

Problème n° II

pour le 20 avril 2020 Ce problème est totalement ou partiellement facultatif. Cependant l'exercice A, l'exercice B, l'exercice C, l'exercice D sont des exercices relativement élémentaires qui ont été posés lors d'examens au cours des années passées. Il peuvent donc être considérés comme des sujets d'annales et nous en donnerons un corrigé détaillé.

L'exercice E reste tout à fait dans l'esprit de ce qui précède et tire profit des différents invariants introduits précédemment afin de déterminer dans quelle mesure on peut fixer arbitrairement la suite des noyaux itérés d'un endomorphisme nilpotent. L'exercice F, l'exercice G et l'exercice H permettent d'étudier l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sous des aspects géométriques et combinatoires. Ils sont cependant plus difficiles que les précédents et à la limite du programme. L'exercice I traite un sujet assez différent à savoir les liens qui existent entre polynôme minimal et polynôme caractéristique d'un endomorphisme, au-delà de ce qu'établit déjà le théorème IV.7.2 de CAYLEY–HAMILTON. Les résultats obtenus dans l'exercice I, pourraient également l'être grâce au théorème IV.11.5 de réduction de FROBENIUS ou plus exactement à son corollaire IV.11.11, qui est en fait une version plus précise du théorème de CAYLEY–HAMILTON. Cependant on développera dans l'exercice I des méthodes tout à fait différentes et qui peuvent présenter un intérêt en soi. On y construit notamment une *division euclidienne* (cf. exercice I, question 6), dans un cadre plus général que celui habituellement envisagé; et qui pourrait avoir des applications à $\mathbb{Z}[X]$ en particulier. Cet exercice reste néanmoins tout à fait marginal en regard du programme du cours. Il est recommandé de connaître l'énoncé du théorème IV.10.10 de réduction de JORDAN; même s'il n'est pas absolument nécessaire d'approfondir, dans un premier temps au moins, les éléments de sa preuve.

Exercice A : (La suite des noyaux itérés)

Soient \mathbb{K} un corps, E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \text{End}_{\mathbb{K}}(E)$ un endomorphisme \mathbb{K} -linéaire de E .

On suppose qu'il existe un entier $\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$f^\varepsilon = 0 \text{ et } f^{\varepsilon-1} \neq 0$$

autrement dit tel que f soit nilpotent d'échelon (d'indice) ε (cf. cours IV.8.1.)

Étant donné un endomorphisme $f \in \text{End}(E)$ de E ,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \text{ on note } N_k := \text{Ker } f^k \text{ et } n_k := \dim N_k$$

(avec la convention que $f^0 = \text{Id}_E$.)

Cet exercice peut être traité de manière tout à fait élémentaire et ne nécessite l'usage ni du théorème IV.10.10 de JORDAN ni du théorème IV.11.5 de réduction de FROBENIUS.

1) Montrer qu'il existe un vecteur $x \in E$ tel que la famille $\{f^i(x)\}_{0 \leq i \leq \varepsilon-1}$ est libre.

2) (polynôme minimal)

Quel est le polynôme minimal de f ? Qu'en déduit-on sur ε et n ?

3) Montrer que la suite

$$\{0\} \subset \text{Ker } f \subset \dots \subset \text{Ker } f^{\varepsilon-1} \subset \text{Ker } f^\varepsilon = E$$

est strictement croissante; et constante lorsque $k \geq \varepsilon$.

4) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure stricte.

5) Dans le cas où $\varepsilon = n$, montrer qu'il existe une base où la matrice de f est

$$J_n(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6) Quand $\varepsilon = n$, décrire complètement la suite $\dim_{\mathbb{K}} N_i, i \in \mathbb{N}$.

Exercice B : (Injection de FROBENIUS)

Soient \mathbb{K} un corps, E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \text{End}_{\mathbb{K}}(E)$ un endomorphisme \mathbb{K} -linéaire de E .

On suppose qu'il existe un entier $\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$f^\varepsilon = 0 \text{ et } f^{\varepsilon-1} \neq 0$$

autrement dit tel que f soit nilpotent d'échelon (d'indice) ε (cf. cours IV.8.1.)

Étant donné un endomorphisme $f \in \text{End}(E)$ de E ,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \text{ on note } N_k := \text{Ker } f^k \text{ et } n_k := \dim N_k$$

(avec la convention que $f^0 = \text{Id}_E$.)

