# Université Paris Sud — Année 2008-2009

# M1 — Arithmétique

# TD n$^\circ$ II

**Exercice A**

**Soient $A$ un anneau et**

$$\begin{array}{ccccc} P_1 & \xrightarrow{u_1} & Q_1 & \xrightarrow{v_1} & R_1 \\ f\downarrow & & \downarrow g & & \downarrow h \\ P_2 & \xrightarrow{u_2} & Q_2 & \xrightarrow{v_2} & R_2 \end{array}$$

**un diagramme commutatif de $A$-modules dont les lignes sont exacte c'est-à-dire que**

$$\operatorname{Ker} v_i \;=\; \operatorname{Im} u_i \;{,}_{i\,=\,1 \text{ ou } 2}\;.$$

**1 .a)** Montrer que si $u_2$ est injectif, il existe des morphismes de $A$-modules

$$\tilde{u}_1 \;:\; \operatorname{Ker} f \;\to\; \operatorname{Ker} g \text{ et } \tilde{v}_1 \;:\; \operatorname{Ker} g \;\to\; \operatorname{Ker} h$$

tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \operatorname{Ker} f & \xrightarrow{\tilde{u}_1} & \operatorname{Ker} g & \xrightarrow{\tilde{v}_1} & \operatorname{Ker} h \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ P_1 & \xrightarrow{u_1} & Q_1 & \xrightarrow{v_1} & R_1 \end{array}$$

soit commutatif à lignes exactes.

Montrer de plus que si $u_1$ est injectif, $\tilde{u}_1$ l'est aussi.

**b)** Montrer que si $v_1$ est surjectif, il existe des morphismes de $A$-modules

$$\tilde{u}_2 \;:\; \operatorname{Coker} f \;\to\; \operatorname{Coker} g \text{ et } \tilde{v}_2 \;:\; \operatorname{Coker} g \;\to\; \operatorname{Coker} h$$

tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} P_2 & \xrightarrow{u_2} & Q_2 & \xrightarrow{v_2} & R_2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \operatorname{Coker} f & \xrightarrow{\tilde{u}_2} & \operatorname{Coker} g & \xrightarrow{\tilde{v}_2} & \operatorname{Coker} h \end{array}$$

soit commutatif à lignes exactes.

Montrer de plus que si $v_2$ est surjectif, $\tilde{v}_2$ l'est aussi.

**2) On suppose que $u_2$ est injectif et $v_1$ surjectif.**

**a)** Montrer qu'il existe un unique morphisme $\delta : \operatorname{Ker} h \to \operatorname{Coker} f$ tel que

$$\tilde{u}_2 \circ \delta \circ \tilde{v}_1 = \big(Q_2 \to \operatorname{Coker} g\big) \circ g \circ \big(\operatorname{Ker} g \to Q_1\big) .$$

**b)** Montrer que la suite

$$\operatorname{Ker} f \xrightarrow{\tilde{u}_1} \operatorname{Ker} g \xrightarrow{vt_1} \operatorname{Ker} h \xrightarrow{\delta} \operatorname{Coker} f \xrightarrow{\tilde{u}_2} \operatorname{Coker} g \xrightarrow{\tilde{v}_2} \operatorname{Coker} h$$

est exacte.

**3) Soit le diagramme commutatif à lignes exactes :**

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to & P_1 & \to & Q_1 & \to & R_1 & \to 0 \\ & {\scriptstyle f}\downarrow & & {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} & \\ 0 \to & P_2 & \to & Q_2 & \to & R_2 & \to 0 . \end{array}$$

**a)** Montrer que si $g$ est injectif, $f$ l'est aussi.

**b)** Dualement montrer que si $g$ est surjectif, $h$ l'est aussi.

**c)** Montrer que si

$$R \subset Q \subset P$$

sont des $A$-modules, on a un morphisme surjectif naturel

$$P/R \to P/Q$$

dont le noyau s'identifie à $Q/R$ ou en d'autres termes que $P/Q$ s'identifie à $(P/R)/(Q/R)$.

**Exercice B**

**1) Soient $A$ un anneau.**
**a)** Rappeler la propriété universelle de l'anneaux $A[X]$ des polynômes à une indéterminée sur $A$.

**Soit $B$ une $A$-algèbre.**
**b)** Construire des morphismes de $B$-algèbres

$$\phi : B[X] \to B \otimes_A A[X] \text{ et } \psi : B \otimes_A A[X] \to B[X]$$

inverse l'un de l'autre.

**2) Soient $E$ un corps, $P_1, P_2 \in E[X]$ des polynômes à coefficients dans $E$, $d_1$ le degré de $P_1$, $d_2$ celui de $P_2$ et $r$ celui de leur pgcd.**
Montrer que les anneaux $A_1 = E[X]/(P_1)$, $A_2 = E[X]/P_2$ et $A_3 = A_1 \otimes_{E[X]} A_2$ sont des $E$-espaces vectoriels de dimension finie et calculer leurs dimensions.

**Exercice C**

**Soit $K$ un corps.**

**1)** Soient $L$ une extension finie séparable de $K$ et $E$ un corps contenant $K$. Montrer que l'on peut construire un isomorphisme d'anneaux

$$E \otimes_K L \cong E_1 \times \ldots \times E_d$$

où les $E_{i\ ,1\leq i\leq d}$ sont des extensions finies séparables de $E$. **Indication** *Montrer que si $P$ est le polynôme minimal d'un générateur de l'extension $L/K$, alors $E \otimes_K L \simeq E[X]/P$.*

**2)** On suppose $K$ non parfait de caractéristique $p$ et on choisit $a \in K$ qui n'est pas une puissance $p$-ième dans $K$. On pose $L = K[X]/(X^p - a)$. Montrer que $L$ est un corps. Montrer que l'anneau $L \otimes_K L$ n'est pas intègre et construire un isomorphisme d'anneaux $L[Y]/(Y^p) \cong L \otimes_K L$.