Géométrie

P. Lorenzon

Janvier 2001

Université Paris Sud **Année 2000–2001**

L3 **Géométrie**

Responsable Pierre Lorenzon
Bureau 2I3
IMO Bat. 307 91405 Orsay cedex
Tel. : +33 1 69 15 60 26
Courriel : lorenzon@math.u-psud.fr
http://www.math.u-psud.fr/∼lorenzon

Pour une impression papier de ce texte, adressez-vous au secrétariat du L3. Cependant il n'est pas exclu que des modifications qui seront sans doute mineures soient apportées à cette version électronique. À ce propos, toute suggestion, est la bienvenue. Signalez-moi toute erreur.

I . –Espaces affines

I.1 . –Généralités

Dans cette section, K désigne un corps que l'on pourra supposer être $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ sauf mention exceptionelle du contraire.

Définition I.1.1 Un K-*espace affine* est un triplet $(E, \phi, \overrightarrow{E})$ simplement noté E si aucune confusion ne peut en résulter, où :

1. E est un ensemble non vide dont les éléments sont appelés *points*.
2. $\overrightarrow{E}$ est un K-espace vectoriel appelé *espace vectoriel sous-jacent* ou *direction vectorielle*. Les éléments $\overrightarrow{v}$ de $\overrightarrow{E}$ sont usuelle ment appelés *vecteurs*.
3. $\phi : E \times E \to \overrightarrow{E}$ est une application vérifiant :

   [i] pour tout triplet (A, B, C) d' éléments de E,

$$\phi((A, B)) + \phi((B, C)) \ = \ \phi((A, C)) \ ,$$

   (relation de *Chasles* ;)

   [ii] pour tout point $O \in E$ l'application $\phi_O : E \to \overrightarrow{E}$ définie par $\phi_O(A) := \phi((O, A))$ est bijective. On notera $\overrightarrow{AB} := \phi((A, B))$ pour tout couple de points (A, B) d' éléments de E.
4. On appelle *dimension de l'espace affine* E la dimension de l'espace vectoriel sous-jacent.

Exemple I.1.2 a) Le groupe abélien $P := (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +)$ (resp. $E := (\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, +)$) muni de l'application

$$\begin{aligned} \phi : P \times P &\to (\mathbb{R}^2, +, \cdot) \\ ((x, y), (x', y')) &\mapsto \begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

(resp.

$$\begin{aligned} \phi : E \times E &\to (\mathbb{R}^3, +, \cdot) \\ ((x, y, z), (x', y', z')) &\mapsto \begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \\ z' - z \end{pmatrix}) \end{aligned}$$

est un $\mathbb{R}$-espace affine d'espace vectoriel sous-jacent $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ (resp. $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$) et de dimension 2 (resp. 3) appelé *plan affine* (resp *espace affine de dimension* 3.)

b) Soient (f, a, b) un triplet de fonctions C_∞ de la variable réelle à valeurs réelles $\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{E}_f$) l'ensemble des fonctions y C_∞ de la variable réelle à valeurs réelles, vérifiant

$$ay' + by \; = \; 0$$

(resp.

$$ay' + by \; = \; f.)$$

Alors $\mathcal{E}_f$ est soit vide soit un $\mathbb{R}$-espace affine d'espace vectoriel sous-jacent $\mathcal{E}$. L'application $\phi : \mathcal{E}_f \times \mathcal{E}_f \to \mathcal{E}$ est donnée par la différence usuelle entre deux fonctions C_∞.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $c \in S_n$ un cycle de longueur p avec p premier. Si on note $\mathcal{S}$ le support du cycle c, on définit l'application $\phi : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ de la manière suivante : Pour tout couple (a, b) d' éléments de $\mathcal{S}$, il existe $\lambda \in \mathbb{Z}$ tel que $b = c^\lambda(a)$. on posera

$$\phi((a, b)) = \overline{\lambda}$$

(où $\overline{\lambda}$ est la classe de λ modulo p.) Le triplet $(\mathcal{S}, \phi, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ est alors un $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-espace affine de dimension 1.

I.1.3 . −Exemple fondamental

À tout K-espace vectoriel V on associe canoniquement l'espace affine (V, ϕ, V) d'espace vectoriel sous-jacent égale à V lui-même où ϕ est définie par $\phi((x, y)) = y - x$ pour tout couple (x, y) d' éléments de V On dit que V est alors muni de *sa structure affine canonique.*

Notons que les exemples I.1.2a peuvent être interprétés comme $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ respectivement $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ muni de leur structure affine canonique respective.

Proposition I.1.4 *Dans la définition I.1.1, le point (3,ii) est équivalent à :*
ii' *Il existe un point $O \in E$, tel que l'application*

$$\begin{array}{rcl} \phi_O : E & \to & \overrightarrow{E} \\ A & \mapsto & \phi((O, A)) \end{array}$$

est bijective.

Plus précisément les deux assertions (i) et (ii) de la définition I.1.13 sont équivalentes aux assertions (i) et (ii').

Preuve : Il est clair que (i) et (ii) impliquent (i) et (ii').

Réciproquement supposons donné un point $O \in E$, tel que : ϕ_O est bijective.

Pour tout $A \in E$, et tout $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{E}$, on a les équivalences suivantes :

$$\phi_A(B) = \overrightarrow{v} \;\sim\; \phi_O(A) + \phi_A(B) = \phi_O(A) + \overrightarrow{v} \;;$$

car $\overrightarrow{E}$ est un groupe. Ce qui est encore équivalent à :

$$\phi((O,A)) + \phi((A,B)) = \phi_O(A) + \overrightarrow{v} \ \sim \ \phi((O,B)) = \phi_O(A) + \overrightarrow{v} \ ;$$

en utilisant la propriété (i) (relation de Chasles.) Cette dernière égalité équivaut à :

$$\phi_O(B) = \phi_O(A) + \overrightarrow{v} \ \sim \ B = \phi_O^{-1}(\phi_O(A) + \overrightarrow{v}) \ ;$$

par bijectivité de ϕ_O.

Autrement dit, pour tout $A \in E$ et tout $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{E}$, il existe un unique $B \in E$, $B = \phi_O^{-1}(\phi_O(A) + \overrightarrow{v})$ tel que $\phi_A(B) = \overrightarrow{v}$; pour tout $A \in E$, ϕ_A est *bijective.*

I.1.1 . –Vectorialisation d'un espace affine

Étant donné un espace affine $(E, \phi, \overrightarrow{E})$, en fixant un point privilégié $O \in E$, on dit *choisir une origine*, on dispose, d'après I.1.13,ii d'un isomorphisme $\phi_O : E \to \overrightarrow{E}$. Tout point $A \in E$ est donc l'image réciproque par ϕ_O d'un vecteur $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{E}$. On adoptera la notation

$$A \ = \ O + \overrightarrow{v} \ ;$$

en remarquant que le symbole $+$ ne correspond ni à une quelconque loi interne sur E, ni à l'addition dans le groupe abélien $\overrightarrow{E}$; mais à une loi externe :

$$\begin{array}{rcl} + : E \times \overrightarrow{E} & \to & E \\ (A, \overrightarrow{v} & \mapsto & A + \overrightarrow{v} := \phi_A^{-1}(\overrightarrow{v}) \ . \end{array} \qquad \text{I.1.2}$$

Néanmoins la loi $+$ définie ci-dessus satisfait les propriétés suivantes :
I.2.2, I.2.4.2.

Dire que ϕ_O est un isomorphisme0 pour $O \in E$ revient exactement à dire que :

$$E \ = \ O + \overrightarrow{u}, \ \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E}\}.$$

Remarquons enfin que l'opération de *vectorialisation d'un espace affine* définie ici, c'est-à-dire la donnée d'un isomorphisme0 de E dans un espace vectoriel n'est pas canonique contrairement à l'opération définie en I.1.3 ; mais demande de choisir une origine.

I.1.3 . –Propriétés des espaces affines

Soit $(E, \phi, \overrightarrow{E})$ un K-espace affine.

i) Pour tout $A \in E$,

$$\overrightarrow{AA} \ = \ \mathrm{Vect}\{0\} \ := \ 0_{\overrightarrow{E}}.$$

ii) Pour tout couple (A, B) d' éléments de E,

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}.$$

iii) Pour tout quadruplet (A, B, C, D) d' éléments de E,

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$

équivaut à

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}.$$

Si l'une de ces propriétés est vérifiée et $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ (par exemple sont indépendants) on dit que $ABDC$ est un *parallélogramme*.

iv) La relation binaire $\sim$ définie sur $E \times E$ par :

$$(A, B) \sim (A', B') \Leftrightarrow \phi((A, B)) = \phi((A', B'))$$

est une relation d'équivalence sur $E \times E$ appelée *relation d'équipollence entre bipoints.*

L'application ϕ induit une bijection $(E \times E)/ \sim \to \overrightarrow{E}$.

Proposition I.1.4 *Étant donné un K-espace affine $(E, \phi, \overrightarrow{E})$ et S un ensemble fini de points de E, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

i Pour tout point $O \in S$ l'ensemble

$$\{\phi((O, A)),\ A \in S - \{O\}\} \subset \overrightarrow{E}$$

est un système libre de vecteurs de $\overrightarrow{E}$.

ii Il existe un point $O \in S$, tel que l'ensemble :

$$\{\phi((O, A)),\ A \in S - \{O\}\} \subset \overrightarrow{E}$$

est un système libre de vecteurs de $\overrightarrow{E}$.

Preuve : L'implication $i \to ii$ étant immédiate, la réciproque seul demande une preuve.

Soit donc donné un point $O \in S$, tel que l'ensemble des $\phi((O, A))$ $A \neq O$ $A \in S$, soit un système libre de vecteurs de $\overrightarrow{E}$. Pour tout $\Omega \in S$, considérons l'égalité :

$$(*) : \sum_{A \in S,\ A \neq \Omega} \lambda_A \phi((\Omega, A)) = 0 ,$$

(où $\lambda_A \in K$ pour $A \in S$.) L'égalité $(*)$ équivaut grâce à la relation de Chasles (cf. I.1.13,i) à :

$$\begin{array}{rcl} \sum_{A\in S,\ A\neq\Omega} \lambda_A(\phi((\Omega,O)) + \phi((O,A)) & = & 0 \\ & \sim & \\ (\sum_{A\in S,\ A\neq\Omega} \lambda_A)\phi((\Omega,O)) + \sum_{A\in S,\ A\neq\Omega,\ A\neq O} \lambda_A\phi((O,A)) & = & 0. \end{array}$$

Cette dernière égalité équivaut, en utilisant I.1.3.ii), à :

$$\sum_{A\in S,\ A\neq\Omega,\ A\neq O} \lambda_A\phi((O,A)) - (\sum_{A\in S,\ A\neq\Omega} \lambda_A)\phi((O,\Omega)) = 0.$$

Ceci implique, en utilisant l'hypothèse, que pour tout $A \neq O$ et $A \neq \Omega$, $\lambda_A = 0$ et $\sum_{A\in S,\ A\neq\Omega} \lambda_A = 0$. On tire de ces égalités que $\lambda_O = 0$. Il s'ensuit que pour tout $A \in S$, $A \neq \Omega$, $\lambda_A = 0$; c'est-à-dire que l'ensemble des $\phi((\Omega, A))$ pour $A \in S - \{\Omega\}$ forme un système libre de $\overrightarrow{E}$.