On note

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, d_i := \dim_{\mathbb{K}} N_i - \dim_{\mathbb{K}} N_{i-1}.$$

Il est vraisemblable que nombre des énoncés de cet exercice peuvent être obtenus comme corollaires du théorème IV.10.10 de réduction de JORDAN, mais on va chercher à les établir ici par des méthodes plus élémentaires.

1) Étant donné un \mathbb{K} -espace vectoriel V de dimension finie et $W \subset V$ un sous-espace de V , rappelez ce que vaut $\dim_{\mathbb{K}} V/W$ en fonction de $\dim_{\mathbb{K}} V$ et $\dim_{\mathbb{K}} W$.

2) Montrer que

$$\forall i \in \mathbb{N}, d_i \geq 0.$$

3) Vérifier que, pour tout $i \in \mathbb{N}$, la restriction $f|_{N_{i+1}}$ de f à N_{i+1} est à valeurs dans N_i .

Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on note

$$p_i : N_{i+1} \rightarrow N_{i+1}/N_i \text{ la surjection canonique.}$$

4) Montrer que, pour tout $i \in \mathbb{N}$, il existe un unique morphisme

$$f_i : N_{i+2}/N_{i+1} \rightarrow N_{i+1}/N_i \text{ tq } f_i \circ p_{i+1} = p_i \circ f|_{N_{i+2}}.$$

5) Montrer que

$$\forall i \in \mathbb{N}, f_i \text{ est injective.}$$

On l'appellera l'injection de FROBENIUS.

6) Dédurre de ce qui précède que d_i est décroissante.

Exercice C : (Tableaux de YOUNG)

Soient \mathbb{K} un corps, E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \text{End}_{\mathbb{K}}(E)$ un endomorphisme \mathbb{K} -linéaire de E .

On suppose qu'il existe un entier $\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$f^\varepsilon = 0 \text{ et } f^{\varepsilon-1} \neq 0$$

autrement dit tel que f soit nilpotent d'échelon (d'indice) ε (cf. cours IV.8.1.)

Étant donné un endomorphisme $f \in \text{End}(E)$ de E ,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \text{ on note } N_k := \text{Ker } f^k \text{ et } n_k := \dim N_k$$

(avec la convention que $f^0 = \text{Id}_E$.)

1) Justifier, en citant précisément le théorème que vous utilisez, mais sans le redémontrer bien entendu, qu'il existe un entier $m \in \mathbb{N}^*$, des entiers strictement positifs $r_j, 1 \leq j \leq m$ et des sous espaces $E_j, 1 \leq j \leq m$ tels que :

J₁)

$$E = \bigoplus_{j=1}^m E_j;$$

J₂) $\forall 1 \leq j \leq m, E_j$ est stable par f ;

J₃)

$$\forall 1 \leq j \leq m-1, r_j \geq r_{j+1} ;$$

J₄) le sous-espace $(E_j, f|_{E_j})$ est cyclique de polynôme minimal X^{r_j} .

2) Que vaut $\sum_{j=1}^m r_j$?

On peut donc trouver une base de E dans laquelle la matrice de f est J :

Pour tout $r \leq n$, soit

$$J_r := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$$

le bloc de JORDAN "élémentaire".

La matrice J est donc de la forme

$$J = \text{diag}(J_{r_1}, J_{r_2}, \dots, J_{r_m}) = \begin{pmatrix} J_{r_1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & J_{r_2} & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J_{r_m} \end{pmatrix}$$

pour un certain entier m .

3) (Décomposition des noyaux)

Notons

$$\forall 1 \leq i \leq m, f_i := f|_{E_i}.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $1 \leq i \leq m$, donnez une relation entre les $n_{i,k} := \dim \text{Ker } f_i^k$ et n_k .

4) Établir la valeur de $n_{i,k}$ en fonction de k et de r_i .

5) En déduire que

$$n_1 := \dim \text{Ker } f = m \text{ et } n_k = \sum_{i=1}^m \min(k, r_i).$$

On définit le **tableau de YOUNG** de (E, f) comme le tableau constitué de m lignes, alignées sur la gauche et tel que la $j^{\text{ième}}$ ligne comporte r_j cases. Par exemple si $m = 3, (r_1, r_2, r_3) = (5, 4, 1)$, le tableau de YOUNG est

$$Y(E, f) = \begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * \end{pmatrix}.$$

6) Montrer que pour tout $j \in \mathbb{N}^*, d_j := \dim_{\mathbb{K}} N_j - \dim_{\mathbb{K}} N_{j-1}$ est la hauteur (le nombre de cases) de la $j^{\text{ième}}$ colonne du tableau de YOUNG $Y(E, f)$.

