus de détails voir la section 2.2.2.

Par classification on entend que chaque élément f du groupe modulaire possède un représentant ϕ qui est de l'une des trois formes ci-dessus. Par abus de notation on dira que f est périodique, réductible ou pseudo-Anosov.

Théorème 23 (Classification de Nielsen-Thurston). *Chaque élément du groupe modulaire d'une surface de genre g strictement positif est périodique, réductible ou pseudo-Anosov. De plus les homéomorphismes pseudo-Anosov ne sont ni périodiques ni réductibles.*

2.2 Propriétés du complexe des courbes

Nous allons voir dans cette partie que le 1-squelette du complexe des courbes est un graphe hyperbolique. Au passage nous étudierons quelques-unes de ses propriétés.

Étant données deux classes d'isotopie de lacet a et b on appelle *intersection géométrique* le nombre minimal de points d'intersections entre un représentant α de a et un représentant β de b et on la note $i(a, b)$. On dit alors que les lacets α et β sont en position minimale. Remarquons que deux lacets sont en position minimale s'il n'existe pas un 2-gone plongé dans la surface S tel que ses deux côtés soient respectivement un arc du premier lacet et un arc du second lacet. (voir figure 13). L'intersection géométrique entre deux classes est en particulier réalisée par les



FIGURE 13 – Deux arcs de lacets qui ne sont pas en position minimale.

représentants géodésiques. En effet, supposons que deux géodésiques ne soient pas en position minimale alors il existe un sous-arc de chacune des deux géodésiques telle que l'union des deux forme un 2-gone. Puisque celui-ci est simplement connexe, on peut le relever à \mathbb{H}^2 mais cela contredit le fait qu'une unique géodésique passe par deux points distincts.

A toute surface on peut associer un complexe simplicial : le *complexe des courbes*. Les sommets sont les classes d'isotopie des lacets simples et essentiels. Une collection de $k + 1$ sommets $\{a_i\}_{i \in 0, \dots, k}$ forme un k -simplexe s'il existe une famille de représentants $\{\alpha_i\}_{i \in 0, \dots, k}$ qui sont tous disjoints deux à deux. Ainsi en considérant son 1-squelette, noté $\mathcal{C}(S)$ on obtient un graphe sur lequel le groupe modulaire agit. On associe à ce graphe une distance, notée $d_{\mathcal{C}}$, telle que ce soit la longueur minimale des chemins qui joignent deux points donnés.

Nous allons montrer un lemme qui nous sera très utile pour la suite.

Lemme 24. *Si l'intersection géométrique entre deux sommets de $\mathcal{C}(S)$ est égale à un ou deux alors ces sommets sont à distance deux.*

Démonstration. (D'après [FM12, p.93]) Soient a et b deux sommets de $\mathcal{C}(S)$ tels que leur intersection géométrique soit égale à 1. On considère des représentants α et β en position minimale. Un voisinage fermé régulier de $\alpha \cup \beta$ est un tore avec une seule composante de bord. Le lacet isotope à cette composante de bord est essentiel car on est sur une surface de genre supérieur ou égal à deux et compacte. La classe d'isotopie de ce lacet est notée c . Les sommets a, c, b donne donc un chemin reliant a et b (voir figure 14).

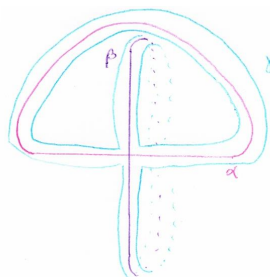


FIGURE 14 – Deux lacets ayant une seule intersection.

Lorsque l'intersection géométrique de a et b vaut deux alors on a deux cas : soit les deux intersections ont le même indice soit elles sont d'indice opposé (voir figure 15). En suivant une

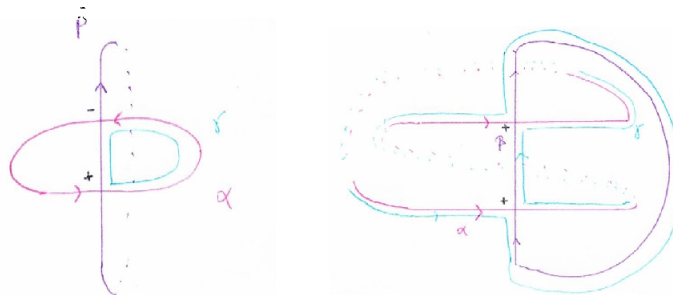


FIGURE 15 – Deux lacets ayant deux intersections.

partie de α puis une partie de β on peut trouver un lacet simple essentiel n'intersectant ni α ni β . La classe d'isotopie de ce lacet nous donne un sommet relié à a et b par une arête. Ces derniers sont à distance deux. \square

On dit qu'une famille de lacets *remplit* la surface S si lorsqu'ils sont en position minimale le complémentaire de la surface est une union finie de disques.

Remarque 25. Deux lacets α et β remplissent la surface si et seulement si leurs classes respectives a et b sont à distance supérieure ou égale à trois dans le complexe des courbes (voir figure 16).

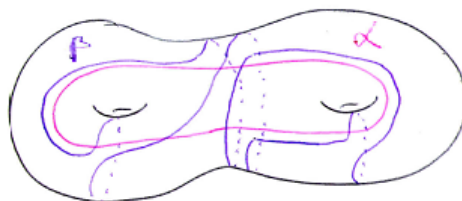


FIGURE 16 – Exemple de deux lacets représentant des sommets à distance trois.

Voici un théorème qui nous permettra de donner un exemple d'homéomorphisme pseudo-Anosov. Pour une preuve de ce résultat voir [FM12, p.392]. On appelle *multitwist* le produit de puissances de twists de Dehn le long de lacets simples disjoints deux à deux. Si A est l'union de lacets simples deux à deux disjoints : $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ on note T_A le multitwist $\prod_{i=1}^n T_{\alpha_i}$.

Théorème 26. Soient A et B des unions de lacets comme ci-dessus tels que $A \cup B$ remplissent la surface. Il existe un nombre réel $\mu = \mu(A, B)$ et une représentation $\rho : \langle T_A, T_B \rangle \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ donnée par :

$$T_A \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -\mu^{1/2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T_B \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mu^{1/2} & 1 \end{pmatrix}.$$

La représentation ρ possède les propriétés suivantes :

1. Un élément $\phi \in \langle T_A, T_B \rangle$ est respectivement périodique, réductible ou pseudo-Anosov selon si $\rho(\phi)$ est respectivement elliptique, parabolique ou hyperbolique.

2. Si $\rho(\phi)$ est parabolique alors ϕ est un multitwist.
3. Si $\rho(\phi)$ est hyperbolique le facteur de dilatation de l'homéomorphisme ϕ pseudo-Anosov est égal à la plus grande des deux valeurs propres de $\rho(\phi)$.

Remarque 27. Lorsque $\mu \geq 4$ le groupe $\langle T_A, T_B \rangle$ est isomorphe au groupe libre de rang deux donc il ne contient pas d'élément périodique.

Remarque 28. Dans le cas particulier où $A = \alpha$ et $B = \beta$, le nombre réel μ est égal à $i(\alpha, \beta)^2$.

De plus, si $i(\alpha, \beta) \leq 2$ on ne peut pas utiliser le théorème car α et β ne remplissent pas la surface. Par définition, il existe alors un lacet γ disjoint de α et de β donc les twists de Dehn selon α et β laissent γ invariant. On obtient donc que tout élément ϕ appartenant au sous-groupe engendré par T_α et T_β est réductible.

Considérons les lacets α et β de la figure 16, ils remplissent la surface donc on peut utiliser le théorème 26. De plus, leur intersection géométrique vaut six donc d'après la remarque ci-dessus, la trace de $\rho(T_\alpha T_\beta) = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -35 & -6 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$ est strictement supérieure à deux en module. Ainsi, l'élément $\rho(T_\alpha T_\beta)$ est hyperbolique donc d'après le point 1 du théorème l'homéomorphisme $T_\alpha T_\beta$ est pseudo-Anosov.