Définition I.1.1 Étant donné un K-espace affine $(E, \phi, \overrightarrow{E})$, et S un ensemble fini de points de E, on dit que les points de S sont *affinement indépendants* si l'une des deux propriétés (i) ou (ii) de la proposition I.1.4 est satisfaite.

I.1.2 . –Exercices

Exercice I.1.2.1 Montrer que si $(E, \phi, \overrightarrow{E})$ est un K-espace affine l'application naturelle $(E \times E)/ \sim \to \overrightarrow{E}$ (cf. I.1.3.iv)i)nduite par ϕ est bijective.

Exercice I.1.2.2 Étant donné un K-espace affine de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, quel est le cardinal maximal d'un ensemble de points affinement indépendants (cf. I.1.1) ?

I.2 . $-$Homothéties-translations

On considérera dans tout ce paragraphe un K-espace affine $(E, \phi, \overrightarrow{E})$ où K sera le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Notons que cette restriction sur le corps n'est en fait pas nécessaire ; et que les définitions et résultats donnés ici peuvent être étendus à n'importe quel corps à l'exception peut-être, dans des cas très particuliers, du corps fini $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Définition I.2.1 Pour tout vecteur $v \in \overrightarrow{E}$, la loi externe définie en I.1.2 permet d'associer à un point $A \in E$ un point

$$B \; = \; T_{\overrightarrow{v}}(A) \; := \; \phi_A^{-1}(\overrightarrow{v}) \; = \; A + \overrightarrow{v} \; .$$

On définit ainsi une application

$$\begin{array}{rcl} T_{\overrightarrow{v}} : E & \to & E \\ A & \mapsto & A + \overrightarrow{v}, \end{array}$$

appelée *translation de vecteur $\overrightarrow{v}$.*

Proposition I.2.2 *i L'ensemble des translations de E muni de la loi de composition des applications $\circ$, est un groupe abélien noté $\mathcal{T}(\mathcal{E})$.*

ii L'application $\tau : (\overrightarrow{E}, +) \to (\mathcal{T}(\mathcal{E}), \circ)$ définie par $\overrightarrow{v} \mapsto T_{\overrightarrow{v}}$ est un isomorphisme0 de groupes abéliens.

Preuve :

i Il faut ici impérativement vérifier le premier axiome des groupes *i.e.* que la loi de composition $\circ$ est interne sur $\mathcal{T}(\mathcal{E})$; car cela n'est pas tout à fait immédiat.

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ des vecteurs de $\overrightarrow{E}$. Pour tout point $A \in E$,

$$\begin{array}{rcl} T_{\overrightarrow{u}} \circ T_{\overrightarrow{v}}(A) & = & T_{\overrightarrow{u}}(T_{\overrightarrow{v}}(a)) \\ & = & T_{\overrightarrow{v}}(A) + \overrightarrow{u} \\ & = & (A + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{u} \; . \end{array}$$

On introduit les notations suivantes qui seront commodes : B est l'unique point de E défini par

$$B \; := \; A + \overrightarrow{v} \; = \; \phi_A^{-1}(\overrightarrow{v}) \; ;$$

et C est l'unique point de e défini par

$$C \; := \; B + \overrightarrow{u} \; = \; \phi_B^{-1}(\overrightarrow{u})$$

(cf. I.1.1)3.ii.
Il s'ensuit que

$$T_{\overrightarrow{u}} \circ T_{\overrightarrow{v}}(A) \;=\; C.$$

Par définition même des points B et C, ceux-ci sont caractérisés par le fait :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{v} \\ \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{u}\ ; \end{aligned}$$

En écrivant la relation de Chasles (cf. I.1.1)3,i,

$$\begin{array}{ccc} \overrightarrow{AC} & = & \overrightarrow{AB} +_{\overrightarrow{E}} \overrightarrow{BC} \\ & \sim & \\ \overrightarrow{AC} & = & \overrightarrow{v} +_{\overrightarrow{E}} \overrightarrow{u} \\ & \underset{\text{(cf. I.1.1)3},ii}{\sim} & \\ C & = & \phi_A^{-1}(\overrightarrow{v} +_{\overrightarrow{E}} \overrightarrow{u}) \\ & \sim & \\ C & = & A + (\overrightarrow{v} +_{\overrightarrow{E}} \overrightarrow{u}) \\ & \sim & \\ C & = & T_{\overrightarrow{v+u}}(A)\ . \end{array}$$

C'est-à-dire

$$T_{\overrightarrow{u}} \circ T_{\overrightarrow{v}} \;=\; transu + v. \qquad \text{I.2.1}$$

Ceci prouve que la loi $\circ$ est *interne* sur $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ ainsi d'ailleurs que sa *commutativité* à cause de la commutativité de $+_{\overrightarrow{E}}$. Le résultat I.2.1 nous sera également utile dans la preuve du point (ii) de la proposition.
En confrontant par ailleurs les diverses écritures possibles pour le point C on obtient la propriété suivante de la loi de composition externe $+$ qui, quoi que fortement suggérée par l'écriture adoptée, n'était pas encore prouvée :

$$\begin{aligned} A + (\overrightarrow{u} +_{\overrightarrow{E}} \overrightarrow{v}) &= C \\ &= B + \overrightarrow{u} \\ &= (A + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{u}\ . \end{aligned} \qquad \text{I.2.2}$$

Notons que les résultats I.2.1 et I.2.2 sont en fait deux écritures différentes d'une même propriétés découlant de la relation de Chasles (cf. I.1.13,i).

L'associativité de la loi $\circ$ découle de l'associativité de $\circ$ dans le monoïde des applications de E dans lui-même.
On vérifie sans peine que pour tout A dans E, $T_{\overrightarrow{0}}(A) = A$ c'est-à-dire $T_{\overrightarrow{0}} = \mathrm{Id}_E$ qui est un *élément neutre pour la composition.*
Enfin l'identité I.2.1 montre que pour tout $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E}$,

$$\begin{array}{rcl} T_{\overrightarrow{u}} \circ T_{\overrightarrow{-u}} & = & T_{\overrightarrow{u-u}} \\ & = & T_{\overrightarrow{0}} \\ & = & \mathrm{Id}_E \ ; \end{array}$$

c'est-à-dire que $T_{\overrightarrow{-u}}$ est un *opposé* pour $T_{\overrightarrow{u}}$.
On a ainsi prouvé que $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ est un *groupe abélien.*

ii L'identité I.2.1 suffit à prouver que l'application :

$$\begin{array}{rcl} \tau : (\overrightarrow{E}, +) & \to & (\mathcal{T}(\mathcal{E}), \circ) \\ \overrightarrow{v} & \mapsto & T_{\overrightarrow{v}} \end{array}$$

est un morphisme0 de groupes abéliens.
La *surjectivité* de τ résulte de sa définition même.
Soit donc $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E}$ tel que $T_{\overrightarrow{u}} = \mathrm{Id}_E$. C'est-à-dire pour tout $A \in E$,

$$\begin{array}{rcl} T_{\overrightarrow{u}}(A) & = & A + \overrightarrow{u} \\ & = & A \, . \end{array}$$

Ce qui équivaut à dire, par injectivité de ϕ (cf. I.1.13,ii) et grâce à la propriété I.1.3.i) que pour tout $A \in E$, $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AA}$ ou encore d'après I.1.3.i),

$$\overrightarrow{u} \ = \ \mathrm{Vect}\{0\} \ = \ 0_{\overrightarrow{E}}.$$

Ce qui prouve que τ est un morphisme0 *injectif;* et donc finalement un *isomorphisme0.*

Définition I.2.3 Étant donné un point $\Omega \in E$ et $k \in K,^*$ on appellera *homothétie de centre* Ω *et de rapport* k l'application :

$$\begin{array}{rcl} H_{\Omega,k} : E & \to & E \\ A & \mapsto & \Omega + k\overrightarrow{\Omega A} = \phi_\Omega^{-1}(k\overrightarrow{\Omega A}) \, . \end{array}$$

I.2.4. – Étant données deux homothéties H_{Ω_1,k_1} et H_{Ω_2,k_2}, on cherche à déterminer la composée $H_{\Omega_1,k_1} \circ H_{\Omega_2,k_2}$. Cherchons tout d'abord à savoir si cette application possède *un point fixe ;* c'est-à-dire s'il existe un point $\Omega \in E$ tel que :

$$\begin{array}{rcl} H_{\Omega_1,k_1} \circ H_{\Omega_2,k_2}(\Omega) & = & \Omega \\ & \sim & \\ \Omega_1 + k_1\overrightarrow{\Omega_1 H_{\Omega_2,k_2}(\Omega)} & = & \Omega \\ & \sim & \\ \Omega_1 + k_1\overrightarrow{\Omega_1(\Omega_2 + k_2\overrightarrow{\Omega_2\Omega})} & = & \Omega \end{array} \qquad \text{I.2.4.1}$$

À ce stade on va montrer une nouvelle propriété de la loi externe $+$: Soient en effet, deux point A et B de E et $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E}$. On introduit le point $C := \phi_B^{-1}(\overrightarrow{u}) = B + \overrightarrow{u}$. Il vient alors :

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{A(B+\overrightarrow{u})} & = & \overrightarrow{AC} \\ & = & \overrightarrow{AB} +_{\overrightarrow{E}} \overrightarrow{BC} \\ & = & \overrightarrow{AB} +_{\overrightarrow{E}} \overrightarrow{u}\ . \end{array} \qquad \text{I.2.4.2}$$