7) a) Donner les invariants de similitudes de f nilpotent dont le tableau de YOUNG est

$$Y(E, f) = \begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * \end{pmatrix}.$$

b) Quelle est la dimension de E ?

c) Quels sont le tableau de YOUNG de f^2 et ses invariants de similitude.

Exercice D : (Commutant)

Soient \mathbb{K} un corps, E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \text{End}_{\mathbb{K}}(E)$. On appelle *commutant de u* et on note

$$\text{Com}(u) := \{v \in \text{End}_{\mathbb{K}}(E) ; u \circ v = v \circ u\} \subset \text{End}_{\mathbb{K}}(E)$$

l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec u . On rappelle que $\mathbb{K}[u] \subset \text{End}_{\mathbb{K}}(E)$ est l'ensemble des polynômes en u i.e. l'image de $\mathbb{K}[X]$ par le morphisme $X \mapsto u$.

- 1) Montrer que $\text{Com}(u)$ est un sous espace vectoriel de $\text{End}_{\mathbb{K}}(E)$.
- 2) On suppose dans cette question que u est cyclique et que $x_0 \in E$ est un vecteur cyclique pour u .
 - a) En considérant l'application

$$\varphi : \text{Com}(u) \rightarrow E, v \mapsto v(x_0),$$

montrer que l'on a $\dim_{\mathbb{K}} \text{Com}(u) \leq n$.

- b) Montrer que $\dim \mathbb{K}[u] \geq n$ et que

$$\text{Com}(u) = \mathbb{K}[u].$$

On pourra remarquer, en particulier que si u est nilpotent d'échelon n (cf. cours IV.8.1.)

$$\text{Com}(u) \cong \mathbb{K}[u].$$

- 3) Supposons que $E = \bigoplus_{i=1}^r E_i$ avec E_i stable par u . Comparer

$$\dim_{\mathbb{K}} \text{Com}(u) \text{ et } \sum_{i=1}^r \dim_{\mathbb{K}} \text{Com}(u|_{E_i}).$$

- 4) On suppose que $E = E_1 \oplus E_2$, où E_i est stable par u , cyclique de polynôme minimal μ_i avec $\mu_2 | \mu_1$.

- a) Montrer qu'il existe une base \mathcal{B} de E telle que :

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} C_{\mu_1} & 0 \\ 0 & C_{\mu_2} \end{pmatrix}$$

où pour tout polynôme $R \in \mathbb{K}[X]$, C_R désigne la matrice compagnon de R .

- b) En déduire qu'il existe un endomorphisme $v \in \text{Com}(u) \setminus \{0\}$ dont la matrice dans la base \mathcal{B} est de la forme

$$M_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{pmatrix}.$$

- c) Montrer que

$$\dim_{\mathbb{K}} \text{Com}(u) > n.$$

5) Dédurre de ce qui précède que, si u n'est pas cyclique $\dim_{\mathbb{K}} \text{Com}(u) > n$; puis que $\dim_{\mathbb{K}} \text{Com}(u) = n$ si et seulement si u est cyclique.

Exercice E : (Une question réciproque)

Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie n .

On cherche dans ce problème à savoir s'il existe des endomorphismes nilpotents de E dont la dimension des noyaux itérés est arbitrairement fixée. Si c'est le cas, on essaiera de les déterminer, au moins à conjugaison près. Il est recommandé de traiter l'exercice C avant le présent exercice. On y a, en effet étudié certains invariants liés à la suite des noyaux itérés en grand détail; ce qui pourra s'avérer très utile pour traiter les questions qui suivent.

L'objectif de cet exercice est de déterminer quelles sont les suites finies d'entiers $n_k, 0 \leq k \leq n, n_k \leq n$, pour lesquelles il existe un endomorphisme nilpotent $f \in \text{End}_{\mathbb{C}}(E)$ de E tel que

$$\forall 1 \leq k \leq n, \dim \text{Ker } f^k = n_k. \tag{1}$$

Soit donc donnée, dans toute cette partie, une suite n_k satisfaisant les hypothèses ci-dessus. On suppose qu'il existe f nilpotent vérifiant la condition 1 et l'on cherche à en tirer un certain nombre de conséquences.