Nous allons à présent définir le 1-squelette du complexe des courbes augmenté, $\mathcal{C}(S)_{aug}$, et montrer qu'il est quasi-isométrique au complexe des courbes ce qui nous servira à prouver la δ -hyperbolicité de $\mathcal{C}(S)$. Le graphe $\mathcal{C}(S)_{aug}$ est le 1-squelette du complexe des courbes auquel on rajoute une arête entre deux sommets lorsque leur nombre d'intersection est un.

Proposition 29. *Les graphes $\mathcal{C}(S)$ et $\mathcal{C}(S)_{aug}$ sont quasi-isométriques.*

Démonstration. Nous allons le montrer en utilisant la définition 12 de quasi-isométrie. Considérons l'inclusion canonique $i : \mathcal{C}(S) \hookrightarrow \mathcal{C}(S)_{aug}$. Si deux lacets ont une intersection géométrique alors d'après le lemme 24, les sommets les représentant sont à distance deux dans le complexe des courbes alors qu'ils sont à distance un dans le complexe des courbes augmenté. Ce qui entraîne que pour tout x et y appartenant à $\mathcal{C}(S)$ on a $\frac{1}{2} d_{\mathcal{C}(S)}(x, y) \leq d_{\mathcal{C}(S)_{aug}}(i(x), i(y))$. De plus comme le complexe des courbes augmenté possède plus d'arêtes que le complexe des courbes, on a : $d_{\mathcal{C}(S)_{aug}}(i(x), i(y)) \leq d_{\mathcal{C}(S)}(x, y)$. De plus tout point y du complexe des courbes augmenté est à une distance inférieure ou égale à un demi d'un sommet donc $\mathcal{V}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{C}(S)) = \mathcal{C}(S)_{aug}$. Ainsi en posant $K = 2$, $L = 0$ et $D = \frac{1}{2}$ l'inclusion canonique est une isométrie ce qui implique que les espaces métriques $\mathcal{C}(S)$ et $\mathcal{C}(S)_{aug}$ sont isométriques. \square

Remarque 30. Si l'on ne modifie pas la définition du complexe des courbes dans le cas du tore, le graphe associé est une union de sommets disjoints. En considérant le graphe augmenté pour le tore on obtient ainsi un graphe connexe, qui est la définition standard du graphe de Farey.

Pour chaque couple de sommets, nous pouvons construire des sous-graphes connexes du 1-squelette du complexe des courbes augmenté. Pour cela fixons une métrique hyperbolique sur S . Soient deux classes d'isotopie de lacets simples a et b . On considère les deux représentants géodésiques respectifs α et β de a et b , ils sont donc en position minimale. On définit $\mathcal{L}(a, b)$ comme étant le sous-graphe dont les sommets sont tous les sommets représentant les lacets simples construits à partir d'un arc de α et d'un arc de β (voir la figure 17), les arcs vides étant admis, et dont les arêtes relient deux sommets lorsque leur distance est 1 dans $\mathcal{C}(S)_{aug}$. Les sommets a et b appartiennent de manière évidente à $\mathcal{L}(a, b)$. Remarquons que si $i(a, b) > 1$ alors il existe d'autres sommets. Il faut vérifier que l'on peut dans ce cas toujours construire un lacet simple à partir d'un α -arc et d'un β -arc, α étant un représentant de a et β de b . En effet, on considère deux intersections consécutives entre α et β le long de β (voir figure 17). Alors les

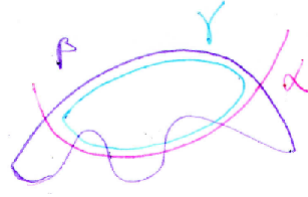


FIGURE 17 – Construction d'un représentant γ d'un élément de $\mathcal{L}(a, b)$.

deux lacets suivant le β -arc entre les deux intersections et respectivement un des deux α -arc ensuite sont forcément simples car sinon cela signifierait que les deux intersections ne sont pas consécutives.

Proposition 31. *Les sous-graphes $\mathcal{L}(a, b)$ sont connexes pour tous les couples de sommets (a, b) du 1-squelette du complexe des courbes.*

Démonstration. Pour cela nous allons montrer que pour tout élément c de $\mathcal{L}(a, b)$ il existe un chemin dans $\mathcal{L}(a, b)$ reliant c et b . Si c n'est pas un sommet, il est alors sur une arête qui le relie à un sommet. On se ramène donc au cas où c est un sommet. Soient α , β et γ les représentants respectifs de a , b et c en position minimale. Nous allons définir un ordre partiel sur les sommets de $\mathcal{L}(a, b)$: $c_1 < c_2$ si le β -arc du représentant γ_1 de c_1 est contenu dans le β -arc du représentant γ_2 de c_2 . Nous voulons trouver une famille de sommets $\{c_i\}$ appartenant à $\mathcal{L}(a, b)$ tels que $c = c_0 < c_1 < \dots < c_n = b$ et $d(c_i, c_{i+1}) = 1$. Si β et γ sont disjoints alors les sommets b et c sont reliés. Sinon on peut prolonger le β -arc de γ jusqu'à ce qu'il coupe le α -arc de γ et ensuite suivre γ pour créer le lacet γ_1 dont la classe d'isotopie est notée c_1 (voir figure 18). Les lacets γ_1

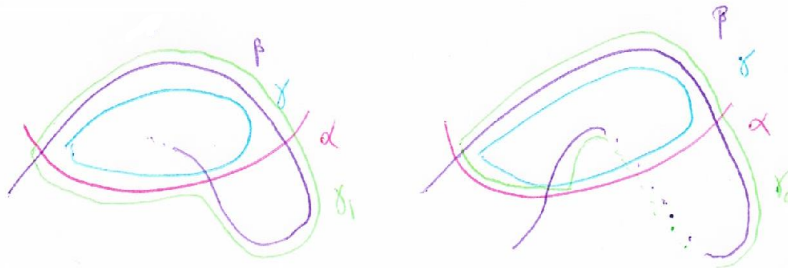


FIGURE 18 – Construction de γ_1 .

et γ on a au plus une intersection, ainsi on obtient un sommet c_1 de $\mathcal{L}(a, b)$ à une distance un de c . En répétant ceci on obtient un chemin de c à b inclus dans $\mathcal{L}(a, b)$. Ainsi on a montré que les sous-graphes construits sont connexes. \square

Remarque 32. Cela implique que le complexe des courbes augmenté est connexe.

2.2.1 Connexité du complexe des courbes

Dans cette partie nous allons déduire la connexité du complexe des courbes de ce que nous avons fait précédemment. En effet, nous allons utiliser que le complexe des courbes augmenté est

connexe par arcs. Ce n'est pas la manière classique de le montrer. Une preuve plus standard se trouve par exemple dans [FM12, p.92].

Proposition 33 (Connexité du complexe des courbes). *Le complexe des courbes associé à une surface est connexe.*

Démonstration. Il suffit de montrer que le 1-squelette du complexe des courbes est connexe. Pour cela, nous allons montrer que pour tout couple de sommets du complexe des courbes on peut trouver un chemin les reliant.

Nous avons montré lors de la proposition 31 que pour tout couple de sommets (a, b) du complexe des courbes nous pouvions construire des sous-graphes du complexe des courbes augmenté $\mathcal{L}(a, b)$ connexes contenant a et b . En particulier, pour tout couple de sommets (a, b) il existe une famille finie de sommets $\{c_i\}_{i=0\dots n}$ avec $c_0 = a$ et $c_n = b$ telle que $d_{\mathcal{C}(S)_{aug}}(c_i, c_{i+1}) = 1$. Mais être à distance un dans le complexe des courbes augmenté ne signifie pas être à distance un dans le complexe des courbes mais à distance inférieure ou égale à deux d'après le lemme 24. Si $d_{\mathcal{C}(S)}(c_i, c_{i+1}) = 1$ on pose alors $d_i = c_i$. Sinon $d_{\mathcal{C}(S)}(c_i, c_{i+1}) = 2$ donc il existe un sommet d_i tel que $d_{\mathcal{C}(S)}(d_i, c_i) = 1$ et $d_{\mathcal{C}(S)}(d_i, c_{i+1}) = 1$. En considérant la suite de sommets $\{a, d_0, c_1, d_1, \dots, d_{n-1}, b\}$ on a trouvé un chemin dans le complexe des courbes reliant les sommets a et b . \square

Proposition 34 (Dehn-Lickorish). *Le mapping class group est engendré par un nombre fini de twists de Dehn le long de lacets simples non-séparant.*

Démonstration. Voir la preuve de [FM12, p.105] (utilise la connexité du complexe des courbes proposition 33 et la suite exacte de Birman) \square

En 1979 Humphries prouve qu'en fait il suffit $2g + 1$ twists de Dehn pour générer le groupe modulaire (figure 19). Il a prouvé ensuite que c'était le nombre minimal.