Cette dernière propriété permet de réécrire l'identité I.2.4.1 de la manière suivante :

$$\begin{array}{rcl} \Omega_1 + k_1(\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2} +_{\overrightarrow{E}} k_2\overrightarrow{\Omega_2\Omega}) & = & \Omega \\ & \underset{(\text{cf. I.1.13,ii})}{\sim} & \\ \overrightarrow{\Omega_1[\Omega_1 + k_1(\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2} +_{\overrightarrow{E}} k_2\overrightarrow{\Omega_2\Omega})]} & = & \overrightarrow{\Omega_1\Omega} \\ & \underset{(\text{cf. I.2.4.2})}{\sim} & \\ k_1\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2} +_{\overrightarrow{E}} k_1k_2\overrightarrow{\Omega_2\Omega} & = & \overrightarrow{\Omega_1\Omega} \\ & \sim & \\ k_1\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2} -_{\overrightarrow{E}} k_1k_2\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2} +_{\overrightarrow{E}} k_1k_2\overrightarrow{\Omega_1\Omega} & = & \overrightarrow{\Omega_1\Omega} \\ & \sim & \\ (1-k_1k_2)\overrightarrow{\Omega_1\Omega} & = & k_1(1-k_2)\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2}\ . \end{array} \qquad \text{I.2.4.3}$$

y Ici deux cas se présentent selon que $1 - k_1k_2$ est nul ou non.

i Supposons d'abord que $1 - k_1k_2 \neq 0_K$. L'identité I.2.4.3 s'écrit alors :

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{\Omega_1\Omega} & = & \frac{k_1(1-k_2)}{1-k_1k_2}\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2} \\ & \sim & \\ \Omega & = & \Omega_1 + \frac{k_1(1-k_2)}{1-k_1k_2}\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2}\ ; \end{array} \qquad \text{I.2.4.4}$$

ce qui détermine un unique point Ω fixe pour la composée $H_{\Omega_1,k_1} \circ H_{\Omega_2,k_2}$.

Pour tout point $A \in E$, on a :

$$H_{\Omega_1,k_1}(H_{\Omega_2,k_2}(A) = \Omega_1 + k_1\overrightarrow{\Omega_1(\Omega_2 + k_2\overrightarrow{\Omega_2A})}$$

$$
\begin{aligned}
&= && \Omega_1 + \\
& && (k_1\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2} +_{\vec{E}} k_1k_2\overrightarrow{\Omega_2 A}) \\
&= && \Omega_1 + \\
& && [k_1\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2} +_{\vec{E}} k_1k_2(\overrightarrow{\Omega A} \\
& && +_{\vec{E}}\overrightarrow{\Omega_1\Omega} -_{\vec{E}} \overrightarrow{\Omega_1\Omega_2})] \\
&= && \Omega_1 + \\
& && [k_1(1-k_2)\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2} +_{\vec{E}} (k_1k_2-1)\overrightarrow{\Omega_1\Omega} \\
& && +_{\vec{E}}\overrightarrow{\Omega_1\Omega} +_{\vec{E}} k_1k_2\overrightarrow{\Omega A}] \\
&= && (\Omega_1 + \overrightarrow{\Omega_1\Omega}) \\
& && +[k_1(1-k_2)\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2} +_{\vec{E}} (k_1k_2-1)\overrightarrow{\Omega_1\Omega} \\
& && +_{\vec{E}}k_1k_2\overrightarrow{\Omega A}] \\
&= && \Omega + \\
& && [k_1(1-k_2)\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2} +_{\vec{E}} (k_1k_2-1)\overrightarrow{\Omega_1\Omega} \\
& && +_{\vec{E}}k_1k_2\overrightarrow{\Omega A}] \\
&\underset{\text{(cf. I.2.4.4)}}{=} && \Omega + k_1k_2\overrightarrow{\Omega A}\ .
\end{aligned}
$$

Cette détermination de l'image d'un point A quelconque de E, prouve que la composée $H_{\Omega_1,k_1} \circ H_{\Omega_2,k_2}$ est l*homothétie* H_{Ω,k_1k_2} de centre Ω défini par I.2.4.4 et de rapport k_1k_2 dans le cas où $k_1k_2 \neq 1$.

ii Envisageons maintenant le cas où $k_1k_2 = 1$. Une discussion se présente encore selon que le second membre de l'équation I.2.4.3est nul ou non.

[-] Supposons d'abord que ce second membre n'est pas nul. Il s'ensuit que l'équation I.2.4.3 n'a pas de solution ; c'est-à-dire que la composée $H_{\Omega_1,k_1} \circ H_{\Omega_2,k_2}$ n'a pas de point fixe. Pour tout point $A \in E$, on a :

$$
\begin{aligned}
H_{\Omega_1,k_1}(H_{\Omega_2,k_2}(A)) &= \Omega_1 + \\
& \quad [k_1\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2} +_{\vec{E}} k_1k_2(\overrightarrow{\Omega_1 A} \\
-_{\vec{E}}\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2})] & \\
&= \Omega_1 + \\
& \quad [k_1(1-k_2)\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2} +_{\vec{E}} (k_1k_2-1)\overrightarrow{\Omega_1 A} \\
& \quad +_{\vec{E}}\overrightarrow{\Omega_1 A}] \\
&= (\Omega_1 + \overrightarrow{\Omega_1 A}) \\
& \quad +[k_1(1-k_2)\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2}] \\
&= A + k_1(1-k_2)\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2}\ .
\end{aligned}
$$

Ceci caractérise une translation de vecteur $k_1(1-k_2)\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2} = (k_1-1)\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2}$; lequel n'est pas nul ; car la non nullité du second membre de I.2.4.3empêche que $k_1 - 1$ soit nul ainsi d'ailleurs que $\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2}$.

[-] Supposons enfin que le second membre de I.2.4.3 soit nul, alors tout point $\Omega \in E$ est solution de l'équation I.2.4.4 ; c'est-à-dire que tout point de l'espace E est un point fixe pour la composée $H_{\Omega_1,k_1} \circ H_{\Omega_2,k_2}$ autrement dit que cette dernière est l'identité de E.

On remarque enfin que pour tout point $\Omega \in E$,

$$H_{\Omega,1} \;=\; \mathrm{Id}_E \;; \qquad \text{I.2.4.5}$$

et que pour tout $k \neq 0$,

$$H_{\Omega,k} \circ H_{\Omega,\frac{1}{k}} \;=\; H_{\Omega,1} \;=\; \mathrm{Id}_E \;. \qquad \text{I.2.4.6}$$

I.2.5. — Il ressort de la section I.2.4 que la composée de deux homothéties n'est pas nécessairement une *homothétie* ; mais peut être également une *translation.*

Un ensemble contenant à la fois les homothéties et les translations aurait semble-t-il, de bonne chance d'être stable par composition ; si toute fois on y ajoutait les éléments du type $H_{\Omega,k} \circ T_{\overrightarrow{u}}$ et ceux du type $T_{\overrightarrow{u}} \circ H_{\Omega,k}$. Nous allons tenter de préciser cette construction.

On pourrait évidemment considérer le groupe engendré par les homothéties et les translations de manière brutale ; mais on aimerait pouvoir écrire un élément de ce groupe d'une manière un peu plus lisible que

$$H_1 \circ T_1 \circ T_2 \circ \ldots \circ H_n \circ T_n \ldots$$

Pour cela remarquons :
Soit $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E}$ $\Omega \in E$ et $k \in K^*$. Pour tout point $A \in E$,

$$\begin{array}{rcl}
H_{\Omega,k}(T_{\overrightarrow{u}}(A)) & = & \Omega + k\overrightarrow{\Omega T_{\overrightarrow{u}}(A)} \\
 & = & \Omega + k\overrightarrow{\Omega(A+\overrightarrow{u})} \\
 & \overset{=}{\text{(cf. I.2.4.2)}} & \Omega + (k\overrightarrow{\Omega A} +_{\overrightarrow{E}} k\overrightarrow{u}) \\
 & \overset{=}{\text{(cf. I.2.2)}} & (\Omega + k\overrightarrow{\Omega A}) + k\overrightarrow{u} \\
 & = & T_{\overrightarrow{ku}}(H_{\Omega,k}(A)) \;.
\end{array}$$

Il s'ensuit donc que pour tout point Ω, tout vecteur $\overrightarrow{u}$ et tout scalaire k,

$$H_{\Omega,k} \circ T_{\overrightarrow{u}} \;=\; T_{\overrightarrow{ku}} \circ H_{\Omega,k} \;. \qquad \text{I.2.6}$$

Considérons, par ailleurs, l'équation d'inconnue $I \in E$:

$$\begin{array}{ccc} I & = & T_{\overrightarrow{u}}(H_{\Omega,k}(I)) \\ & \sim & \\ I & = & (\Omega + k\overrightarrow{\Omega I}) + \overrightarrow{u} \\ & \underset{(\text{cf. I.1.13,ii})}{\sim} & \\ \overrightarrow{\Omega I} & = & k\overrightarrow{\Omega I} +_{\overrightarrow{E}} \overrightarrow{u} \\ & \sim & \\ (1-k)\overrightarrow{\Omega I} & = & \overrightarrow{u}\ . \end{array} \qquad \text{I.2.7}$$

- Si $1-k=0$,$et \overrightarrow{u} \neq 0$, l'équation I.2.7 n'a pas de solution. Dans ce cas $T_{\overrightarrow{u}} \circ H_{\Omega,k} = T_{\overrightarrow{u}}$ (cf. I.2.4.5.)
- Si $k-1=0$ et $\overrightarrow{u}=0$, alors $transu \circ H_{\Omega,k} = \mathrm{Id}_E$.
- Enfin si $k-1 \neq 0$, l'équation I.2.7 définit un unique point $I \in E$: caractérisé par :

$$I \ = \ \Omega + \frac{1}{k-1}\overrightarrow{u}\ . \qquad \text{I.2.8}$$

Pour tout point $A \in E$,

$$\begin{array}{rcl} T_{\overrightarrow{u}}(H_{\Omega,k}(A)) & = & (\Omega + k\overrightarrow{\Omega A}) + \overrightarrow{u} \\ & = & [\Omega + (k\overrightarrow{\Omega I} +_{\overrightarrow{E}} k\overrightarrow{IA})] \\ & & +\overrightarrow{u} \\ & \underset{(\text{cf. I.2.2})}{=} & \Omega + \\ & & [(k-1)\overrightarrow{\Omega I} +_{\overrightarrow{E}} \overrightarrow{\Omega I} +_{\overrightarrow{E}} k\overrightarrow{IA} \\ & & +_{\overrightarrow{E}} \overrightarrow{u}] \\ & = & (\Omega + \overrightarrow{\Omega I}) \\ & & +[(k-1)\overrightarrow{\Omega I} +_{\overrightarrow{E}} \overrightarrow{u} +_{\overrightarrow{E}} k\overrightarrow{IA}] \\ & = & I + k\overrightarrow{IA}\ . \end{array}$$

Ceci caractérise l'homothétie de centre I défini par I.2.8 et de rapport k.