On cherche au moins à déterminer la classe de conjugaison de f comme ci-dessus et, par conséquent, on peut se placer dans une base \mathcal{B} dans laquelle la matrice de f est une réduite de JORDAN notée J .

Pour tout $r \leq n$, soit

$$J_r := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$$

le bloc de JORDAN "élémentaire".

La matrice J est donc de la forme

$$J = \text{diag}(J_{r_1}, J_{r_2}, \dots, J_{r_m}) = \begin{pmatrix} J_{r_1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & J_{r_2} & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J_{r_m} \end{pmatrix}$$

pour un certain entier m .

1) Pour toute permutation σ de l'ensemble $[1; m]$, montrer que les matrices J et

$$J_\sigma := \text{diag}(J_{r_{\sigma(1)}}, J_{r_{\sigma(2)}}, \dots, J_{r_{\sigma(m)}})$$

obtenue en permutant les blocs de JORDAN, sont conjuguées, c'est-à-dire qu'il existe une matrice inversible $P_\sigma \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$ telle que

$$J = P_\sigma J_\sigma P_\sigma^{-1},$$

ou encore qu'il existe une autre base \mathcal{B}_σ dans laquelle la matrice de f est également une réduite de JORDAN.

2) (Pentes)

Pour tout

$$k \in \mathbb{N}^* \text{ on note encore } d_k := n_k - n_{k-1}. \text{ (cf. exercice C, question 6) .}$$

Montrer qu'alors d_k est le nombre d'indice j tel que $r_j \geq k$.

3) (Nombre de blocs)

En déduire que pour tout $k \geq 0, d_k - d_{k+1}$ est exactement le nombre d'indices $1 \leq j \leq m$ tels que $r_j = k$. Remarquer qu'on obtient à nouveau ainsi l'énoncé de décroissance établi à l'exercice B, question 6) sans avoir recours à l'injection de FROBENIUS et par un argument particulièrement élémentaire. Qu'en pensez-vous?

On suppose que $n = 25$, on donne la suite

$$n_1 = 7, n_2 = 14, n_3 = 20, n_4 = 23, n_5 = 25.$$

Un endomorphisme f vérifiant 1 pour cette suite est donc nilpotent d'échelon 5.

4) (Polygône)

On note $M_k := (k, n_k), 0 \leq k \leq 5$. Tracez le graphe obtenu en reliant M_k et M_{k+1} par un segment de droite.

5) a) Interpréter géométriquement dans ce cas les d_k de la question 2).

- b) Montrer que le graphe correspond à une fonction concave.
- c) À quoi correspondent les points anguleux de ce graphe ?
- 6) Montrer l'existence d'un endomorphisme nilpotent d'échelon 5 vérifiant 1 pour la suite n_k donnée dans cette question. Que peut-on dire de tous les endomorphismes solutions du problème ?
- 7) Dans le cas général (n quelconque,) quelles conditions (nécessaires et suffisantes) doit satisfaire la suite n_k pour qu'il existe un endomorphisme f nilpotent vérifiant 1 ?

Exercice F : (Géométrie du cône nilpotent)

On regarde dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble \mathcal{N} des matrices nilpotentes, comme espace topologique. On l'appelle le *cône nilpotent*. (En fait on pourrait considérer n'importe quel corps, même si pour la suite il faudrait préciser les topologies, ce qu'est une variété etc..)

- 1) \mathcal{N} est-il un espace vectoriel ?
- 2) Même si ce n'est pas le cas, on va montrer que \mathcal{N} est une sous-variété de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et déterminer sa dimension.
- a) Montrer que \mathcal{N} est fermé.
- b) **Supposons dans cette question que $n = 2$**
- i) Montrer qu'une matrice nilpotente est de trace nulle.
- ii) Donner deux équations définissant \mathcal{N} dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ (ou une seule équation dans $\{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) ; \text{Tr}(M) = 0\}$).
- iii) Quelle est cette surface ? (Indication : on pourra effectuer le changement de variables linéaire $x = x', y = y' + z'$ et $z = y' - z'$).
- iv) Montrer que \mathcal{N} s'identifie à une surface dans \mathbb{C}^3 , mais a un point singulier en 0.

Indication : On pourra considérer l'espace tangent en la matrice nulle, et montrer qu'il est de dimension 3.

- c) Montrer que les matrices nilpotentes de rang $n - 1$ (i.e. d'échelon n (cf. cours IV.8.1.)) forment un ouvert, dense, de \mathcal{N} .
- Indication :** On pourra considérer N sous forme de Jordan, et regarder $N + \frac{1}{k}J_n$.

