II . −Groupe orthogonal

Dans tout ce chapitre, si aucune autre précision n'est donnée, K désignera un corps quelconque, de caractéristique différente de 2.

Espace vectoriel* signifiera toujours K*-espace vectoriel de dimension finie.

II.1 . −Espace vectoriel dual

Définition II.1.1 Étant donné un K-espace vectoriel V on rappel que

$$V^* := \mathrm{Hom}_((V, ,) K) = \mathcal{L}(V, K)$$

est le K-espace vectoriel des applications K-linéaires de V dans K appelées *formes linéaires sur* V.

Le K-espace vectoriel V^* est appelé *espace vectoriel dual de* V.

Pour des K-espaces vectoriels V et W et tout morphisme0 (application linéaire) $f : V \to W$, on définit :

$$\begin{array}{rccl} f^* : & W^* & \to & V^* \\ & w & \mapsto & w \circ f \ . \end{array} \qquad \text{II.1.2}$$

L'application f^* s'appelle l'*adjoint de* f.

Proposition II.1.3 *Étant donnés deux K-espaces vectoriels V et W de même dimension, pour tout morphisme0 $f : V \to W$ inversible, d'inverse f^{-1} :*

i L'adjoint f^* de f est inversible ; et si l'on note $(f^*)^{-1}$ son inverse on a :

ii

$$(f^{-1})^* = (f^*)^{-1}.$$

Preuve : Pour tout $v \in V^*$,

$$\begin{array}{rccc} & (f^{-1})^*(v) & = & f^{-1} \circ v \\ \equiv & f \circ ((f^{-1})^*(v)) & = & f \circ f^{-1} \circ v \\ \equiv & f \circ ((f^{-1})^*(v)) & = & v \\ \equiv & f^*((f^{-1})^*(v)) & = & v \ ; \end{array}$$

ce qui prouve que $(f^{-1})^*$ est un inverse à droite pour f^*. On vérifierait, exactement de la même manière, que $(f^{-1})^*$ est un inverse à gauche de f^*.

Proposition II.1.1 *Pour des K-espaces vectoriels V, W, Z et des morphisme0s*

$$f : V \to W \text{ et } g : W \to Z,$$

on a :

$$(g \circ f)^* \;=\; f^* \circ g^*.$$

Définition II.1.2 Soit V un K-espace vectoriel de dimension finie d. Pour toute base

$$v_1, \ldots, v_d \text{ de } V \text{ , on appelle } \textit{base duale de } \; v_1, \ldots, v_d$$

une base

$$v_1^*, \ldots, v_d^* \text{ de } V^* \text{ vérifiant :}$$

$$\begin{array}{rcl} v_i^*(v_j) & = & 0 \quad \forall 1 \leq i, j \leq n \; i \neq j, \\ v_i^*(v_i) & = & 1 \qquad \forall 1 \leq i \leq n, \;\; . \end{array}$$

Proposition II.1.3 *Si V est une K-espace vectoriel de dimension finie d, pour toute base $v_1, \ldots, v_d$ de V, il existe une base duale $v_1^*, \ldots, v_d^*$ de V^*.*

Corollaire II.1.4 *Si V est un K-espace vectoriel de dimension finie d, V^* est un K-espace vectoriel de même dimension d.*

On définit une application

$$\begin{array}{rcl} V & \to & (V^*)^* \\ x & \mapsto & \overline{x} \end{array}$$

où, pour tout $x \in V$, $\overline{x} : V^* \to K$, est définie par :

$$\overline{x}(f) = f(x),$$

pour tout $f \in V^*$.

Proposition II.1.5 *L'application $x \mapsto \overline{x}$ de V dans V^* définie ci-dessus, est un isomorphisme.*

Soient $V_1, \ldots, V_n$ des K-espaces vectoriels de dimensions finies. On note

$$i_k : V_k \to V_1 \times \ldots \times V_n \;{}_{1 \leq k \leq n}$$

l'injection canonique dans le produit. Pour toute forme linéaire

$$f : V_1 \times \ldots \times V_n \to K,$$

on pose $f_k := f \circ i_k : V_k \to K$. On définit ainsi une application :

$$\begin{array}{rcl} \theta : (V_1 \times \ldots \times V_n)^* & \to & V_1^* \times \ldots \times V_n^* \\ f & \mapsto & (f_1, \ldots, f_n) \end{array}$$

Proposition II.1.6 *L'application définie ci-dessus est un isomorphisme.*

II.1.7 . —Exercices

Exercice II.1.7.1 Démontrer les propositions II.1.5 et II.1.3, en ayant soin de noter l'importance de l'hypothèse V de dimension finie.

On pourra chercher à donner un contre-exemple en dimension infinie.

Exercice II.1.7.2 Donner une démonstration de la proposition II.1.6.

II.2 . —Formes linéaires alternées et déterminants

Dans toute cette section, V est un K-espace vectoriel de dimension $d \geq 1$.