I.2.9. – On notera $\mathcal{HT}(\mathcal{E})$ la réunion de $T_{\overrightarrow{E}}$ et de l'ensemble des homothéties de E.

Nous avons montré que $T_{\overrightarrow{E}}$ est un groupe ; mais il ressort des paragraphes I.2.4 et I.2.5 que l'ensemble des homothéties n'est pas un groupe.

Cependant les différentes identités établies dans les paragraphes précédents vont nous permettre de montrer que $\mathcal{HT}(\mathcal{E})$ est un groupe.

Plus précisément, ce que nous venons d'établir a les conséquences suivantes :

Proposition I.2.10 *i) L'ensemble*

$$\mathcal{HT}(\mathcal{E}) \text{ muni de la loi de composition} \circ, \text{ est un groupe}$$

qui s'identifie au groupe engendré par les homothéties (cf. I.2.3) et les translations (cf. I.2.1).

ii) Le groupe des translations de E, $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ *est un sous-groupe distingué de* $\mathcal{HT}(\mathcal{E})$.

iii) Le quotient $\mathcal{HT}(\mathcal{E})/\mathcal{T}(\mathcal{E})$ *est canonique ment isomorphe à* $(K^*, *)$.

Preuve :

i) Il est tout d'abord clair que $\mathcal{HT}(\mathcal{E})$ est inclus dans le groupe Γ engendré par les homothéties et les translations.

Réciproquement comme l'inverse d'une translation est une translation (cf. I.2.2) et l'inverse d'une homothétie est une homothétie (cf. I.2.4.6), tout élément $\gamma \in \Gamma$ s'écrit :

$$\gamma = \prod_{i=1}^{n} \eta_i$$

(où $\eta_i \in \mathcal{HT}(\mathcal{E})$ et le produit s'entend au sens de la composition des applications.)

Pour $n = 1$ il est clair que $\gamma \in \mathcal{HT}(\mathcal{E})$. Pour $n > 1$, on a :

$$\gamma \;=\; \prod_{i=1}^{n-1} \eta_i \circ \eta_n.$$

En posant $\gamma_n := \prod_{i=1}^{n-1} \eta_i$ on a $\gamma = \gamma_n \circ \eta_n$. Si l'on suppose que $\gamma_n \in \mathcal{HT}(\mathcal{E})$; c'est-à-dire que γ_n est soit une translation soit une homothétie, comme il en est de même pour η_n les résultats des paragraphes I.2.4 et I.2.5 montrent que γ est soit une homothétie soit une translation.

On en déduit, par récurrence, que $\mathcal{HT}(\mathcal{E})$, s'identifie à Γ en tant qu'ensemble. Comme la loi de composition sur Γ et sur HTE est la même, à savoir la loi $\circ$ de composition des applications ; $\mathcal{HT}(\mathcal{E})$ s'identifie à Γ en tant que groupe ; c'est-à-dire encore, que l'injection canonique $\mathcal{HT}(\mathcal{E}) \hookrightarrow \Gamma$ est un isomorphisme0 de groupes.

ii) Soit $\eta \in \mathcal{HT}(\mathcal{E})$, d'après (i), η est soit une translation soit une homothétie.
[-] Si $\eta = H_{\Omega,k}$ est une homothétie de centre Ω et de rapport k, $\eta^{-1} = H_{\Omega,\frac{1}{k}}$ (cf. I.2.4.6). Alors pour tout $T_{\overrightarrow{u}} \in \mathcal{T}(\mathcal{E})$,

$$\begin{array}{rcl} \eta \circ T_{\overrightarrow{u}} \circ \eta^{-1} & = & H_{\Omega,k} \circ T_{\overrightarrow{u}} \circ H_{\Omega,\frac{1}{k}} \\ & \underset{\text{(cf. I.2.6)}}{=} & T_{\overrightarrow{ku}} \circ H_{\Omega,k} \circ H_{\Omega,\frac{1}{k}} \\ & \underset{\text{(cf. I.2.4.6)}}{=} & T_{\overrightarrow{ku}} \\ & \in & \mathcal{T}(\mathcal{E})\ . \end{array}$$

[-] Si $\eta = T_{\overrightarrow{v}}$ est une translation $\eta^{-1} = T_{\overrightarrow{-v}}$ (cf. I.2.2). Alors pour tout $T_{\overrightarrow{u}} \in \mathcal{T}(\mathcal{E})$,

$$\begin{array}{rcl} \eta \circ T_{\overrightarrow{u}} \circ \eta^{-1} & = & T_{\overrightarrow{v}} \circ T_{\overrightarrow{u}} \circ T_{\overrightarrow{-v}} \\ & \underset{\text{(cf. I.2.1)}}{=} & T_{\overrightarrow{v+u-v}} \\ & = & T_{\overrightarrow{u}} \\ & \in & \mathcal{T}(\mathcal{E})\ . \end{array}$$

Il ressort de ces vérifications que $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ est un *sous-groupe distingué de HTE.*

iii) Définissons l'application $\rho : \mathcal{HT}(\mathcal{E}) \to K^*$ par :
[-] $\rho(\eta) = k$ si η est une homothétie de rapport $k \in K^*$;
[-] $\rho(\eta) = 1$ si η est une translation.
Il ressort de l'étude des composées d'homothéties et de translations menée dans les paragraphes I.2.4 et I.2.5 que ρ est un morphisme0 de groupes, de $\mathcal{HT}(\mathcal{E})$ dans $(K^*, *)$.
Si $\eta \in \mathcal{HT}(\mathcal{E})$ est telle que $\rho(\eta) = 1$ soit η est une translation soit η est une homothétie de rapport 1 c'est-à-dire l'identité de E qui appartient à $\mathcal{T}(\mathcal{E})$. Il s'ensuit que

$$\operatorname{Ker} \rho \ = \ \mathcal{T}(\mathcal{E}).$$

Comme ρ est clairement *surjectif*, il induit un isomorphisme0

$$\mathcal{HT}(\mathcal{E})/\mathcal{T}(\mathcal{E}) \ \cong \ K^*. \qquad 1$$

Définition I.2.4 i) On appellera le groupe $\mathcal{HT}(\mathcal{E})$ *le groupe des homothéties-translations de E*, .

ii) On appellera *homothétie-translation* un élément de $\mathcal{HT}(\mathcal{E})$.

iii) Pour tout $\eta \in HTE$, on appellera *rapport de η* l'image de la classe de η modulo $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ par l' isomorphisme0 I.2.iii).1 ; autrement dit, si η est une translation, le rapport de η est égale à 1, si η est une homothétie le rapport de η est le rapport de l' homothétie.

I.2.5. — Étant donnée une application $\gamma\ :\ E\ \to\ E$, on voudrait pouvoir définir $\overrightarrow{\gamma}(\overrightarrow{u})$ pour tout élément $\overrightarrow{u}\in\overrightarrow{E}$, par :

$$\overrightarrow{\gamma}(\overrightarrow{u})\ :=\ \overrightarrow{\gamma(A)\gamma(B)} \tag{I.2.5.1}$$

pour $\overrightarrow{AB}$ un représentant de $\overrightarrow{u}$ pour la relation d'équipollence I.1.3.iv). Cette définition n'est évidemment possible que si γ est compatible avec la relation d'équipollence (cf. I.1.3.iv)).

La proposition suivante montre qu'on est dans ce cas pour le groupe des homothéties-translations.

Proposition I.2.6 *i Pour tout élément $\eta\in\mathcal{HT}(\mathcal{E})$, la formule I.2.5.1 définit bien une application*

$$\overrightarrow{\eta}:\overrightarrow{E}\to\overrightarrow{E}\ .$$

De plus $\overrightarrow{\eta}$ est une homothétie vectorielle de même rapport que η.

ii Réciproquement, si $\gamma\ :\ E\ \to\ E$ est une application telle que $\overrightarrow{\gamma}$ est bien définie et est une homothétie vectorielle de rapport k alors η est une homothétie-translation.

Preuve :

i Soit $\eta\in\mathcal{HT}(\mathcal{E})$, pour tout $\overrightarrow{u}\in\overrightarrow{E}$, pour tout couple (A,B) de points de E, tel que : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{u}$; (il existe toujours au moins un tel couple d'après I.1.13,i ;)

[-] Si $\eta=T_{\overrightarrow{v}}$ est une translation

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\eta(A)\eta(B)} &= \overrightarrow{(A+\overrightarrow{v})(B+\overrightarrow{v})}\\ &\underset{\text{(cf. I.2.4.2)}}{=} \overrightarrow{(A+\overrightarrow{v})B}+_{\overrightarrow{E}}\overrightarrow{v}\\ &= \overrightarrow{v}-_{\overrightarrow{E}}\overrightarrow{B(A+\overrightarrow{v})}\\ &\underset{\text{(cf. I.2.4.2)}}{=} \overrightarrow{v}-_{\overrightarrow{E}}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{v})\\ &= \overrightarrow{AB}\\ &= \overrightarrow{u}\ .\end{aligned} \tag{I.2.1}$$

[-] Si $\eta=H_{\Omega,k}$ est une homothétie, alors :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\eta(A)\eta(B)} &\underset{\text{(cf. I.2.3)}}{=} \overrightarrow{(\Omega+k\overrightarrow{\Omega A})(\Omega+\overrightarrow{\Omega B})}\\ &\underset{\text{(cf. I.2.4.2)}}{=} \overrightarrow{(\Omega+k\overrightarrow{\Omega A})\Omega}+_{\overrightarrow{e}}k\overrightarrow{\Omega B}\\ &= k\overrightarrow{\Omega B}-_{\overrightarrow{E}}k\overrightarrow{\Omega(\Omega+k\overrightarrow{\Omega A})}\\ &\underset{\text{(cf. I.2.4.2)}}{=} k\overrightarrow{\Omega B}-_{\overrightarrow{E}}k\overrightarrow{\Omega B}\\ &= k\overrightarrow{AB}\\ &= k\overrightarrow{u}\ .\end{aligned} \tag{I.2.2}$$

Le point (i) est donc prouvé par les identité I.2.1 et I.2.2.

ii [-] Supposons que le rapport de $\overrightarrow{\gamma}$ est égal à 1 ; c'est-à-dire que $\overrightarrow{\gamma} = \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}}$. Soit $A \in E$, alors pour tout point $B \in E$,

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{\gamma(A)\gamma(B)} & = & \overrightarrow{AB} \\ & \sim & \\ \overrightarrow{\gamma(A)A} +_{\overrightarrow{E}} \overrightarrow{AB} +_{\overrightarrow{E}} \overrightarrow{B\gamma(B)} & = & \overrightarrow{AB} \\ & \sim & \\ \overrightarrow{B\gamma(B)} & = & \overrightarrow{A\gamma(A)} \\ & \sim & \\ \gamma(B) & = & B + \overrightarrow{A\gamma(A)} \,. \end{array}$$

Ce qui signifie que γ est la translation $T_{\overrightarrow{A\gamma(A)}}$.