- d) Montrer que toutes les matrices nilpotentes de rang $n - 1$ sont conjuguées.
- e) Soit N une telle matrice. Montrer que l'ensemble des matrices P qui commutent à N est isomorphe à \mathbb{C}^n
- Indication :** on pourra supposer que N est sous forme normale de Jordan disons sous-diagonale (pourquoi ? , et regarder l'image par P de e_1).

f) (Difficile)

Montrer que l'ensemble des matrices de rang exactement $n - 1$ est de dimension $n(n - 1)$. On pourra construire un \mathcal{C}^∞ -difféomorphisme explicite entre \mathcal{N}_n , l'ensemble des matrices nilpotentes d'ordre exactement n , et

$$S = \left\{ M = \begin{pmatrix} 1 & * & \dots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & * & & * \end{pmatrix} \mid M \in \text{GL}_n(\mathbb{C}) \right\},$$

en utilisant ce qui précède.

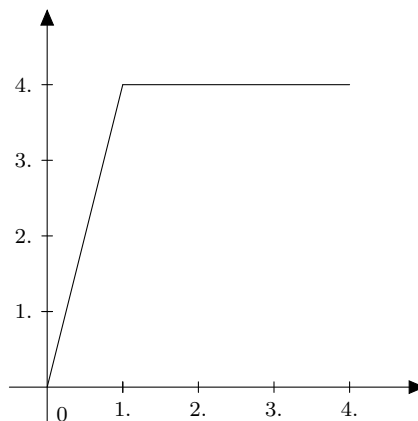
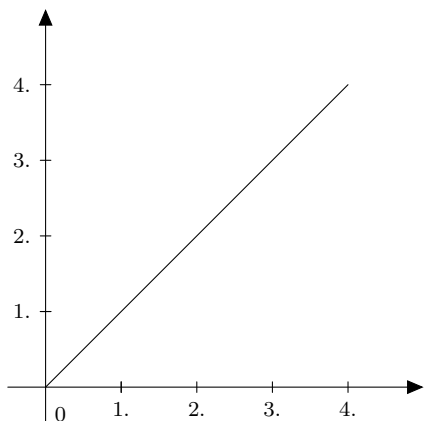
Exercice G : (Partitions, tableaux de YOUNG, polygones concaves)

On appelle **partition de n** une suite $d_1 \geq d_2 \geq \dots d_n \geq 0$ telle que $d_1 + \dots + d_n = n$ (on autorise à avoir des répétitions et des zéros). On note $\mathcal{P}art(n)$ leur ensemble. On note $\mathcal{P}ol$ l'ensemble des polygones croissants, concaves, à abscisses de rupture entières tels que $P(0) = 0$ et $P(n) = n$ et pour tout $0 \leq k \leq n, P(k) \in \mathbb{N}$.

On note \mathcal{Y} l'ensemble des diagrammes de Young à n cases (https://fr.wikipedia.org/wiki/Tableau_de_Young).

- 1) Montrer que l'on a des bijections (naturelles) entre $\mathcal{P}art(n)$, $\mathcal{P}ol$, et \mathcal{Y} .

FIGURE 1 – Deux exemples de polygones dans \mathcal{Pol} pour $n = 4$



2) Construire une application naturelle $\nu : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{Part}(n)$ telle qu'une matrice d'échelon n est envoyée sur la partition $1 + 1 + \dots + 1 = n$, et la matrice nulle est envoyée sur $n + 0 + \dots + 0 = n$.

3) Quel polygone est alors associé à une matrice de rang $n - 1$? De rang 0 ?

4) Montrer que deux matrices de \mathcal{N} sont semblables ssi leurs ν sont égaux (vu comme polygones, partition ou diagramme, au choix).

5) **Pour toute partition (ou polygone, ou diagramme) p , on note \mathcal{N}_p l'ensemble des matrices envoyées sur p .**

Pourquoi \mathcal{N}_p est-il une classe de conjugaison ? Donner pour $n = 8$, un représentant de la classe de conjugaison de la partition $3 + 2 + 2 + 1 = 8$.

6) **(Difficile)**

Montrer que $\mathcal{N}_{p'}$ est dans l'adhérence de \mathcal{N}_p si et seulement si le polygone de p est en dessous du polygone de p' .