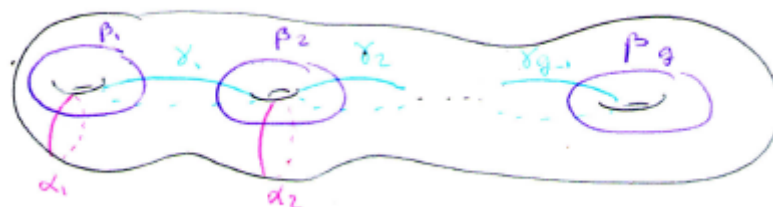


FIGURE 19 – Générateurs de Humphries.

2.2.2 Diamètre infini du complexe des courbes

Pour que la partie suivante sur l'hyperbolicité du complexe des courbes ait un intérêt il faut avant tout montrer que le complexe des courbes est de diamètre infini. En effet tout espace fini est de manière évidente δ -hyperbolique en prenant δ égal au diamètre. C'est ce que nous allons faire ici en montrant que le 1-squelette du complexe des courbes est de diamètre infini.

Pour cela nous allons introduire quelques notions concernant les laminations géodésiques vues dans [CB88] et [Cal07]. Une courbe d'une surface S est une *géodésique* si c'est l'image d'une géodésique complète du revêtement universel de $S : \mathbb{H}^2$. Une *lamination* sur S est un sous-ensemble fermé non vide L de S formé d'une union disjointe de géodésiques simples, ces géodésiques étant

appelées les *feuilles* de la lamination. Par la suite géodésique désignera géodésique simple. Par exemple, un nombre fini de lacets disjoints est une lamination. Cela reste le cas si l'on rajoute une feuille qui spirale autour de certains des lacets disjoints (voir figure 20 prise dans l'article [Bon01]). Mais ce ne sont pas les exemples les plus intéressants de laminations. En effet, ce sont

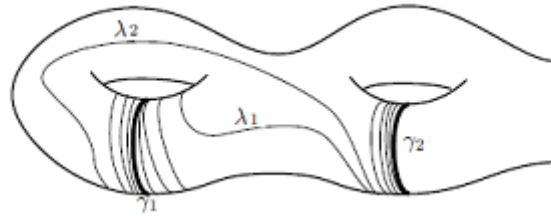


FIGURE 20 – Feuilles qui spiralent autour de feuilles fermées.

plutôt les limites, dans un sens que nous préciserons plus tard, de longues géodésiques fermées dont l'ensemble des points d'intersections avec une courbe transverse est un ensemble de Cantor (voir figure 21 prise dans l'article [Bon01]). Une lamination géodésique L est *minimale* si chaque



FIGURE 21 – Lamination.

feuille est dense dans L . Par exemple, une géodésique fermée est une lamination minimale.

Remarque 35. L'inclusion est une relation d'ordre partiel sur l'ensemble des laminations. Les laminations minimales correspondent aux éléments minimaux de cette relation d'ordre. De plus, toute lamination contient une sous-lamination minimale. On remarque aussi que deux sous-laminations minimales sont soit égales soit elles n'ont aucune feuille en commun.

On munit l'ensemble des laminations d'une surface, noté $\Lambda(S)$, de la topologie associée à la distance de Hausdorff. Rappelons que la distance de Hausdorff d_H est définie par : soit K_1 et K_2 deux compacts d'un espace métrique X , $d_H(K_1, K_2) \leq \epsilon$ si et seulement si $K_1 \subseteq \mathcal{V}_\epsilon(K_2)$ et $K_2 \subseteq \mathcal{V}_\epsilon(K_1)$.

Théorème 36. *Toute lamination L d'une surface S est une union disjointe de laminations minimales avec un ensemble fini de géodésiques dont les bouts spiralent autour d'une lamination minimale ou vont vers un point singulier.*

Démonstration. [CEM06, p.83] □

Une lamination géodésique L est *pleine* si ses régions complémentaires sont isométriques à des polygones idéaux de \mathbb{H}^2 ayant un nombre fini de côtés.

Proposition 37. *Une lamination L est pleine si et seulement si toute géodésique fermée non contenue dans L coupe la lamination transversalement.*

Démonstration. Par définition, le complémentaire de la lamination L dans la surface est une union d'ouverts isométriques à des polygones idéaux de \mathbb{H}^2 . Soit γ une géodésique fermée qui n'est pas incluse dans la lamination L . Raisonnons par l'absurde et supposons que γ ne coupe pas L transversalement. Elle est donc incluse dans une des composantes connexes complémentaires. Or un polygone est contractile. Cela contredit que la classe de γ est non triviale. Donc toute géodésique fermée non contenue dans L coupe la lamination transversalement.

Montrons la réciproque. Supposons que la lamination L ne soit pas pleine. Cela signifie qu'il existe une des composantes complémentaires de L qui n'est pas un polygone. En considérant une géodésique homotope au voisinage du bord de cette composante on a un lacet essentiel qui n'a pas de point d'intersection avec la lamination L . \square

Remarque 38. Soit L une lamination pleine. On déduit de la proposition ci-dessus que toute lamination contenant une géodésique fermée coupe transversalement la lamination L .

Proposition 39. *Soient L et L' deux laminations de S avec L minimale et pleine. Si elles ne possèdent pas de point d'intersection transverse alors L est l'unique sous-lamination minimale de L' .*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde et supposons que L ne soit pas une sous-lamination de L' . Tout point x de L' est alors dans un polygone complémentaire de L isométrique à un polygone idéal de \mathbb{H}^2 . Soit m la feuille sur laquelle se trouve x . On note \tilde{m} son relevé dans \mathbb{H}^2 le disque de Poincaré. Par la définition des feuilles d'une lamination, \tilde{m} est une géodésique complète, donc elle admet deux points sur le bord du disque : x_1 et x_2 . Ces points doivent être des sommets du polygone car sinon L' et L auraient un point d'intersection transverse. De plus x_1 et x_2 ne peuvent pas être les deux bouts d'un même côté du polygone car sinon \tilde{m} serait inclus dans la lamination. On ajoute aussi que m ne peut pas être une géodésique fermée d'après la remarque 38, par conséquent elle ne peut pas être l'unique feuille de la lamination L' . Elle doit donc posséder d'autres feuilles. Or comme le polygone a un nombre fini de sommets il ne peut y avoir qu'un nombre fini de feuilles de L' dans chaque polygone. D'après le théorème de classification 36, L' contient une sous-lamination minimale L'_1 et toujours d'après la remarque ci-dessus L'_1 ne contient aucune feuille fermée donc elle contient une infinité de feuilles denses. Ce qui est impossible car dans chaque polygone il n'y a qu'un nombre fini de feuilles. On conclut donc que L' contient la lamination L . De plus d'après la remarque 35 toute autre sous-lamination minimale de L' ne possède aucune feuille en commun avec L en utilisant le même argument que pour L_1 , L est l'unique sous-lamination minimale de L' . \square

Lemme 40. *Soit S une surface fermée de genre g . Alors S admet au plus $3g - 3$ laminations géodésiques disjointes avec égalité seulement si toutes les laminations sont des géodésiques fermées.*

Lemme 41. *L'ensemble des laminations $\Lambda(S)$ muni de la topologie de Hausdorff est compact.*

La proposition suivante sera utile pour démontrer la dimension infinie du complexe des courbes.