[-] Supposons que le rapport de γ est différent de 1. Considérons l'équation en $\Omega \in E$:

$$\Omega \;=\; \gamma(\Omega),$$

qui équivaut, pour tout $A \in E$ à :

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{A\Omega} & = & \overrightarrow{A\gamma(\Omega)} \\ & \sim & \\ \overrightarrow{A\Omega} & = & \overrightarrow{A\gamma(A)} +_{\overrightarrow{E}} \overrightarrow{\gamma(A)\gamma(\Omega)} \\ & \sim & \\ \overrightarrow{A\Omega} & = & \overrightarrow{A\gamma(A)} +_{\overrightarrow{E}} k\overrightarrow{A\Omega} \\ & \sim & \\ (1-k)\overrightarrow{A\Omega} & = & \overrightarrow{A\gamma(A)} \\ & \sim & \\ \Omega & = & A +_{\overrightarrow{e}} \dfrac{1}{1-k}\overrightarrow{A\gamma(A)} \,. \end{array}$$

Ce qui définit un unique point fixe Ω pour γ.
Par ailleurs, pour tout point $A \in E$,

$$\begin{array}{rcl} \gamma(A) & = & \Omega + \overrightarrow{\Omega\gamma(A)} \\ & = & \Omega + \overrightarrow{\gamma(\Omega)\gamma(A)} \\ & = & \Omega + k\overrightarrow{\Omega A} \,. \end{array}$$

Ceci caractérise une homothétie de centre Ω et de rapport k (cf. I.2.3).

Corollaire I.2.3 *Une application $\gamma : E \to E$ est une homothétie-translation si et seulement si il existe $k \in K^*$ tel que pour tout couple (A, B) de points de E,*

$$\overrightarrow{\gamma(A)\gamma(B)} = k\overrightarrow{AB}.$$

Preuve : Ceci découle immédiatement de la proposition I.2.6.

Proposition I.2.1 *i L'application*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{HT}(\mathcal{E}) & \to & \mathrm{GL}(\overrightarrow{E}) \\ \eta & \mapsto & \overrightarrow{\eta} \end{array}$$

est un morphisme0 de groupes dont le noyau est $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ et l'image le sous-groupe de $\mathrm{GL}(\overrightarrow{E})$ des homothéties vectorielles

Il identifie donc canoniquement $\mathcal{HT}(\mathcal{E})/\mathcal{T}(\mathcal{E})$ au groupe des homothéties vectorielles.

ii Le rapport de l'homothétie-translation η défini en I.2.4iii coïncide avec le rapport de l' homothétie vectorielle $\overrightarrow{\eta}$.

Proposition I.2.2 *Étant donnée une homothétie-translation $\eta \in \mathcal{HT}(\mathcal{E})$, et $\Omega \in E$ une origine (cf. I.1.1) :*

i Pour tout point $A \in E$,

$$\eta(A) = \eta(\Omega) + \overrightarrow{\eta}(\overrightarrow{\Omega A}) .$$

ii Pour tout vecteur $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E}$,

$$\eta(\Omega + \overrightarrow{u}) = \eta(\Omega) + \mathrm{Vect}\{\eta\}(\overrightarrow{u}) .$$

I.2.3 . −Exercices

Exercice I.2.3.1 Donner une preuve des propositions non démontrées de la section I.2.

Exercice I.2.3.2 Dans le dernier point du paragraphe (ii) de la section I.2.4 on cherchera à déterminer les configurations relatives des éléments (centre rapport), des deux homothéties H_{Ω_1,k_1} et H_{Ω_2,k_2} pouvant conduire à la nullité du second membre de l'équation I.2.4.3.

Exercice I.2.3.3 Démontrer I.2.10iii.

I.3 . −Droites dans un espace affine

Dans tout ce paragraphe $(E, \phi, \overrightarrow{E})$ est un K-espace affine, (où K est un corps qu'on pourra supposer être $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.)

Remarque I.3.1 Si $S \subset E$ est un ensemble de point qui ne sont pas affinement indépendants, (cf. I.1.1), alors il existe un point $O \in S$, tel que le système $\{\overrightarrow{OA},\ A \in S, A \neq O\}$ est lié dans $\overrightarrow{E}$.

Ceci est en fait équivalent au fait que pour tout point $O \in S$, le système $\{\overrightarrow{OA},\ A \in S, A \neq O\}$, est lié dans $\overrightarrow{E}$.

Proposition I.3.2 *Soient A et B deux points distincts de E. On note $D := (AB)$ l'ensemble des points M de E tels que $\{A; B; M\}$ ne soit pas un système de points affinement indépendants (cf. I.1.1).*

i L'ensemble
$$\overrightarrow{D} := \{\overrightarrow{PQ},\ P \in (AB), Q \in (AB)\}$$
est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

ii Si l'on note
$$\begin{aligned} \phi' : D \times D &\to \overrightarrow{D} \\ (P, Q) &\mapsto \overrightarrow{PQ} = \phi((P, Q)), \end{aligned}$$
le triplet $(D, \phi', \overrightarrow{D})$ est un K-espace affine de dimension 1.

Preuve :

i En utilisant la remarque I.3.1, $M \in D$ si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont liés. Comme $\overrightarrow{AB} \neq \text{Vect}\{0\}$, il s'ensuit qu'il existe $k_M \in K$, tel que
$$\overrightarrow{AM} = k_M \overrightarrow{AB}.$$
Ainsi pour tout couple de point (P, Q) de D, il existe un couple d' éléments (k_P, k_Q) de K tels que :
$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} &= k_P \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AQ} &= k_Q \overrightarrow{AB}. \end{aligned}$$
Il s'ensuit que
$$\overrightarrow{PQ} = (k_Q - k_P)\overrightarrow{AB} \in \overrightarrow{D}.$$

Réciproquement pour tout vecteur $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{AB} \in \overrightarrow{D}$, il existe un unique point $C \in E$, tel que $C = A + \overrightarrow{v}$. Dès lors :

$$\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$$

ce qui signifie que $C \in D$.

ii Le point précédent de la démonstration prouve dors et déjà que l'application ϕ' est *surjective*. Par ailleurs il est clair que ϕ' satisfait la relation de Chasles (cf. I.1.1",i) puisque ϕ' est la restriction de ϕ à $D \times D$.

De même ϕ'_A définie par $\phi'_A(B) = \overrightarrow{AB} = \phi((A, B))$ est *injective* comme restriction de ϕ_A à D. Il s'ensuit que ϕ' satisfait également l'axiome I.1.13,ii de la définition des espaces affines.

Définition I.3.1 Pour un couple (A, B) de points distincts de E, on appellera *droite affine* passant par les points A et B, l'espace affine défini dans la proposition I.3.2.

Corollaire I.3.2 *Si D est une droite :*

i

$$\overrightarrow{D} = \{\overrightarrow{PQ},\ P \in D, Q \in D\}\ ;$$

ii pour tout couple (A, B) de points de D,

$$D = \{A + \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{D}\} = \{A + k\overrightarrow{AB},\ k \in K,\}\ ;$$

ce qu'on notera encore

$$D = A + \overrightarrow{D}$$

Preuve :

i Ceci n'est qu'un rappel de la proposition I.3.2i.

ii La droite D étant un espace affine d'après I.3.2ii, an appliquant la construction de I.1.1, tout point $A \in D$ définit une bijection

$$D = \{A + \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{D}\}.$$

Par ailleurs pour tout point $B \neq A$, $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur non nul de $\overrightarrow{D}$ qui est de dimension 1 ; c'est-à-dire que tout vecteur $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{D}$ s'écrit de manière unique $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{AB}$. Il s'ensuit que le choix d'un point $B \neq A$ définit une bijection

$$D = \{A + k\overrightarrow{AB},\ k \in K\}\ .$$

Corollaire I.3.1 *Pour tout couple de point distincts (C, D) d' éléments d'une droite $\Delta = (AB)$, on a :*

$$\Delta = (CD) ;$$

ce qui s'exprime encore en disant que par deux points distincts ne passe qu'une droite.

Preuve : Du fait que $C \in \Delta$ et $D \in \Delta$, il existe $k \in K$ tel que

$$\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB} \text{ (cf. I.3.2i).}$$

Par ailleurs, du fait que $C \in \Delta$, il existe $\gamma \in K$, tel que

$$\overrightarrow{AC} = \gamma\overrightarrow{AB}.$$

Enfin pour tout point $M \in (CD)$, il existe $\mu \in K$ tel que

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{CM} & = & \mu\overrightarrow{CD} \\ & \sim & \\ \overrightarrow{CM} & = & k\mu\overrightarrow{AB} \\ & \sim & \\ \overrightarrow{AM} & = & \overrightarrow{AC} +_{\vec{E}} k\mu\overrightarrow{AB} \\ & \sim & \\ \overrightarrow{AM} & = & (\gamma + k\mu)\overrightarrow{AB} \\ & \to & \\ M & \in & \Delta. \end{array}$$

C'est-à-dire que $(CD) \subset \Delta$.

Réciproquement pour tout point $N \in \Delta$, il existe $\nu \in K$ tel que

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{NAP} & = & \nu\overrightarrow{AB} \\ & \sim & \\ \overrightarrow{AN} & = & \frac{\nu}{k}\overrightarrow{CD} \\ & \sim & \\ \overrightarrow{CN} & = & \overrightarrow{CA} +_{\vec{E}} \frac{\nu}{k}\overrightarrow{CD} \\ & \sim & \\ \overrightarrow{CN} & = & \frac{-\gamma}{k}\overrightarrow{CD} +_{\vec{E}} \frac{\nu}{k}\overrightarrow{CD} \\ & \sim & \\ \overrightarrow{CN} & = & \frac{\nu-\gamma}{k}\overrightarrow{CD} \\ & \to & \\ N & \in & (CD) ; \end{array}$$

c'est-à-dire $\Delta \subset (CD)$.