Exercice H : (Un graphe)

1) Pour $n = 6$, donner le graph orienté dont les sommets sont les classes de similitudes de matrices nilpotentes, et les arêtes sont orientées $M \rightarrow M'$ s'il existe une suite de matrices dans la classe de conjugaison de M dont la limite est dans la classe de conjugaison de M' (on enlève les arêtes ayant même sommet de départ et d'arrivée, et lorsque l'on a des arrêtes $M \rightarrow M' \rightarrow M''$ on ne fera pas apparaître l'arrête $M \rightarrow M''$).

2) Ce graph, vu comme graphe orienté, a-t'il des cycles ? Et si on oublie l'orientation ?

Exercice I : (Facteurs irréductibles du polynôme minimal et du polynôme caractéristique)

On va chercher, dans ce problème, à comparer la décomposition en produit d'irréductibles du polynôme minimal et du polynôme caractéristique d'un endo morphisme.

À noter immédiatement que le corollaire IV.7.3 du théorème IV.7.2 de CAYLEY–HAMILTON est abusif. En effet du théorème de CAYLEY–HAMILTON assurant que

$$P_{\min u} | P_{\text{car } u}$$

il résulte immédiatement que, tout facteur irréductible de $P_{\min u}$ est un facteur irréductible de $P_{\text{car } u}$, mais rien ne permet à ce point d'affirmer que, réciproquement un facteur irréductible de $P_{\text{car } u}$ soit un facteur irréductible de $P_{\min u}$ (hormis si toutefois il est de degré 1 mais ceux-ci jouent un rôle particulier (cf. question 1).))

En fait, dans la présentation qui est faite dans le cours, le corollaire IV.7.3 devrait apparaître comme un corollaire du corollaire IV.11.11. Ce dernier est lui-même un corollaire de la proposition IV.6.4 (cf. DOC n° III, n° III.1.exercice C) et bien entendu du théorème IV.11.5 de réduction de FROBENIUS. C'est précisément le recours à ce dernier résultat, qui est l'un des plus techniques de ce cours, qui pourrait inciter à donner un argument alternatif ; ce que nous allons faire dans ce qui suit.

Dans tout cet exercice, \mathbb{K} est un corps, $n \in \mathbb{N}^*$, E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n et $u \in \text{End}_{\mathbb{K}}(E)$ un endomorphisme \mathbb{K} -linéaire de E . On note $P_{\text{car } u}$ (resp. $P_{\min u}$) le polynôme caractéristique (cf. cours IV.6.1,) (resp. le polynôme minimal (cf. cours IV.2.2.iv).))

1) **(Les facteurs de degré 1)**

Rappeler pourquoi

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, (X - \lambda) | P_{\min u} \Leftrightarrow (X - \lambda) | P_{\text{car } u}$$

et en déduire que si \mathbb{K} est algébriquement clos,

$$P_{\text{car } u} | (P_{\min u})^n.$$

On sait déjà, grâce au théorème IV.7.2 de CAYLEY–HAMILTON, que

$$P_{\min u} \mid P_{\text{car } u} .$$

On va montrer, (cf. question 7), c), que

$$P_{\text{car } u} \mid [P_{\min u}]^n .$$

L'élément technique principal pour prouver l'énoncé de divisibilité ci-dessus est la possibilité de faire la division euclidienne d'un polynôme à coefficients dans un anneau de matrices par un autre (cf. question 6). La difficulté réside alors dans le fait de pouvoir justifier une telle construction. Si $A[X]$ est en effet un anneau de polynômes à une indéterminée, nous n'avons formellement établi un théorème de la *division euclidienne* que dans le cas où A est un corps (cf. cours III.4.2); sans compter que nous n'avons même défini les anneaux de polynôme que dans le cas où A est un anneau commutatif (cf. cours III) et que nous nous sommes bornés à ne donner la plupart des résultats que dans le cas où A est intègre. Or si l'on veut considérer l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on sait de longue date qu'il n'est ni intègre ni commutatif. Qui plus est, on risque d'être amené, comme on l'a déjà fait (cf. DOC n° III, n° III.1.exercice D), à identifier les deux anneaux

$$(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))[X] \text{ et } \mathcal{M}_n(\mathbb{K}[X]) \text{ (cf. question 3) .}$$

On rappelle que, pour un anneau commutatif A , on note $\mathcal{M}_n(A)$ l'anneau des matrices carrées de taille $n \times n$ à coefficients dans A . On rappelle que cet anneau est isomorphe à l'anneau $\text{End}_{A\text{-mod}}(A^n)$ des endomorphismes du A -module libre A^n ; cet isomorphisme n'étant pas canonique mais donné par le choix d'une base de A^n .

