Université Paris Sud **Année 2006-2007**

M1 **Arithmétique**

Examen partiel du 26 mars 2007

Durée trois heures

La qualité de la rédaction entrera pour une grande part dans la notation. Les calculatrices, téléphones mobiles et documents ne sont pas autorisés.

Les exercices sont indépendants.

Exercice A

1) On choisit un nombre premier p et une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}_p}$ de $\mathbb{Q}_p$. On note v_p l'unique valuation sur $\overline{\mathbb{Q}_p}$ telle que $v_p(p) = 1$. On se donne deux entiers r, s vérifiant $1 \leq r < s$, des éléments $a_n \in \mathbb{Z}_p$, pour n entier vérifiant $0 \leq n < r + s$ et on suppose que

$$v_p(a_0) = 2,\ v_p(a_n) \geq 2 \textbf{ pour } 0 < n < r,\ v_p(a_r) = 1 \textbf{ et } v_p(a_n) \geq 1 \textbf{ pour } r < n < r + s\ .$$

On pose $P = a_0 + a_1 X + \ldots + a_{r+s-1} X^{r+s-1} + X^{r+s}$.
a) Montrer que dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$, il existe des racines α et β de P vérifiant $v(\alpha) = 1/r$ et $v(\beta) = 1/s$. Calculer le degré du polynôme minimal P_1 de α et du polynôme minimal P_2 de β et montrer que $P = P_1 P_2$.

b) On pose $L_1 = \mathbb{Q}_p(\alpha)$ et $L_2 = \mathbb{Q}_p(\beta)$. Pour $i = 1, 2,$ déterminer le degré, l'indice de ramification et le degré résiduel de l'extension L_i/Q_p, montrer que $\mathcal{O}_{L_1} = \mathbb{Z}_p[\alpha]$ et $\mathcal{O}_{L_2} = \mathbb{Z}_p[\beta]$.

c) On suppose que r et s sont premiers entre eux et on pose $L_3 = \mathbb{Q}_p[\alpha, \beta]$. Calculer l'indice de ramification et le degré de l'extension $L_3/\mathbb{Q}_p$. Montrer qu'il existe un isomorphisme d'anneaux $L_1 \otimes_{\mathbb{Q}_p} L_2 \to L_3$. Montrer qu'il existe des entiers $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que, si $\gamma = \alpha^u \beta^v$, alors $\mathcal{O}_{L_3} = \mathbb{Z}_p[\gamma]$. Est-il vrai que $\mathcal{O}_{L_3} = \mathbb{Z}_p[\alpha, \beta]$?

2) Soit $Q \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme de degré ≤ 7 et soit

$$R = 36Q + 36 + 12X^2 + 6X^3 + X^8$$

Déterminer le degré des polynômes irréductibles sur $\mathbb{Q}_2$ qui divisent R. Même question sur $\mathbb{Q}_3$. En déduire que R est irréductible sur $\mathbb{Q}$.

3) Soit $\delta \in \mathbb{C}$ une racine de R et soit $E = \mathbb{Q}[\delta]$.
a) Quel est le degré de l'extension $E/\mathbb{Q}$?

b) Combien y-a-t'il d'idéaux maximaux de $\mathcal{O}_E$ au-dessus de 2 ? Pour chacun d'eux, déterminer l'indice de ramification et le degré résiduel. Même question pour $p = 3$.

Exercice B

On dit qu'un idéal I d'un anneau commutatif A est *nilpotent* s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $I^n = 0$. On dit que $x \in A$ est *nilpotent* s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n = 0$ et on note r_A l'ensemble des éléments nilpotents de A. On dit que A est *réduit* si $r_A = \{0\}$.

1 .a) Montrer que r_A est un idéal de l'anneau A et que A/r_A est réduit.
b) Montrer que, si A est noethérien, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $(r_A)^n = 0$.

c) Montrer que l'application $\operatorname{Spec}(A/r_A) \to \operatorname{Spec}(A)$ est bijective.

d) Montrer que, si $x \in A$ et si $S = \{x^n \mid n \in N\}$, alors $S^{-1}A = \{0\}$ si et seulement si x est nilpotent. En déduire que r_A est l'intersection des idéaux premiers de A.

2 .a) Montrer que, si I et J sont deux idéaux de l'anneau A tels que $I + J = A$, alors $IJ = I \cap J$.
b) Montrer que, si $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \ldots, \mathfrak{m}_r$ sont des idéaux maximaux distincts de A et si $n_1, n_2, \ldots, n_r \in \mathbb{N}$, alors

$$\mathfrak{m}_1^{n_1} \cap \mathfrak{m}_2^{n_2} \cap \ldots \cap \mathfrak{m}_r^{n_r} \;=\; \mathfrak{m}_1^{n_1}\mathfrak{m}_2^{n_2} \ldots \mathfrak{m}_r^{n_r} \;.$$

3) On suppose désormais que A est un anneau *fini* sur un corps k, *i.e.*que A contient k et est de dimension finie en tant qu'espace vectoriel sur k.
a) Montrer que tout idéal premier de A est maximal.

b) montrer que, si A est un anneau local, son idéal maximal est nilpotent.

c) Soient $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \ldots, \mathfrak{m}_r$ des idéaux maximaux distincts de A et, pour $1 \leq j \leq r$, soit $\pi_j : A \to A/\mathfrak{m}_j$, la projection canonique. Montrer que l'application

$$A \to A/\mathfrak{m}_1 \times A/\mathfrak{m}_2 \times \ldots \times A/\mathfrak{m}_r$$

qui envoie a sur $(\pi_1(a), \pi_2(a), \ldots, \pi_r(a))$ est injective. En déduire que A n'a qu'un nombre fini d'idéaux maximaux.

d) Soient $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \ldots, \mathfrak{m}_s$ les idéaux maximaux distincts de A. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $r_A^n = \mathfrak{m}_1^n\mathfrak{m}_2^n \ldots \mathfrak{m}_s^n$. En déduire qu'il existe un entier t tel que

$$A \simeq A/\mathfrak{m}_1^t \times A/\mathfrak{m}_2^t \times \ldots \times A/\mathfrak{m}_s^t$$

e) Montrer que, pour $1 \leq i \leq s$, si t est comme ci-dessus, le localisé $A_{\mathfrak{m}_i}$ de A en $\mathfrak{m}_i$ s'identifie à $A/\mathfrak{m}_i^t$.