On en conclut finalement que $\Delta = (CD)$.

Définition I.3.1 Étant donnée une droite D on appelle *vecteur directeur de* D un élément non nul de $\overrightarrow{D}$; c'est-à-dire une base de $\overrightarrow{D}$.

Définition I.3.2 On dit que deux droites D et D' sont *parallèles* si elle ont même direction vectorielle ou encore si elle ont un vecteur directeur commun.

Proposition I.3.3 *Étant donné un point $A \in E$, et $\overrightarrow{D} \subset \overrightarrow{E}$ une droite vectorielle, c'est-à-dire un sous-espace vectoriel de dimension 1 de $\overrightarrow{E}$, il existe une unique droite D contenant A et de direction vectorielle $\overrightarrow{D}$.*

Ceci s'exprime encore en disant qu'il existe une unique droite parallèle à une droite donnée passant par un point A de E.

Preuve : La démonstration de cette proposition découle immédiatement de la démonstration de la proposition I.3.1. En effet, en reprenant les notations, on constate que le fait que les droites Δ et (CD) aient même direction vectorielle et contiennent toutes deux le point C implique qu'elles sont égales.

Proposition I.3.1 *$D \subset E$ étant une partie de E de cardinal au moins 2, les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *D est une droite.*
2. *Si A, B, C sont des éléments de D, alors $\{A; B; C\}$ est un système non affinement indépendant (cf. I.1.1).*
3. *Si $\{A; B; C\} \subset E$ est un système non affinement indépendant, et si $\{A; B\} \subset D$, alors $C \in D$.*

Preuve : (cf. feuille de TD numéro 2, exercice 3).

Proposition I.3.1 *L'image d'une droite par une homothétie-translation (cf. I.2.4), est une droite parallèle.*

Preuve : Soit $\eta \in \mathcal{HT}(\mathcal{E})$ une homothétie-translation de rapport $k \in K^*$. Pour toute droite $D \subset E$, choisissons une origine (cf. I.1.1), O sur D. Notons

$$D' \;:=\; \eta(D) \;=\; \{Q \mid \exists P \in D, \mid Q = \eta(P)\}.$$

Or η est une bijection, pour tout $Q \in E$ il existe donc un unique $P = \eta^{-1}(Q)$ tel que $\eta(P) = Q$. Il s'ensuit donc que :

$$\begin{array}{rcl}
Q & \in & D' \\
 & \wr & \\
\eta^{-1}(Q) & \in & D \\
 & \wr & \\
\eta^{-1}(Q) & = & O + \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{D} \\
 & \wr & \\
Q & = & \eta(O + \overrightarrow{u}) \\
 & \overset{\wr}{\text{(cf. I.2.2ii)}} & \eta(A) + \overrightarrow{\eta}(\overrightarrow{u}) \\
 & \wr & \\
Q & = & \eta(O) + k\overrightarrow{u}.
\end{array}$$

Ce qui signifie que D' est la droite de direction vectorielle $\overrightarrow{D}$ passant par $\eta(O)$ (cf. I.3.3)

Définition I.3.1 On dit que trois points distincts A, B, C sont *alignés* si l'une des assertions équivalentes suivantes est satisfaite :

i $C \in (AB)$,

ii Le système $\{A; B; C\}$ n'est pas affinement indépendant (cf. I.1.1).

I.4 . $-$Droites du plan affine

Dans toute cette section, K étant un corps (que l'on peut toujours supposer être $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$,) on considérera le K-espace affine $(P, \phi, \overrightarrow{P})$ de dimension 2 encore appelé plan affine.

Proposition I.4.1 *Deux droites affines D et D' dans P (cf. I.3.1) qui ne sont pas parallèles (cf. I.3.2) possèdent un unique point commun. On dit qu'elles sont séquentes.*

Preuve : Supposons donné O (resp. O') un point de D (resp. D') et $\overrightarrow{u}$ resp. $\overrightarrow{u'}$,) un vecteur directeur de D (resp. D') c'est-à-dire un élément non nul de $\overrightarrow{D}$ (resp. $\overrightarrow{D'}$.)

Il existe un point M appartenant à $D \cap D'$ si et seulement si il existe un couple (k, k') d' éléments de K tel que :

$$M = O + k\overrightarrow{u} \qquad \text{et} \qquad M = O' + k'\overrightarrow{u'}$$

$$\sim$$

$$\overrightarrow{OO'} = k\overrightarrow{u} -_{\overrightarrow{E}} k'\overrightarrow{u'}.$$

Or les droites D et D' n'étant pas parallèles, $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'})$ est un système libre de $\overrightarrow{P}$. Il se trouve qu'il est aussi générateur ; puisque $\dim_P = 2$. Par conséquent il existe un unique couple $(k, k') \in K \times K$, tel que

$$\overrightarrow{OO'} = k\overrightarrow{u} -_{\overrightarrow{E}} k'\overrightarrow{u'} .$$

L'intersection $D \cap D'$ est donc le singleton

$$\{O + k\overrightarrow{u}\} = \{O' + k'\overrightarrow{u'}\} .$$

Proposition I.4.1 *Soient A, B, C, D des points de P, le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme (cf. I.1.3.iii)) si et seulement si (AB) et (CD) resp. (AC) et (BD)) sont parallèles et non confondues.*

Preuve : La définition que nous avons donnée du parallélogramme en I.1.3.iii) implique évidemment le parallélisme de (AB)et (CD) resp. (AC) et $BD)$) (cf. I.3.2).

Réciproquement, notons

$$V_1 := K\overrightarrow{AB} \subset \overrightarrow{P},$$

(resp.

$$V_2 := K\overrightarrow{AC} \subset \overrightarrow{P}.)$$

Or $B \notin (AC)$ car (AB) et (CD) ne sont pas confondues. Il s'ensuit que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un système libre dans $\overrightarrow{P}$ ce qui signifie encore que V_1 et V_2 sont en somme directe ou encore supplémentaires l'un de l'autre.

Par ailleurs la relation de Chasles (cf. I.1.13,i) donne :

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} +_{\overrightarrow{P}} \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} +_{\overrightarrow{P}} \overrightarrow{CD}.$$

Or (AB) parallèle à (CD) (resp. (AC) parallèle à (BD)) implique $\overrightarrow{CD} \in V_1$ resp. $\overrightarrow{BD} \in V_2$.) Par unicité de la décomposition sur $V_1 \oplus V_2$, il vient :

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB},$$

(resp.

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}.$$

Théorème I.4.1 (Théorème de Thalès) *Soit trois points distincts alignés O, A, B (cf. I.3.1), et trois points O, A', B' alignés tels que A, O, A' ne soient pas alignés.*

Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :

i Il existe $k \in K$ tel que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OB} &= k\overrightarrow{OA} \\ &\text{et} \\ \overrightarrow{OB'} &= k\overrightarrow{OA'}. \end{aligned}$$

ii Les droites (AA') et (BB') sont parallèles (cf. I.3.2).

Preuve : Le fait que (i) implique (ii) est une simple conséquence de la relation de Chasles (cf. I.1.13,i) ; en effet, :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BB'} &= \overrightarrow{OB'} -_{\overrightarrow{E}} \overrightarrow{OB} \\ &= k(\overrightarrow{OA'} -_{\overrightarrow{E}} \overrightarrow{OA}) \\ &= k\overrightarrow{AA'}. \end{aligned}$$

Réciproquement comme $O \neq A$ le fait que O, A, B soient alignés implique qu'il existe $k \in K$ tel que

$$\overrightarrow{OB} = k\overrightarrow{OA}.$$

Définissons l'homothétie H de centre O et de rapport k. Il est clair que $H(A) = B$. Notons $B'' := H(A')$. On a, par définition même d'une homothétie I.2.3,

$$B'' = O + k\overrightarrow{OA'}\ ;$$

c'est-à-dire que $B'' \in (OA')$. Par ailleurs l'image d'une droite par une homothétie étant une droite parallèle (cf. I.3.1), B'' appartient à la parallèle à (AA') passant par B c'est-à-dire (BB'). Ceci identifie B'' à B' et achève la preuve.

I.5 . −Projections et symétries dans le plan

Dans toute cette section, K étant un corps (que l'on peut toujours supposer être $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$,) mais différent de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, on considérera le K-espace affine $(P, \phi, \overrightarrow{P})$ de dimension 2 encore appelé plan affine.

Remarque I.5.1 Étant donné un K-espace affine $(E, \phi, \mathrm{Vect}\{E\})$, on a constaté que pour une homothétie-translation (cf. I.2.4), η, et pour tout point $\Omega \in E$, et tout vecteur $\mathrm{Vect}\{u\} \in \mathrm{Vect}\{E\}$,

$$\eta(\Omega + \mathrm{Vect}\{u\}) \;=\; \eta(\Omega) + \mathrm{Vect}\{\eta\}(\mathrm{Vect}\{u\})$$

(cf. I.2.2).

En fait ce résultat est plus général. Soit $\gamma \;:\; E \;\rightarrow\; E$ une application telle que l'application vectorielle sous-jacente soit bien définie, *i.e.* pour tout couple (A, B) de points de E et tou couple (C, D) de points de E tel que :

$$\overrightarrow{AB} \;=\; \overrightarrow{CD},$$

on ait :

$$\overrightarrow{\gamma(A)\gamma(B)} \;=\; \overrightarrow{\gamma(C), \gamma(D)}\;.$$

Alors pour tout point $\Omega \in E$, et tout vecteur $\mathrm{Vect}\{u\} \in \mathrm{Vect}\{E\}$,

$$\gamma(\Omega + \overrightarrow{u}) \;=\; \gamma(\Omega) + \mathrm{Vect}\{\gamma\}(\mathrm{Vect}\{u\}). \qquad \text{I.5.1.1}$$

En effet, si $A := \Omega + \mathrm{Vect}\{u\}$,

$$\begin{aligned}
\gamma(\Omega + \mathrm{Vect}\{u\}) &= \gamma(A)\\
&= \gamma(\Omega) + \overrightarrow{\gamma(\Omega)\gamma(A)}\\
&= \gamma(\Omega) + \mathrm{Vect}\{\gamma\}(\overrightarrow{\Omega A})\\
&= \gamma(\Omega) + \mathrm{Vect}\{\gamma\}(\mathrm{Vect}\{u\})\;.
\end{aligned}$$

I.5.2. − Soient D_1 et D_2, deux droites non parallèles du plan P. À tout point $A \in E$ on associe l'unique point $p_1(A)$ (resp. $p_2(A)$) défini comme l'intersection de la parallèle à D_2 (resp. D_1) passant par A (cf. I.3.3), avec D_1 (resp. D_2.) (cf. I.4.1).