Proposition 42. *Soit ϕ un représentant d'un élément du groupe modulaire pseudo-Anosov alors il existe une géodésique fermée γ telle qu'une sous-suite de $\{\phi^i(\gamma)\}_{i \in \mathbb{N}}$ converge vers une lamination géodésique Γ' contenant une sous-lamination minimale et pleine Γ . De plus $\phi(\Gamma) = \Gamma$.*

Démonstration. D'après [Cal07].

Soit ϕ un homéomorphisme pseudo-Anosov de la surface S . Comme ϕ est pseudo-Anosov d'après le théorème de classification de Nielsen-Thurston 23 il n'est pas d'ordre fini donc il existe une géodésique fermée γ telle que les itérées $\gamma_i := \phi^i(\gamma)$ ne forment pas une suite périodique. En effet, supposons qu'il n'existe pas un tel lacet γ et considérons deux lacets α et β qui remplissent la surface. Il existe alors une puissance de ϕ qui fixe à la fois le lacet α et le lacet β et donc qui fixe aussi chaque région complémentaire ce qui entraîne que ϕ est homotope à l'identité, ce qui est impossible par hypothèse.

Donc la famille $\{\gamma_i\}$ n'est pas périodique. De plus, toujours d'après le théorème de classification de Nielsen-Thurston ϕ n'est pas non plus réductible donc il ne permute pas une famille finie de géodésiques fermées.

Remarquons aussi que pour toute constante T fixée, il n'y a qu'un nombre fini de géodésiques fermées de S de longueur inférieure ou égale à T . Ainsi, quitte à prendre une sous-suite, la longueur des lacets γ_i augmente sans borne. De plus, pour chaque entier naturel n fixé, comme l'homéomorphisme ϕ conserve les points d'intersections on a :

$$\#\{\gamma_i \cap \gamma_{i+n}\} = C_n < \infty \quad (1)$$

où C_n est indépendant de i .

Comme $\Lambda(S)$ est compact on peut extraire une sous-suite γ_{n_i} convergeant pour la topologie de Hausdorff vers une lamination Γ' . Soit Γ une sous-lamination minimale de Γ' . Montrons par l'absurde que Γ ne peut pas être une géodésique fermée. On suppose donc que c'est le cas. Comme $\Gamma \subseteq \Gamma'$ et que les γ_{n_i} convergent vers Γ' avec une longueur tendant vers l'infini cela entraîne qu'à partir d'un certain rang les lacets contiennent des segments arbitrairement longs qui spiralent autour d'un voisinage régulier de Γ . Si il existe un entier naturel n_0 tel que Γ intersecte $\phi^{n_0}(\Gamma)$ alors comme ϕ conserve l'ensemble des points d'intersections, pour k assez grand le cardinal des points d'intersections entre les lacets γ_{n_k} et $\gamma_{n_k+n_0}$ est arbitrairement grand ce qui contredit (1). Donc pour tout entier naturel n , Γ et $\phi^n(\Gamma)$ n'ont pas de points d'intersections. Ce qui entraîne par le lemme 40 qu'il existe i et j , $0 < i < j \leq 3g - 3$, tels que $\phi^i(\Gamma) = \phi^j(\Gamma)$ donc on a pour $k = |j - i|$ $\phi^k(\Gamma) = \Gamma$. Ce qui entraîne que ϕ préserve une famille finie de lacets : $\{\Gamma, \phi(\Gamma), \dots, \phi^{k-1}(\Gamma)\}$. Ce qui est impossible par hypothèse. Donc Γ n'est pas une géodésique fermée.

Comme Γ est une lamination minimale et que ce n'est pas une géodésique fermée cela entraîne qu'aucune feuille n'est isolée donc l'ensemble des points d'intersections entre Γ et $\phi(\Gamma)$ est soit vide soit indénombrable. Si le nombre de points d'intersection n'est pas nul alors comme Γ est inclus dans la limite des γ_{n_i} et que le nombre de points d'intersection est stable sous ϕ , le cardinal de $\gamma_{n_i} \cap \gamma_{n_i+1}$ tend vers l'infini quand i tend vers l'infini ce qui contredit 1. On conclut que Γ n'intersecte pas $\phi(\Gamma)$. Par un même argument on montre que ça reste le cas pour Γ et $\phi^n(\Gamma)$ pour tout entier n . Par le lemme 40 il existe i et j tels que $\phi^i(\Gamma) = \phi^j(\Gamma)$ donc on a pour $k = |j - i|$ $\phi^k(\Gamma) = \Gamma$. Si Γ n'est pas pleine, il existe un lacet homotope au bord du voisinage de Γ qui est essentiel dans S . L'image de ce lacet par ϕ est donc périodique puisque $\phi^k(\Gamma) = \Gamma$. De plus ce lacet est disjoint de ses translatés par ϕ car Γ et $\phi(\Gamma)$ n'ont pas de points d'intersection. Or ceci est impossible car ϕ est pseudo-Anosov : il ne préserve pas une famille finie de lacets. On conclut que Γ doit être pleine.

On a une lamination Γ pleine et minimale qui n'a pas de points d'intersection avec $\phi(\Gamma)$ donc d'après la proposition 39, Γ est incluse dans $\phi(\Gamma)$. Mais comme ϕ est un homéomorphisme il préserve les polygones complémentaires donc $\phi(\Gamma)$ est une lamination minimale d'où $\phi(\Gamma) = \Gamma$. \square

Remarque 43. En appliquant la proposition précédente à ϕ^{-1} à la place de ϕ on remarque que ϕ préserve deux laminations minimales et pleines que l'on notera Γ_+ et Γ_- qui sont les laminations stables et instables de ϕ .

Nous allons maintenant introduire la notion de lamination mesurée qui nous sera utile lors de la preuve du diamètre infini du complexe des courbes. Pour plus de détails voir [Bon01], [MSS06, p.77] et [FLP12]. Une lamination mesurée L sur S est une lamination géodésique appelée le support de L et encore notée L muni d'une mesure transverse μ_L .

Remarque 44. Le support d'une lamination peut admettre plusieurs mesures transverses. Un exemple d'une telle lamination est donnée dans [Cal07, p.29]. Lorsque une lamination admet une unique mesure transverse à constante multiplicative près on dit que la lamination est *uniquement ergodique*. Par exemple, les laminations stables et instables associées à un homéomorphisme pseudo-Anosov sont uniquement ergodiques (voir [FLP12, p.191]).

L'ensemble des laminations mesurées noté \mathcal{ML} est muni de la topologie de convergence faible des mesures c'est-à-dire deux laminations seront proches si la mesure associée à n'importe quel ensemble fini d'arcs transverses est proche.

Remarque 45. La convergence au sens des laminations n'entraîne pas la convergence de Hausdorff.

La convergence de Hausdorff entraîne la convergence au sens des laminations mesurées si la lamination limite est uniquement ergodique.

On note \mathcal{PML} l'espace des classes projectives de \mathcal{ML} . Toute classe de lacets simples est une lamination mesurée muni de la mesure de Dirac. On appelle multicourbe une lamination mesurée dont le support est une géodésique fermée γ et dont la mesure est $t\delta_\gamma$ où $t \in \mathbb{R}_+$ et δ est la mesure de Dirac on la note (t, γ) . On peut étendre par bilinéarité l'intersection géométrique aux multicourbes : pour tout $t, s \in \mathbb{R}_+$ et pour toutes géodésiques fermées α et β on a : $i(t\alpha, s\beta) = ts i(\alpha, \beta)$. Soit $\gamma = (t, \alpha)$ une multicourbe et soit L une lamination mesurée on définit l'intersection géométrique comme : $i(\gamma, L) = t \int d\mu_L$. De plus on a dans [Bon01, p.19] un théorème dû à Thurston qui dit que l'espace des multicourbes est dense dans \mathcal{ML} . On peut donc étendre par continuité l'intersection géométrique à $\mathcal{ML} \times \mathcal{ML}$.

Nous allons maintenant donner l'analogue de la proposition 37 dans le cadre des laminations mesurées.