2) (L'anneau $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))[X]$)

Notons $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On va définir l'anneau $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))[X]$ des polynômes à une indéterminée à coefficients dans l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices $n \times n$ comme le sous-anneau des éléments presque nuls de l'anneau $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))[[X]]$ des séries formelles à coefficients dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont on rappelle brièvement la construction ci-après. On suit en cela le même schéma que celui exposé dans le chapitre III du cours pour les anneaux commutatifs.

i) (Addition : groupe abélien)

Puisque $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +)$ est un groupe abélien, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ a une structure naturelle de groupe abélien donnée par l'addition terme à terme (cf. cours I.6.1.i); pour laquelle l'élément neutre est la suite nulle de valeur constante égale à $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$ et pour laquelle l'opposé d'une suite $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est la suite $(-M_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

ii) (Multiplication : anneau)

Comme dans le cas où A est un anneau commutatif, on définira le *produit de CAUCHY* sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ (cf. cours III.1.2.2),

$$\forall (M, P) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^{\mathbb{N}} \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^{\mathbb{N}}, (M *_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^{\mathbb{N}}} P)_k := \sum_{i=0}^k M_i *_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})} P_{k-i} .$$

Il faut d'ores et déjà remarquer que $*_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$ n'étant pas commutative, $*_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^{\mathbb{N}}}$ ne le sera pas davantage. Il est cependant toute à fait élémentaire de vérifier que $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par

$$U_0 := I = 1_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})} \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^*, U_k := 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})},$$

est un élément neutre pour $*_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^{\mathbb{N}}}$ qu'on notera abusivement I ou même 1 dans la suite, et que

$$\begin{aligned} \forall (M, P, Q) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^{\mathbb{N}} \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^{\mathbb{N}} \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^{\mathbb{N}}, \quad (M + P) *_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^{\mathbb{N}}} Q &= M *_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^{\mathbb{N}}} Q + P *_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^{\mathbb{N}}} Q \\ \text{et} \quad M *_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^{\mathbb{N}}} (P + Q) &= M *_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^{\mathbb{N}}} P + M *_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^{\mathbb{N}}} Q ; \end{aligned}$$

c'est-à-dire que $*_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^{\mathbb{N}}}$ est distributive sur $+$.

On notera $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))[[X]]$ l'anneau ainsi construit.

iii) (Anneau des polynômes)

On s'intéressera cependant surtout au sous-anneau $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))[X]$ de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))[[X]]$ constitué des suites presque nulles, i.e. des suites $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ pour lesquels il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $q \geq p$, $M_q = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

Il est fastidieux mais sans grande difficulté de vérifier que

$$(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))[X] \text{ est effectivement un sous-anneau de } (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))[[X]]$$

ce qui signifie (cf. cours I.3.3) que $((\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))[X], +)$ est un sous-groupe de $((\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))[[X]], +)$, que $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))[X]$ est stable par le produit de CAUCHY $*_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^{\mathbb{N}}}$ et que l'élément unité I est dans $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))[X]$.

Il ne s'agit rien moins, mais rien de plus non plus que de vérifier que la somme et le produit de deux suites presque nulles est encore une suite presque nulle; les arguments étant alors exactement de même nature que dans le cas d'un anneau commutatif.

iv) (Degré et valuation)

On peut encore définir la *valuation* $\text{val}(\cdot)$ d'un élément de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))[[X]]$ (cf. cours III.1.14.) ou de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))[X]$ et le *degré* $\text{deg}(\cdot)$ d'un élément de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))[X]$ (cf. cours III.2.3.) Cependant il convient de s'arrêter un instant sur leurs propriétés (cf. b.).

v) (Morphisme structural)

L'application

$$\iota : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))[[X]], M \mapsto (M, 0, 0, \dots, 0, \dots)$$

est encore un morphisme injectif d'anneaux qui est en fait à valeurs dans $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))[X]$; identifiant $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ à un sous-anneau de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))[X]$; si bien que, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on notera simplement M pour la série formelle (resp. le polynôme) dont le terme de rang 0 est M et les autres termes sont nuls.