Définition I.5.3 La construction ci-dessus permet de définir une application

$$p_1 : P \rightarrow D_1,$$

(resp.

$$p_2 : P \rightarrow D_2,)$$

qu'on appellera *projection de P sur D_1 (resp. D_2) parallèlement à D_2 (resp. D_1.)*

Remarque I.5.4 i) Remarquons que si D'_1 (resp. D'_2) est une droite parallèle à D_1 (resp. D_2) la projection $p'_1 : P \to D_1$ parallèlement à D'_2 (resp. $p'_2 : P \to D_2$ parallèlement à D'_1) est exactement p_1 (resp. p_2.)

On pourra donc parler de p_1 (resp. p_2) comme de *la projection sur D_1 parallèlement à la direction vectorielle* $\mathrm{Vect}\{D_2\}$ (resp. *la projection sur D_2 parallèlement à la direction vectorielle* $\mathrm{Vect}\{D_1\}$.)

ii) Pour $i = 1$ ou 2 et pour $A \in P$, on a :

$$p_i(A) = A \Leftrightarrow A \in D_i.$$

I.5.5. – En reprenant les notations de I.5.2, notons $\mathrm{Vect}\{u_1\}$ (resp. $\mathrm{Vect}\{u_2\}$) une base de $\mathrm{Vect}\{D_1\}$ (resp. $\mathrm{Vect}\{D_2\}$.)

Comme D_1 et D_2 ne sont pas parallèles $(\mathrm{Vect}\{u_1\}, \mathrm{Vect}\{u_2\})$ est une base de $\mathrm{Vect}\{P\}$.

Pour tout couple (A, B) de points de P, il existe donc un unique couple (x_1, x_2) dans $\mathbb{R}^2$, tel que :

$$\overrightarrow{AB} = x_1\mathrm{Vect}\{u_1\} +_{\overrightarrow{P}} x_2\mathrm{Vect}\{u_2\}.$$

Lemme I.5.6 *Avec les notations ci-dessus, pour tout couple de points (A, B) de P,*

$$\overrightarrow{p_i(A)p_i(B)} = x_i\mathrm{Vect}\{u_i\}$$

pour $i = 1$ ou 2.

Preuve : Notons $O := D_1 \cap D_2$. Remarquons que pour $i = 1$ ou 2,

$$p_i(O) = O. \qquad \text{I.5.7}$$

Par ailleurs pour tout point $M \in P$, le quadrilatère $Op_1(M)Mp_2(M)$ est un paraléllogramme (cf. I.1.3.iii)) (cf. I.4.1), ce qui implique :

$$\overrightarrow{Op_1(M)} = \overrightarrow{p_2(M)M} \text{ et } \overrightarrow{Op_2(M)} = \overrightarrow{p_1(M)M}\ ;$$

et encore :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Op_1(M)} + \overrightarrow{Op_2(M)}. \qquad \text{I.5.8}$$

Pour tout couple (A, B) de points de P, la relation de Chasles (cf. I.1.1D,i) donne :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \\
&\underset{\text{(cf. I.5.8)}}{=} \overrightarrow{Op_1(B)} + \overrightarrow{Op_2(B)} - \overrightarrow{Op_1(A)} - \overrightarrow{Op_2(A)} \\
&= \overrightarrow{p_1(A)p_1(B)} + \overrightarrow{p_2(A)p_2(B)}\ .
\end{aligned}$$

On conclut grâce à l'unicité de la décomposition sur les sous-espaces supplémentaires $\mathrm{Vect}\{D_1\}$ et $\mathrm{Vect}\{D_2\}$.

Proposition I.5.9 *Dans la situation de I.5.2, les applications* p_i $(i = 1$ *ou* $2,)$ *possèdent une application vectorielle sous-jacente* $\overrightarrow{p_i}$, *telle que pour tout vecteur* $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{P}$, $\overrightarrow{p_i}(\overrightarrow{u})$ *est la composante de* $\overrightarrow{u}$ *sur* $\overrightarrow{D_i}$.

Pour $i = 1$ *ou* 2, *l'application* $\overrightarrow{p_i}$ *satisfait les propriétés suivantes :*

i) $\overrightarrow{p_i} \circ \overrightarrow{p_i} = \overrightarrow{p_i}$.

ii)

$$\overrightarrow{P} = \operatorname{Ker} \overrightarrow{p_i} \oplus \operatorname{Im} \overrightarrow{p_i} \text{ et } \overrightarrow{p_i}_{|\operatorname{Im} \overrightarrow{p_i}} \; = \; \operatorname{Id}_{\operatorname{Im} \overrightarrow{p_i}} \; .$$

iii) $\overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2} = \operatorname{Id}_{\overrightarrow{P}}$.

Remarque I.5.10 i) Remarquons que les points (i,ii,iii) de la proposition I.5.9 caractérisent de manière équivalente un projecteur.

ii) Notons également que l'identité de $\overrightarrow{P}$ et l'application nulle de $\overrightarrow{P}$ sont des projecteurs au sens de cette définition.

Nous exclurons ces deux cas dans la suite et notamment dans la proposition I.5.13.

I.5.11. – Soit $p : P \to D$ une projection et $t := T_{\overrightarrow{u}}$ une translation (cf. I.2.1).

Remarquons d'abord que pour tout $A \in P$,

$$\begin{array}{rcl} p(t(A)) & = & p(A + \overrightarrow{u}) \\ & \underset{\text{(cf. I.5.1)}}{=} & p(A) + \overrightarrow{p}(\overrightarrow{u}) \\ & = & T_{\overrightarrow{p}(\overrightarrow{u})}(p(A)) \; . \end{array}$$

C'est-à-dire

$$p \circ T_{\overrightarrow{u}} \; = \; T_{\overrightarrow{p}(\overrightarrow{u})} \circ p \; . \qquad \text{I.5.11.1}$$

Par ailleurs, pour tout point $A \in P$,

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{p}(\overrightarrow{At(p(A))}) & = & \overrightarrow{p(A)p(t(p(A)))} \\ & \underset{\text{(cf. I.5.4ii)}}{=} & \overrightarrow{p(A)T_{\overrightarrow{p}(\overrightarrow{u})}(p(A))} \\ & = & \overrightarrow{p}(\overrightarrow{u}) \; . \end{array} \qquad \text{I.5.11.2}$$

Notons $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{p}(\overrightarrow{u})$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} - \overrightarrow{w}$. Si l'on note $D := \operatorname{Im} p$, et $D' := T_{\overrightarrow{-v}}(D)$ l'image de D par la translation de vecteur $-v$ qui est une droite parallèle à D (cf. I.3.1) ; on définit $p' : P \to D'$ la projection sur D' de même direction que p. Il est facile de vérifier qu'alors on a :

$$p \circ T_{\overrightarrow{u}} \; = \; p' \circ T_{\overrightarrow{w}} \; = \; T_{\overrightarrow{w}} \circ p' \; . \qquad \text{I.5.11.3}$$

Enfin on établit sans difficultés que

$$\overrightarrow{p \circ t} = \overrightarrow{t \circ p} = \overrightarrow{p}. \qquad \text{I.5.11.4}$$

On tire assez facilement de ce qui précède le corollaire suivant :

Corollaire I.5.12 *Si p et p' sont deux projections ayant la même application vectorielle associée, alors il existe un unique vecteur*

$$\overrightarrow{v} \in \operatorname{Ker} \overrightarrow{p} = \operatorname{Ker} \overrightarrow{p'} \ \textit{tel que} : p' = T_{\overrightarrow{v}} \circ p\,.$$

Preuve : Notons d'abord que la remarque I.5.4i et la proposition I.5.9 montrent que si p et p' on même application vectorielle associée, elles ont même direction égale au noyau de $\overrightarrow{p}$. Leurs images respectives D et D' sont deux droites parallèles de direction $\operatorname{Im} \overrightarrow{p}$.

Pour tout point $A \in P$,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{p}(\overrightarrow{p(A)p'(A)}) &= \overrightarrow{p(p(A))p(p'(A))} \\ &\underset{\text{(cf. I.5.4ii)}}{=} \overrightarrow{p(A)p(p'(A))}\,.\end{aligned}$$

Les droites $(Ap(A))$, $(Ap'(A))$ et $(p(A)p(p'(A)))$on même direction égale à $\operatorname{Ker} \overrightarrow{p}$. Il s'ensuit, d'après la proposition I.3.1 que $p(A) = p(p'(A))$. C'est-à-dire que $\overrightarrow{p(A)p(p'(A))} = 0$ ou encore, d'après ce qui précède que $\overrightarrow{p(A)p'(A)} \in \operatorname{Ker} \overrightarrow{p}$.

Pour tout point $B \in P$,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{p(A)p(B)} &= \overrightarrow{p}(\overrightarrow{AB}) \\ &= \overrightarrow{p'}(\overrightarrow{AB}) \\ &= \overrightarrow{p'(A)p'(B)}\,.\end{aligned}$$

Ce qui équivaut à

$$\overrightarrow{p(B)p'(B)} = \overrightarrow{p(A)p'(A)}$$

où encore :

$$p'(B) = p(B) + \overrightarrow{p(A)p'(A)}\,;$$

ce qui achève la preuve.

Rappelons que la détermination de l'application vectorielle associée à une application de E dans E ne présente réellement d'intérêt pour la géométrie affine que si l'application vectorielle sous-jacente est « en un certain sens » caractéristique de l'application de départ; autrement dit si une proposition du type I.5.9 a « dans une certaine mesure » une réciproque (cf. I.5.13) (cf. I.5.1).

Proposition I.5.13 *Soit γ une application de P dans P possédant une application vectorielle sous-jacente $\overrightarrow{\gamma}$ qui est un projecteur sur une droite vectorielle $\overrightarrow{D} \subset \overrightarrow{P}$ parallèlement à une droite $\Delta \subset \overrightarrow{P}$ (cf. I.5.10ii); c'est-à-dire que*

$$\mathrm{Im}\,\overrightarrow{\gamma} = \overrightarrow{D} \text{ et } \ker \overrightarrow{\gamma} = \Delta .$$

Alors il existe un unique triplet $(\overrightarrow{u}, p, D)$ tel que :

i $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{D}$,

ii D *est une droite de direction vectorielle sous-jacente* $\overrightarrow{D}$,

iii p *est la projection sur* D *parallèlement à* Δ,

iv

$$\gamma = T_{\overrightarrow{u}} \circ p = p \circ T_{\overrightarrow{u}}.$$

Preuve : Nous allons évidemment utiliser la caractérisation de la composante « horizontale » de $T_{\overrightarrow{u}}$ donnée en I.5.11.3; qui est la seule qui soit uniquement déterminée. On a vue en effet dans (loc. cit.) que l'on pouvait obtenir de plusieurs manières différentes la même application comme composée d'une projection et d'une translation pour peu qu'on n'impose pas à la composantes du vecteur $\overrightarrow{u}$ suivant Δ d'être nulle.