Proposition 46. *Une lamination mesurée L minimale et pleine est maximale.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe une lamination L' contenant L telle que l'inclusion soit stricte. Cela signifie que l'on peut rajouter une feuille isolée l à la lamination L (l'image d'une des géodésiques reliant deux sommets non consécutifs du polygone complémentaire de L'). Mais une feuille isolée ne peut pas être dans le support d'une lamination mesurée. En effet si c'est le cas elle spirale sur une autre feuille m de la lamination, donc un arc transverse à m va intersecter un nombre de fois infini. Or comme l est une feuille isolée elle possède une mesure atomique. Donc la mesure ne sera pas définie. On a ainsi montré que l'on ne peut pas rajouter de feuilles et donc que les deux laminations mesurées sont égales. \square

Corollaire 47. *Si une lamination mesurée L de S est minimale et pleine alors toute lamination mesurée L' de S vérifie l'une des deux conditions :*

- $i(L', L) > 0$
- $L = L'$.

Démonstration. Soit L' une lamination telle que $i(L', L) = 0$. Nous avons montré lors de la proposition 39 que l'on a alors une inclusion des supports : $L \subseteq L'$. Mais d'après la proposition ci-dessus, elle est maximale donc on a le résultat. \square

Lemme 48. *L'espace \mathcal{PML} est compact. De plus si la projection d'une suite de géodésiques fermées converge dans \mathcal{PML} alors en renormalisant la suite (en divisant par la longueur) celle-ci converge dans \mathcal{ML} .*

Proposition 49. *Le diamètre du complexe des courbes est infini.*

Démonstration. Nous allons en fait montrer d'après un argument dû à Luo dans [MM99] que le 1-squelette du complexe des courbes est de diamètre infini. Raisonnons par l'absurde et supposons que le 1-squelette du complexe des courbes soit de diamètre fini. Soit ϕ un élément du groupe modulaire pseudo-Anosov. D'après la proposition 42, quitte à prendre une sous-suite, il existe une géodésique fermée γ telle que la suite des $\gamma_n := \phi^n(\gamma)$ converge vers une lamination Γ' contenant une sous-lamination Γ minimale et pleine. Or, d'après les remarques 44 et 45, la suite $\gamma_n := \phi^n(\gamma)$ converge au sens des laminations mesurées. Mais nous avons montré qu'une lamination mesurée minimale et pleine est maximale (proposition 46) donc en fait $\Gamma = \Gamma'$. On note respectivement c et c_n les classes des lacets γ et γ_n . Comme on a supposé que le complexe des courbes est de diamètre fini, la distance $d_{\mathcal{C}(S)}(c, c_n)$ est bornée pour tout entier n . Quitte une fois de plus à se restreindre à une sous-suite on peut supposer qu'il existe un entier naturel N tel que $d_{\mathcal{C}(S)}(c, c_n) = N$ pour tout n . Pour tout n , il existe donc a_n tel que $d_{\mathcal{C}(S)}(c, a_n) = N - 1$ et $d_{\mathcal{C}(S)}(a_n, c_n) = 1$. En considérant le représentant géodésique α_n de la classe a_n on a donc une suite de géodésiques fermées. Mais comme l'espace projectif des laminations mesurées est compact, il existe une sous-suite qui converge dans l'espace projectif. En utilisant le lemme 48 il existe une sous-suite $\{\frac{1}{l_{n_k}}\alpha_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$, où l_{n_k} est la longueur du lacet a_{n_k} , qui converge vers une lamination A . Or pour tout k , $i(\alpha_{n_k}, \gamma_{n_k}) = 0$ donc $i(\frac{1}{l_{n_k}}\alpha_{n_k}, \gamma_{n_k}) = 0$ et en passant à la limite on obtient que $i(A, \Gamma) = 0$. Mais Γ est une lamination mesurée minimale et pleine donc d'après le corollaire 47 on a $\Gamma = A$; ce qui entraîne que la suite $\{\frac{1}{l_{n_k}}\alpha_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers la lamination minimale et pleine Γ . On réitère ce procédé jusqu'à obtenir une suite de géodésiques fermées $\{\frac{1}{l_{n_k}}\beta_n\}$ qui converge vers la lamination minimale et pleine Γ telle que $d_{\mathcal{C}(S)}(c, b_n) = 1$, où b_n est la classe de β_n . Ainsi, pour tout n , β_n et γ sont disjoints donc en passant à la limite dans l'intersection géométrique il en est de même des deux laminations minimales Γ et γ . Or d'après la proposition 37 c'est impossible car Γ est pleine. \square

2.2.3 Hyperbolicité du complexe des courbes

Nous allons montrer le théorème principal de cette partie.

Théorème 50. *Le complexe des courbes associé à S est δ -hyperbolique.*

Ce résultat est en fait valable pour les surfaces non compactes provenant de surfaces compactes auxquelles on a retiré un nombre fini de points. La première démonstration est due à Masur et Minsky [MM99]. Bowditch en a publié une preuve différente dans [Bow06] où il donne une estimation de la constante δ dépendant de manière logarithmique du genre et du nombre de points enlevés. Dans un article plus récent [Bow13] il donne une autre version de la preuve et en exhibe une constante indépendante de la surface mais qui n'est pas optimale. Hensel, Przytycki et Webb ont quant à eux montré en 2013 [HPW13] que le 1-squelette du complexe des courbes est 17-hyperbolique pour toute surface compacte.

Ici, nous donnons une preuve simplifiée due à [Sis13] qui ne permet pas d'obtenir la constante δ mais qui a l'avantage d'être plus visuelle. Remarquons aussi que si la surface n'est pas compacte cette preuve ne fonctionne pas, on pourrait construire des lacets homotopes au bord d'un voisinage d'un point enlevé.

Démonstration. Nous allons en fait montrer que le 1-squelette du complexe des courbes est δ -hyperbolique car celui-ci est quasi-isométrique au complexe des courbes. En effet, d'après le lemme 40 la dimension des simplexes du complexe des courbes est supérieure ou égale à $3g - 4$. D'après le corollaire 14 et la proposition 29, montrer l'hyperbolicité du complexe des courbes

revient à montrer celle du complexe des courbes augmenté. Nous allons utiliser le critère de Bowditch pour les graphes avec $h = 2, 5$ afin de montrer que le graphe $\mathcal{C}(S)_{aug}$ est δ -hyperbolique.

Il suffit de construire pour chaque paire de sommets (a, b) des sous-graphes $\mathcal{L}(a, b)$ de $\mathcal{C}(S)_{aug}$ connexes par arcs et vérifiant les conditions du critère de Bowditch pour les graphes 15. On fixe une métrique hyperbolique sur S . Nous allons considérer les sous-graphes définis dans la section 2.2 page 19. Par définition les sommets a et b appartiennent à $\mathcal{L}(a, b)$ donc le point 1 du critère est clairement vérifié. De plus d'après la proposition 31 ces sous-graphes sont connexes par arcs.

Montrons maintenant que les sous-graphes $\mathcal{L}(a, b)$ vérifient le point 3 pour tous les sommets a et b . En effet, considérons a et b appartenant aux sommets de $\mathcal{C}(S)_{aug}$ tels que leur distance soit inférieure ou égale à un. Nous avons deux cas : leur intersection est nulle ou elle est égale à un. Si leur intersection est nulle alors $V(\mathcal{L}(a, b)) = \{a, b\}$ donc le diamètre de $\mathcal{L}(a, b)$ est égal à un. S'il y a une intersection alors $V(\mathcal{L}(a, b)) = \{a, b, T_b(a)\}$ et le diamètre de $\mathcal{L}(a, b)$ est égal à 2 (voir figure 22). Dans tous les cas, pour tout couple (a, b) de sommets de $\mathcal{C}(S)_{aug}$ à distance un,

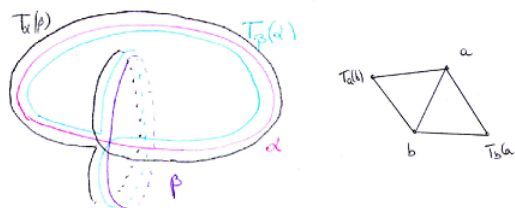


FIGURE 22 – Construction de $\mathcal{L}(a, b)$ pour $i(a, b) = 1$.

le diamètre de $\mathcal{L}(a, b)$ est inférieur ou égal à 2.