Il est encore clair que l'image $\text{Im } \iota$ de ι est l'ensemble des éléments de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))[X]$ de degré 0.

vi) (Loi externe, structure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ -module)

Pour tout

$$(A, M) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))[X]$$

on peut définir $A \cdot M := A *_{(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))[X]} M$, en considérant A comme un élément de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))[X]$ à travers ι .

vii) (Base)

En X l'élément $(0, 1, 0, \dots, 0, \dots) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))[[X]]$, on constate que c'est en fait un élément de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))[X]$, et que

$$\forall k \in \mathbb{N}, X^k := X *_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^{\mathbb{N}}} \dots *_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^{\mathbb{N}}} X$$

est la suite dont le $i^{\text{ème}}$ terme est $\delta_{k,i}$. Comme dans le cas commutatif il n'est pas difficile de montrer que $\{X^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ est une $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ -base de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))[X]$.

a) ($n = 1$)

Que dire de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))[[X]]$ et $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))[X]$ lorsque $n = 1$?

b) (Valuation et degré)

Soit $(P, Q) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))[X] \times (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))[X]$, que peut-on dire de :

$$\begin{aligned} & \text{val}(P + Q), \\ & \text{val}(P * Q), \\ & \text{deg}(P + Q) \\ & \text{et } \text{deg}(P * Q). \end{aligned}$$

Bien qu'on n'ait pas, en général, $P * Q = Q * P$, aurait-on cependant

$$\text{deg}(P * Q) = \text{deg}(Q * P) ?$$

3) Montrer qu'il existe un unique morphisme d'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ -linéaire :

$$\begin{aligned} \phi : (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))[X] & \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}[X]) \\ X & \longmapsto M_1 := \begin{pmatrix} X & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & X & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & X & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & X \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et que de plus ϕ est un isomorphisme.

Indication : On pourra noter

$$\forall i \in \mathbb{N}, M_i := M_1^i$$

et remarquer que M_i commute avec tous les éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}[X])$.

L'isomorphisme ϕ ci-dessus permet donc d'identifier (en tant qu'anneau) les polynômes dont les coefficients sont des matrices $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))[X]$ au matrices dont les coefficients sont des polynômes $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}[X])$. On se placera donc, dans la suite, sous l'un ou l'autre point de vue, selon ce qui sera le plus commode. En particulier on oubliera la notation M_i pour lui préférer X^i , dont on gardera bien à l'esprit que c'est une matrice qui commute avec n'importe quel élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}[X])$. On notera I l'unité de ces anneaux qui est la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

4) (Valuation et degré)

Pour $M \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))[X]$ comparer la valuation et le degré de M définis en question 2), iv) et les valuations et degré respectifs des coefficients de la matrice $\phi(M)$.

5) (Éléments inversibles)

Puisque $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un sous-anneau de $\phi : (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))[X] \cong \mathcal{M}_n(\mathbb{K}[X])$, tout inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est encore inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}[X])$. En revanche il n'est pas tout à fait immédiat de déterminer exactement ce qu'est $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}[X]))^\times$; ce dont d'ailleurs nous n'aurons pas explicitement besoin. On peut cependant remarquer :

a) (Matrice de carré nul)

Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifie $A^2 = 0$, $I - AX$ est inversible.

b) (Matrices nilpotentes)

Plus généralement montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est tel que $A^n = 0$, (nilpotente d'échelon n (cf. cours IV.8.1.)) $I - AX$ est inversible.

6) (Division euclidienne)

Pour tout $(M, P) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))[X] \times (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))[X]$ tel que

$$P = \sum_{i=0}^d P_i X^i \text{ avec } P_d \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^\times \text{ inversible,}$$

montrer qu'il existe

$$(Q, R) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))[X] \times (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))[X] \text{ tel que } M = P * Q + R \text{ et } \deg(R) < \deg(P).$$

Indication : On pourra adapter la méthode utilisée dans le III.7.7.

7) (Facteurs irréductibles)

Soit

$$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ et } M := P_{\min A} I \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))[X] \cong \mathcal{M}_n(\mathbb{K}[X]).$$

a) (Division euclidienne)

Montrer qu'il existe

$$(Q, R) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))[X] \times (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))[X] \text{ tel que } M = (A - IX) * Q + R \text{ et } \deg(R) < 1.$$

b) Montrer que $R = 0$.

c)

$$P_{\text{car } A} \mid [P_{\min A}]^n.$$

d) (Facteurs irréductible)

En déduire que tout facteur irréductible de $P_{\text{car } A}$ est un facteur irréductible de $P_{\min A}$.