Soit donc un point $A \in P$. S'il existe une projection p et un vecteur $\overrightarrow{u}$, satisfaisant iv, alors nécessairement,

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{p(A)\gamma(A)}.$$

Si l'on suppose i,ii et iii, $D := p(A) + \overrightarrow{D}$ qui est encore égale à $\gamma(A) + \overrightarrow{D}$; puisque $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{D}$. On pose donc

$$D := \gamma(A) + \overrightarrow{D}.$$

Définissons p comme la projection sur D parallèlement à δ.

Il est immédiat de voir, d'après la définition de p $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{\gamma}$.

Il s'ensuit que pour tout point $B \in P$,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{p(A)p(B)} &= \overrightarrow{p}(\overrightarrow{AB}) \\ &= \overrightarrow{\gamma}(\overrightarrow{AB}) \\ &= \overrightarrow{\gamma(A)\gamma(B)}. \end{aligned}$$

Ce qui équivaut encore à :

$$\gamma(B) \;=\; p(B) + \overrightarrow{p(A)\gamma(A)}.$$

En posant $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{p(A)\gamma(A)}$, on constate que

$$\gamma \;=\; T_{\overrightarrow{u}} \circ p\,;$$

et que $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{D}$.

Supposons donné un autre triplet $(\overrightarrow{u'}, p', D')$ satisfaisant les conditions (i à iv) de la proposition. Il vient alors :

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{p'} & \underset{I.5.11.4}{=} & \overrightarrow{T_{\overrightarrow{u'}} \circ p'} \\ & \underset{iv}{=} & \overrightarrow{\gamma} \\ & \underset{iv}{=} & \overrightarrow{T_{\overrightarrow{u}} \circ p} \\ & = & \overrightarrow{p}\ . \end{array}$$

D'après le corollaire I.5.12, il existe un unique vecteur $\overrightarrow{v} \in \operatorname{Ker} \overrightarrow{p}$ tel que $p' \;=\; T_{\overrightarrow{v}} \circ p$. Pour tout point $A \in P$,

$$\gamma(A) \;+\; \overrightarrow{u} \;=\; p(A) \;=\; p'(A) \;+\; \overrightarrow{u'}\ .$$

Ce qui implique :

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{v} & = & \overrightarrow{p(A)p'(A)} \\ & = & \overrightarrow{u'} - \overrightarrow{u}. \end{array}$$

Comme $\operatorname{Im} \overrightarrow{\gamma}$ et $\operatorname{Ker} \overrightarrow{\gamma}$ sont en somme directe :

$$\overrightarrow{v} \;=\; 0 \text{ et } \overrightarrow{u} \;=\; \overrightarrow{u'}\ .$$

Corollaire I.5.1 *Soit $\gamma\ :\ P\ \to\ P$ une application dont l'application vectorielle sous-jacente $\overrightarrow{\gamma}$ est un projecteur non égal à l'identité ou à l'application nulle (cf. I.5.10ii.)*

Si l'on suppose qu'il existe un point $O \in P$ tel que $\gamma(O) = O$ alors γ est la projection sur $O\ +\ \operatorname{Im} \overrightarrow{\gamma}$ parallèlement à $\operatorname{Ker} \overrightarrow{\gamma}$.

Définition I.5.2 Étant donnés deux points A et B de P, on appelle *milieu* du bipoint (A, B) l'unique point I de P défini par l'une des conditions équivalentes suivantes :

i $I := A + \frac{1}{2}.\overrightarrow{AB}$.

ii $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = 0$.

iii Pour tout point O de P,

$$\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}).$$

Proposition I.5.3 *Étant donné une droite $D \subset P$, et une droite vectorielle $\delta \subset \overrightarrow{P}$, telles que $\overrightarrow{D} \neq \delta$, pour tout point $A \in P$, il existe un unique point $B \in P$, tel que :*

i Le milieu de (A, B) appartient à D.

ii $\overrightarrow{AB} \in \delta$.

Preuve : Si $A \in D$, il est clair que $B = A$ répond de manière unique à la question.

Si maintenant $A \notin D$, s'il existe un point B répondant à la question, la droite (AB) a pour direction δ. Si p est la projection sur D relativement à la direction δ (cf. I.5.3), la droite $(Ap(A))$ a également pour direction δ ($p(A) \neq A$.) Par suite ces deux droites sont confondues (cf. I.3.3).

Par ailleurs, par définition même du milieu du bipoint (A, B), celui-ci appartient à la droite (AB). Il s'ensuit que le milieu de (A, B) est nécessairement$p(A)$ (cf. I.4.1). Il s'ensuit qu'alors

$$B = A + 2\overrightarrow{Ap(A)}. \qquad \text{I.5.1}$$

Définition I.5.2 Étant données une droite $D \subset P$ et une droite vectorielle $\delta \subset \overrightarrow{P}$, la construction de la proposition I.5.3 définit une application $s : P \to P$, appelée *symétrie par rapport à D dans la direction δ.*

I.5.3. – Étant données une droite $D \subset P$ et une droite vectorielle $\delta \subset \overrightarrow{P}$ non parallèles, soit s la symétrie (resp. p la projection) par rapport à D (resp. sur D) dans la direction δ. Pour tout vecteur $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{P}$, et tout bipoint (A, B) tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{s(A)s(B)} &= \overrightarrow{s(A)p(A)} + \overrightarrow{p(A)p(B)} + \overrightarrow{p(B)s(B)} \\
&= \overrightarrow{p(A)A} + \overrightarrow{p(A)p(B)} + \overrightarrow{Bp(B)} \\
&= \overrightarrow{p(A)A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{Bp(B)} + \overrightarrow{p(A)p(B)} - \overrightarrow{AB} \\
&= 2\overrightarrow{p(A)p(B)} - \overrightarrow{AB} \\
&= 2\overrightarrow{p}(\overrightarrow{u}) - \overrightarrow{u} .
\end{aligned}$$

Ceci définit une application vectorielle sous-jacente $\overrightarrow{s}$ à s telle que :

$$\overrightarrow{s} = 2\overrightarrow{p} - \mathrm{Id} . \qquad \text{I.5.3.1}$$

Ceci caractérise une *symétrie vectorielle.*

Remarque I.5.4 i) Notons qu'une symétrie s par rapport à une droite D dans une direction δ vérifie $s \circ s = \mathrm{Id}$, qu'elle est donc bijective et égale à son propre inverse. On dira qu'il s'agit d'unne application *involutive.*

Notons que de même $\overrightarrow{s} \circ \overrightarrow{s} = \mathrm{Id}$.

ii) Il est bon de garder en mémoire que si π est un projecteur, et $\sigma := 2\pi - \mathrm{Id}$ une symétrie, on a la correspondance suivante entre les espaces propres de ces applications qui sont diagonalisables :

[-] Le noyau de π est l'espace propre de σ associé à la valeur propre -1,

[-] L'image de π est le sous espace propre de σ associé à la valeur propre 1.

I.5.5. – Étant donnés un vecteur $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{P}$, et une symétrie s par rapport à une droite D dans une direction δ, pour tout point $A \in P$,

$$\begin{aligned} s(T_{\overrightarrow{u}}(A)) &= s(A + \overrightarrow{u}) \\ &\underset{\text{(cf. I.5.1)}}{=} s(A) + \overrightarrow{s}(\overrightarrow{u}) \\ &= T_{\overrightarrow{s}(\overrightarrow{u})}(s(A)) \,. \end{aligned}$$

Il s'ensuit immédiatement que si $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{D}$,

$$s \circ T_{\overrightarrow{u}} = T_{\overrightarrow{u}} \circ s \,. \qquad \text{I.5.5.1}$$

Corollaire I.5.6 *Étant données deux symétrie s et s', ayant même application vectorielle sous-jacente, il existe un unique vecteur*

$$\overrightarrow{v} \in \mathrm{Ker}\,\frac{1}{2}(\overrightarrow{s} + \mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}\,\frac{1}{2}(\overrightarrow{s'} + \mathrm{Id}),$$

tel que

$$s = T_{\overrightarrow{v}} s' \,.$$

Preuve : La démonstration découle immédiatement du corollaire I.5.13.

Proposition I.5.1 *Étant donnée une application $\gamma : P \to P$, possédant une application vectorielle sous-jacente $\overrightarrow{\gamma}$ qui est une symétrie dont le projecteur associé (cf. I.5.3.1), n'est ni l'identité ni l'application nulle (cf. I.5.10ii), il existe un unique triplet $(\overrightarrow{u}, s, D)$, tel que :*

i

$$\overrightarrow{u} \in \mathrm{Im}\,\frac{1}{2}(\overrightarrow{\gamma} + \mathrm{Id}),$$

ii D *est une droite de direction* $\mathrm{Im}\,(\frac{1}{2}(\overrightarrow{\gamma} + \mathrm{Id}))$,

iii s *est la symétrie par raport à* D *dans la direction* $\mathrm{Ker}\,(\frac{1}{2}(\overrightarrow{\gamma} + \mathrm{Id}))$,

iv

$$\gamma = T_{\overrightarrow{u}} \circ s = s \circ T_{\overrightarrow{u}}.$$

Corollaire I.5.2 *Soit $\gamma : P \to P$ une application telle que l'application vectorielle sous-jacente $\overrightarrow{\gamma}$ soit bien définie et soit une symétrie de projecteur associé (cf. I.5.3.1), n'est pas triviale (cf. I.5.10ii). Si l'on suppose de plus qu'il existe un point $O \in P$, tel que $\gamma(O) = O$ alors γ est la symétrie par rapport à $O + \mathrm{Im}\,(\frac{1}{2}(\overrightarrow{\gamma} + \mathrm{Id}))$ dans la direction $\mathrm{Ker}\,(\frac{1}{2}(\overrightarrow{\gamma} + \mathrm{Id}))$.*

I.5.3 . –Exercices

On complétera les preuves des propositions partiellement démontrées dans cette section ; et on s'intéressera particulièrement à vérifier les résultats d'algèbre linéaire qui n'ont été que rappelés.