On s'intéresse maintenant au point 2 du critère de Bowditch. Soient a, b et c trois sommets quelconques du 1-squelette du complexe des courbes et soient α, β et γ leur représentant géodésique respectif, ils sont donc en position minimale. Soit d appartenant à $\mathcal{L}(a, b)$.

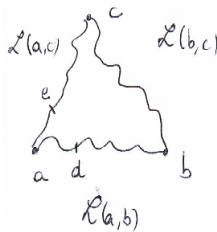


FIGURE 23 –

On cherche alors un point e appartenant à $\mathcal{L}(a, c) \cup \mathcal{L}(c, b)$ (voir la figure 23) tel que la distance entre d et e soit majorée par $h = 2, 5$ indépendamment des sommets choisis. Deux cas se présentent : le cas où d est un sommet et celui où il appartient à une arête.

Supposons que d soit un sommet. Si le nombre d'intersections $i(d, c)$ est inférieur ou égal à deux alors par le lemme 24 ils sont à une distance inférieure ou égale à deux et on peut donc prendre e égal à c . Sinon il y a au moins trois intersections P_1, P_2 et P_3 entre les représentants δ de d et γ de c qui sont consécutives le long de γ . On va construire un lacet ϵ constitué d'un morceau du γ -arc et d'un morceau du α -arc ou du β -arc de δ . Ce qui nous importe sera donc l'intersection entre les lacets γ et δ ainsi le fait que le lacet ϵ construit soit simple ne dépendra que des lacets γ et δ et non du fait que α et β coupent δ , par conséquent les dessins représentant

les différents cas ne se préoccupent pas de α et β (ils sont juste tracés pour distinguer les deux arcs de δ). On a deux possibilités :

- Si deux intersections consécutives sont sur le même arc de δ par exemple sur le α -arc de δ , on pose e comme étant la classe d'isotopie du lacet constitué du sous-arc de γ allant de P_1 à P_2 et du sous-arc α de δ allant de P_2 à P_1 (voir figure 24). Il n'y a que ces deux

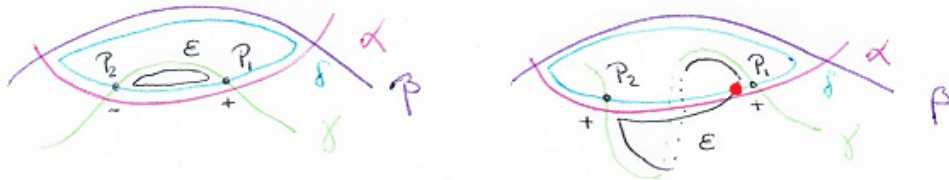


FIGURE 24 – Construction de ϵ .

possibilités : les deux points P_1 et P_2 possèdent soit le même indice soit un indice opposé. On obtient bien un lacet simple et essentiel car sinon les lacets γ et δ ne seraient pas en position minimale étant donné que les points P_1 et P_2 sont des intersections consécutives. Le nombre d'intersections entre d et e est donc nul ou égal à un, ils sont par conséquent à distance inférieure ou égale à un. De plus e appartient au sous-graphe $\mathcal{L}(a, c)$.

- Si ce n'est pas le cas, on a alors les points d'intersection qui se trouvent alternativement sur un arc puis sur l'autre par exemple P_1 et P_3 sont sur le α -arc de δ et P_2 est sur le β -arc de δ . On prend pour e la classe d'isotopie du lacet qui suit le sous-arc de γ entre P_1 et P_3 et qui suit le α -arc de δ entre P_3 et P_1 (voir figure 25). On peut se ramener à étudier

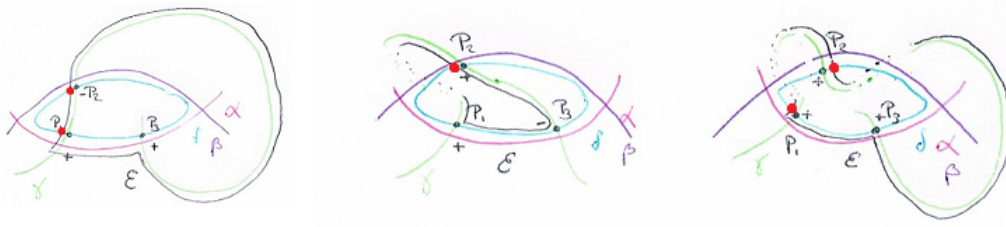


FIGURE 25 – Construction de ϵ .

seulement trois cas car les points P_1 et P_3 jouent des rôles symétriques. Soit les trois points ont le même indice d'intersection, soit deux points ont le même indice d'intersection et le troisième est opposé. Dans ce dernier cas il y a en fait deux configurations celle où P_1 et P_2 ont le même indice et le cas où ce sont P_1 et P_3 qui ont le même indice. Toutes les autres configurations se ramènent à ces configurations là en changeant l'orientation du lacet γ (ce qui revient à changer les indices) et en échangeant les orientations des lacets γ et δ (ce qui revient à échanger les points P_1 et P_3). Le nombre d'intersections entre d et e vaut un ou deux et e appartient à $\mathcal{L}(a, c)$. Dans les deux cas on a trouvé un élément e appartenant aux sommets de $\mathcal{L}(a, c) \cup \mathcal{L}(c, b)$ tel que le nombre d'intersections entre e et d soit inférieur ou égal à deux ce qui entraîne d'après le lemme 24 que leur distance est inférieure ou égale à deux.

Si maintenant d n'est pas un sommet on considère le sommet le plus proche de d , d' . Remarquons que si d est sur le milieu d'une arête on choisit pour d' indifféremment l'un des deux sommets. On fait l'étape précédente en remplaçant d par d' et on trouve un sommet e appartenant à $\mathcal{L}(a, c) \cup \mathcal{L}(c, b)$ tel que la distance entre d et e soit inférieure ou égale à 2, 5.

On a montré d'après le critère de Bowditch pour les graphes 15 avec h égal à 2, 5 que $\mathcal{C}(S)_{aug}$ est δ -hyperbolique. □

2.2.4 Graphe non localement fini

Nous allons montrer que le graphe est non localement fini. Ainsi on a perdu de l'information (de la compacité) en utilisant le complexe des courbes à la place du graphe de Cayley. En effet pour chaque sommet du graphe de Cayley on n'a qu'un nombre fini d'arêtes incidentes (le nombre de générateurs). Pour montrer cela nous allons exhiber une famille de sommets constituant les sommets du domaine fondamental de l'action du groupe modulaire sur le 1-squelette du complexe des courbes. Puis nous allons montrer que ces sommets sont d'incidence infinie en trouvant pour chaque sommet de cette famille, un représentant qui n'intersecte pas un nombre infini de lacets non isotopes. Nous allons utiliser le théorème de classification des surfaces compactes, connexes à bord vu dans [Mas77, p.60].

Théorème 51. *Deux surfaces connexes, compactes et à bord sont homéomorphes si et seulement si elles ont le même nombre de composantes de bord, si elles sont toutes les deux orientables ou non et si elles ont la même caractéristique d'Euler.*

Lemme 52. *Soit S une surface de genre g supérieur ou égal à deux. A homéomorphisme près il n'existe qu'une seule classe de lacets non séparants et $\lfloor \frac{g}{2} \rfloor$ classes de lacets séparants.*

Démonstration. Toute surface coupée le long d'un lacet conserve la même caractéristique d'Euler car dans la décomposition en surface, arête, sommet on ajoute un lacet et une arête. Elle possède aussi le même nombre de composantes de bord et conserve le fait d'être orientable. Donc si le lacet est non séparant, la surface coupée sera connexe et par le théorème de classification 51 on en déduit que toutes les surfaces coupées le long d'un lacet non séparant sont homéomorphes. Si maintenant le lacet est séparant alors on obtient une surface qui est union de deux surfaces connexes, on va appliquer le théorème de classification aux deux surfaces connexes obtenues. Quelque soit le lacet, les deux surfaces auront chacune un bord et seront orientées. C'est donc la caractéristique d'Euler des deux sous-surfaces qui caractérise les classes d'homéomorphismes. Une surface de genre g peut être décomposée en deux sous-surfaces de genre $(1, g-1)$, $(2, g-2)$, \dots , $(\lfloor \frac{g}{2} \rfloor, \lfloor \frac{g}{2} \rfloor + 1)$, (voir figure 26) on obtient ainsi $\lfloor \frac{g}{2} \rfloor$ classes de lacets à homéomorphismes près.



FIGURE 26 – Les différentes classes de lacets séparant pour les surfaces de genre 3 et 4.

De plus si les deux surfaces S_α et S_β sont homéomorphes, l'homéomorphisme préserve le bord et envoie par conséquent le lacet α sur le lacet β . □

Proposition 53. *Le 1-squelette du complexe des courbes n'est pas localement fini.*

Démonstration. Considérons les lacets $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{\lfloor \frac{g}{2} \rfloor}$ comme sur la figure 27. D'après le lemme

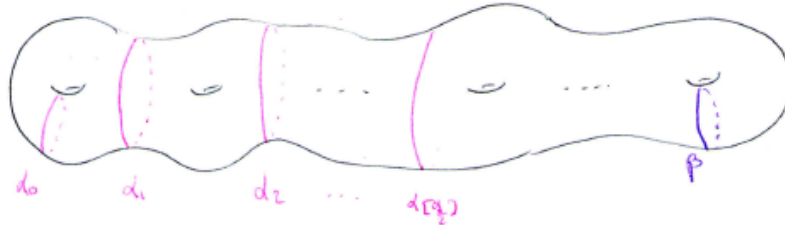


FIGURE 27 – Lacets représentant les sommets du domaine fondamental.

52 tout sommet du complexe des courbes est envoyé par un élément du groupe modulaire sur un des sommets qui a pour représentant un des lacets ci-dessus. Soit a_i la classe d'isotopie du lacet α_i pour $i = 0, \dots, \lfloor \frac{g}{2} \rfloor$. Chaque sommet a_i a une incidence infini. En effet, pour tout entier naturel n le n -ème twist de Dehn le long de α_0 , $T_{\alpha_0}^n$, a une intersection nulle avec tous les lacets non séparant α_i avec i supérieur ou égal à un. Donc tous les sommets $\{T_{\alpha_0}^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sont reliés à a_i pour tout i supérieur ou égal à un. Ces derniers sont donc d'incidence infini. Pour le sommet a_0 on fait de même en considérant les itérés des twists de Dehn du lacet β par exemple (on peut toujours en trouver un car le genre est supérieur ou égal à deux). \square

3 Propriété WPD

Dans cette partie, nous allons donner une application de l'action du groupe modulaire sur le complexe des courbes : il existe un très grand nombre de sous-groupes distingués du groupe modulaire. Pour cela nous allons montrer que l'action vérifie *WPD* en suivant la preuve de [BF02].

Une (K, L) -quasi-géodésique est l'image par une quasi-isométrie d'un intervalle (fini ou infini). Une propriété fondamentale des espaces δ -hyperboliques est qu'il existe une constante $B = B(K, L, \delta)$ telle que pour tout couple de quasi-géodésiques finies ayant les mêmes bouts elles sont chacune dans un B -voisinage de l'autre. On a le même résultat pour deux quasi-géodésiques infinies des deux côtés, étant à une distance finie. Une isométrie h d'un espace métrique géodésique X est dite *hyperbolique* si h n'a aucune orbite bornée et si elle laisse invariante une quasi-géodésique celle-ci est appelée *quasi-axe* de h .

Définition 54. Nous dirons qu'un élément h , appartenant à un groupe G et agissant de manière hyperbolique sur X , satisfait *WPD* si pour toute constante C strictement positive, il existe un entier r_C tel que pour tout couple de points (x, y) de X appartenant au quasi-axe de h à distance au moins r_C , l'ensemble

$$\{g \in G \mid d_X(x, g(x)) \leq C \text{ et } d_X(y, g(y)) \leq C\}$$

est fini.

Lemme 55. *Soient a et b deux éléments du complexe des courbes tels que leur deux représentants respectif en position minimale remplissent la surface. Alors l'intersection $S(a, b)$ du stabilisateur de a et du stabilisateur de b dans le groupe modulaire est fini.*

Démonstration. Soit g un élément appartenant au stabilisateur de a et b . On considère les représentants α de a et β de b en position minimale. Il existe donc un représentant \tilde{g} de g tel que $\tilde{g}(\alpha) = \alpha$ et $\tilde{g}(\beta) = \beta$. Les lacets α et β remplissent la surface, par conséquent leur complémentaire dans la surface est un nombre fini de disques. De plus, α et β étant préservés, leurs composantes connexes complémentaires sont permutées, donc il existe un N tel que \tilde{g}^N fixe chaque disque. Comme les composantes sont contractiles \tilde{g}^N est isotope à l'identité sur chaque composante, donc globalement d'où g est d'ordre fini. On obtient que tous les éléments de $S(a, b)$ sont d'ordre fini.

Pour conclure on utilise le fait que le groupe modulaire est un groupe de type fini possédant un sous-groupe distingué d'indice fini sans torsion [FM12, p.178]. Ce qui implique que tout sous-groupe de torsion du groupe modulaire est fini ; et donc en particulier $S(a, b)$ est fini. En effet, soit H un sous-groupe de torsion. Notons G' un sous-groupe distingué du groupe modulaire d'indice fini sans torsion. Soient g_1, \dots, g_n des représentants des classes de $\text{Mod}(S)/G'$. Soient h et h' deux éléments de H tels qu'ils soient égaux dans le quotient, il existe alors g' appartenant à G' tel que $h = h'g'$ qui se réécrit : $hh'^{-1} = g'$. Or tous les éléments de H sont d'ordre fini et G' est sans torsion donc on en déduit que $hh'^{-1} = 1$ c'est-à-dire $h = h'$. On conclut que H possède au plus n éléments. \square

Introduisons quelques résultats qui nous serviront lors de la démonstration de la proposition suivante. Soit f un élément pseudo-Anosov du groupe modulaire et ϕ son représentant pseudo-Anosov, alors ϕ possède exactement deux points fixes dans $\mathcal{PM}\mathcal{L}$ notés Λ_+ et Λ_- (voir le théorème de Thurston [FLP12, p.192] qui dit que toute lamination différente des laminations stables et instables associées à ϕ , converge vers la lamination stable sous les itérés de ϕ).

Nous avons montré lors du corollaire 47 que si on a deux laminations L et L' avec L minimale et pleine vérifiant $i(L, L') = 0$ alors $L = L'$. La continuité de I dans $\mathcal{M}\mathcal{L}$ implique en passant à l'espace projectif $\mathcal{PM}\mathcal{L}$ que si U est un voisinage de Λ_+ alors il existe un voisinage $V \subseteq U$ de Γ_+ tel que pour toute paire de points Γ et Γ' de $\mathcal{PM}\mathcal{L}$ qui vérifient $i(\Gamma, \Gamma') = 0$ et $\Gamma \in V$ on a $\Gamma' \in U$. Dans ce cas nous dirons que V est *adéquat* à U . On a la même chose pour les voisinages de Γ_- .

Proposition 56. *Tous les éléments pseudo-Anosov du groupe modulaire satisfont WPD.*

Démonstration. Fixons une structure hyperbolique sur S . Soit f un élément du groupe modulaire et notons ϕ son représentant pseudo-Anosov. Par ce que l'on a fait au-dessus et en gardant les mêmes notations, on peut choisir pour tout entier N strictement positif une suite de voisinages fermés de $\Gamma_+ : U_N \subseteq U_{N-1} \subseteq \dots \subseteq U_1 \subseteq U_0$ et de $\Gamma_- : V_N \subseteq V_{N-1} \subseteq \dots \subseteq V_1 \subseteq V_0$ tels que :

- U_{i+1} et V_{i+1} soient respectivement adéquats à U_i et V_i ,
- si $\Gamma \in U_0$ et $\Gamma' \in V_0$ alors $i(\Gamma, \Gamma') \neq 0$.

Soient deux sommets a et b du complexe des courbes appartenant au même quasi-axe l de ϕ suffisamment éloignés l'un de l'autre. On note \bar{a} et \bar{b} leurs images respectives dans $\mathcal{PM}\mathcal{F}$. Quitte à échanger a et b et à considérer les images de a et b sous l'action de ϕ on peut supposer que $\bar{a} \in U_N$ et $\bar{b} \in V_N$. On veut montrer que pour tout $C > 0$, l'ensemble

$$\{g \in \text{Mod}(S) \mid d_{\mathcal{C}(S)}(a, g(a)) \leq C \text{ et } d_{\mathcal{C}(S)}(b, g(b)) \leq C\}$$

est fini. Raisonnons par l'absurde, fixons $C > 0$ et supposons qu'il existe une suite $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments du groupe modulaire vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_{\mathcal{C}(S)}(a, g_n(a)) \leq C$ et $d_{\mathcal{C}(S)}(b, g_n(b)) \leq C$. Pour $N > C$ on a encore $d_{\mathcal{C}(S)}(a, g_n(a)) \leq N$ et $d_{\mathcal{C}(S)}(b, g_n(b)) \leq N$. Remarquons que si un sommet du complexe des courbes c est à distance de a strictement plus grande que un, alors comme $\bar{a} \in U_N$ et par choix des U_i , $\bar{c} \in U_{N-1} \subseteq U_0$. De même si c est tel que $d_{\mathcal{C}(S)}(a, c) \leq N$ alors il existe une famille de sommets du complexe des courbes $c = c_0, c_1, \dots, c_k = a$ avec $k \leq N$ tels

que $d_{\mathcal{C}}(S)(c_i, c_{i+1}) = 1$ pour $i = 0, \dots, n-1$ donc $\overline{c_{k-1}} \in U_{N-1}$ donc par hypothèse sur les U_i , $\overline{c_{k-2}} \in U_{N-2}$, ..., et enfin $\overline{c} \in U_{N-k} \subseteq U_0$. Ce qui nous permet d'affirmer que pour tout n , $\overline{g_n(a)} \in U_0$ et $\overline{g_n(b)} \in V_0$. Comme \mathcal{PMF} est compacte (voir lemme 48), quitte à considérer une sous-suite on peut supposer que la suite $\{\overline{g_n(a)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers \overline{A} appartenant à U_0 car il est fermé, et de même la suite $\{\overline{g_n(b)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers \overline{B} appartenant à V_0 . Par hypothèse sur U_0 et V_0 on a $i(\overline{A}, \overline{B}) \neq 0$.

Supposons dans un premier temps que la suite $\{\overline{g_n(a)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ prenne une infinité de valeurs. Pour qu'il y ait convergence dans \mathcal{MF} qui n'est pas compact, on peut diviser la mesure associée à chaque élément de la suite par sa longueur (lemme 48) $r_n > 0$, $\{\frac{1}{r_n} g_n(a)\}$ converge donc vers A dans \mathcal{MF} . Comme il n'y a qu'un nombre fini de lacets d'une longueur donnée la suite des longueurs $\{r_n\}$ tend vers l'infini. Si la suite $\{\overline{g_n(b)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ prend elle aussi un nombre infini de valeurs alors en faisant de même et en notant l_n la longueur de $g_n(b)$ on a : $i(A, B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r_n l_n} i(g_n(a), g_n(b)) = 0$ donc dans l'espace projectif on obtient $i(\overline{A}, \overline{B}) = 0$ ce qui est en contradiction avec le choix des U_0 et V_0 . Si maintenant la suite $\{\overline{g_n(b)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ prend un nombre fini de valeurs alors quitte à prendre une sous-suite on peut supposer qu'elle est constante égale à γ , donc $i(A, \gamma) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r_n} i(g_n(a), \gamma) = 0$ ce qui permet de conclure encore que $i(\overline{A}, \overline{B}) = 0$ ce qui est contradictoire.

Si maintenant les suites $\{\overline{g_n(a)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $\{\overline{g_n(b)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ prennent un nombre fini de valeurs alors il existe une sous-suite telle que $\{g_{n_k}(a)\}_{k \in \mathbb{N}}$ et $\{g_{n_k}(b)\}_{k \in \mathbb{N}}$ sont constantes. Mais alors pour tout i et j entiers naturels, $g_{n_i}^{-1} g_{n_j} \in S(a, b)$ or le cardinal de $S(a, b)$ est fini d'après le lemme 55 ce qui est en contradiction avec le fait que la suite soit infinie. □

Le résultat suivant montre l'intérêt de faire agir le groupe modulaire sur le complexe des courbes. Un groupe G est dit *SQ-universel* si pour tout groupe A dénombrable il existe un quotient du groupe G dans lequel A est plongé. Un groupe est virtuellement *cyclique* s'il possède un sous-groupe cyclique d'indice fini.

Théorème 57. *Si un groupe G n'est pas virtuellement cyclique, agit sur un espace hyperbolique X et contient un élément hyperbolique vérifiant WPD alors G est SQ-universel.*

Remarque 58. Derrière il y a la théorie de la petite simplification.

Le théorème s'applique en effet au groupe modulaire car celui-ci possède un \mathbb{Z}^2 , il n'est donc pas virtuellement cyclique. On a montré lors de la section 2.2.3 que le complexe des courbes est δ -hyperbolique. Et d'après la proposition 56 tous les éléments pseudo-Anosov du groupe modulaire vérifient WPD.

Références

- [BF02] Mladen Bestvina and Koji Fujiwara. Bounded cohomology of subgroups of mapping class groups. *Geom. Topol.*, 6 :69–89 (electronic), 2002.
- [Bon01] Francis Bonahon. Geodesic laminations on surfaces. In *Laminations and foliations in dynamics, geometry and topology (Stony Brook, NY, 1998)*, volume 269 of *Contemp. Math.*, pages 1–37. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.
- [Bow06] Brian H. Bowditch. Intersection numbers and the hyperbolicity of the curve complex. *J. Reine Angew. Math.*, 598 :105–129, 2006.
- [Bow13] Brian H. Bowditch. Uniform hyperbolicity of the curve graphs. 2013.

- [Cal07] Danny Calegari. *Foliations and the geometry of 3-manifolds*. Oxford Mathematical Monographs. Oxford University Press, Oxford, 2007.
- [CB88] Andrew J. Casson and Steven A. Bleiler. *Automorphisms of surfaces after Nielsen and Thurston*, volume 9 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
- [CEM06] Richard D. Canary, David Epstein, and Albert Marden, editors. *Fundamentals of hyperbolic geometry : selected expositions*, volume 328 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
- [FLP12] Albert Fathi, François Laudenbach, and Valentin Poénaru. *Thurston's work on surfaces*, volume 48 of *Mathematical Notes*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2012.
- [FM12] Benson Farb and Dan Margalit. *A primer on mapping class groups*, volume 49 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2012.
- [GdlH90] É. Ghys and P. de la Harpe, editors. *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov*, volume 83 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1990.
- [Gui] Vincent Guirardel. *Geometric small cancellation*, volume À paraître of *IAS/Park City Mathematics Series*.
- [HPW13] Sebastian Hensel, Piotr Przytycki, and Richard C. H. Webb. Slim unicorns and uniform hyperbolicity for arc graphs and curve graphs. 2013.
- [Mas77] William S. Massey. *Algebraic topology : an introduction*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977. Reprint of the 1967 edition, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 56.
- [MM99] Howard A. Masur and Yair N. Minsky. Geometry of the complex of curves. I. Hyperbolicity. *Invent. Math.*, 138 :103–149, 1999.
- [MSS06] Yair N. Minsky, Makoto Sakuma, and Caroline Series, editors. *Spaces of Kleinian groups*, volume 329 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
- [Sis13] Alex Sisto. *An even shorter proof that curve graphs are hyperbolic*, Mis en ligne le 20 septembre 2013.
- [Sti92] John Stillwell. *Geometry of surfaces*. Universitext. Springer-Verlag, New York, 1992.
- [Thu97] William P. Thurston. *Three-dimensional geometry and topology. Vol. 1*, volume 35 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997.