Définition II.2.1 On appelle *forme d-linéaire alternée* sur V une application

$$f : V^d \to K,$$

telle que :

i Pour tout $(v_1, \ldots, v_d) \in V^d$, tout $v'_{i1 \leq i \leq d}$ et pour tout couple (λ, μ) d' éléments de K,

$$f(v_1, \ldots, \lambda v_i + \mu v'_i, \ldots, v_d) \ = \ \lambda f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_d) + \mu f(v_1, \ldots, v'_i, \ldots, v_d)\ ;$$

ii Pour toute permutation $\sigma \in S_d$, et tout d-uplet $(v_1, \ldots, v_d) \in V^d$,

$$f(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(d)}) \ = \ (-1)^\sigma f(v_1, \ldots, v_d)\ ,$$

(où $(-1)^\sigma$, vaut 1 si σ est une permutation paire et -1 si σ est une permutation impaire.)

On notera $\mathbf{A}^d(V)$ l'ensemble des formes d-linéaires alternées sur V.

Remarque II.2.2 Si $d = 1$, on remarque immédiatement que $\mathbf{A}^d(V)$ s'identifie à V^*, on renvoie donc au paragraphe II.1 pour les résultats concernant ce cas ; et on supposera, dans toute la suite de cette section, que $d \geq 2$.

Proposition II.2.3 *Soit f une forme d-linéaire sur V, et $(v_1, \ldots, v_d)$ un d-uplet d' éléments de V tel qu'il existe $1 \leq i < j \leq d$ tels que : $v_i = v_j$. Alors*

$$f(v_1, \ldots, v_d) \ = \ 0.$$

Preuve : Il suffit de remarquer qu'il existe toujours une transposition $t_{ij} \in S_d$ telle que $t_{ij}(i) = j$ et qu'une transposition est toujours une permutation impaire. Le résultat découle ensuite immédiatement de II.2.1ii.

Proposition II.2.1 *i) L'ensemble $\mathbf{A}^d(V)$ est un K-espace vectoriel de dimension 1.*

ii) Étant donnés deux K-espaces vectoriels V et W de <u>même</u> dimension d, l'application

$$\mathbf{A}^d \ : \ \mathrm{Hom}_K(V, W) \ \to \ \mathrm{Hom}_K(\mathbf{A}^d(W), \mathbf{A}^d(V))$$

définie par $u \mapsto \mathbf{A}^d(u)$ où pour tout $f \in \mathbf{A}^d(W)$, et tout d-uplet $(v_1, \ldots, v_d) \in V^d$,

$$[(\mathbf{A}^d(u))(f)](v_1, \ldots, v_d) \ := \ f(u(v_1), \ldots, u(v_d))$$

est un morphisme0 de K-espaces vectoriels vérifiant, pour V, W, Z des K-espaces vectoriels de <u>même</u> dimension d et

$$u : V \to W, \ v : W \to Z$$

des morphisme0s :

$$\mathbf{A}^d(v \circ u) = \mathbf{A}^d(u) \circ \mathbf{A}^d(v).$$

Preuve :

i) On va démontrer ce points pour $d = 3$; car nous ne nous intéresserons, dans la suite, que rarement à des dimensions supérieures à 3. Notons que la démonstration en dimension quelconque est identique à celle que nous allons donner ; mais serait d'une lecture assez difficile. Soit donc (e_1, e_2, e_3) une base de V, pour toute forme 3-linéaire alternée f et tout triplet (v_1, v_2, v_3) d'éléments de V, il existe des éléments $\xi_{ij 1\leq i,j\leq 3}$, de K, tels que pour tout $1 \leq i \leq 3$,

$$v_i = \xi_{i1}e_1 + \xi_{i2}e_2 + \xi_{i3}e_3 .$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} f(v_1, v_2, v_3) &= f(\xi_{11}e_1 + \xi_{12}e_2 + \xi_{13}e_3, \xi_{21}e_1 + \xi_{22}e_2 + \xi_{23}e_3, \xi_{31}e_1 + \xi_{32}e_2 + \xi_{33}e_3) \\ &= \xi_{11}\xi_{22}\xi_{33}f(e_1, e_2, e_3) + \xi_{11}\xi_{23}\xi_{32}f(e_1, e_3, e_2) + \\ &\quad \xi_{12}\xi_{21}\xi_{33}f(e_2, e_1, e_3) + \xi_{12}\xi_{23}\xi_{31}f(e_2, e_3, e_1) + \\ &\quad \xi_{13}\xi_{21}\xi_{32}f(e_3, e_1, e_2) + \xi_{13}\xi_{22}\xi_{31}f(e_3, e_2, e_1) ; \end{aligned}$$

en effet, les autres termes obtenus en développant l'expression « comportent tous deux vecteurs de base identiques » et sont donc nuls d'après la proposition II.2.3. D'après II.2.1ii on obtient finalement :

$$f(v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} \xi_{11}\xi_{22}\xi_{33} + \xi_{12}\xi_{23}\xi_{31} + \xi_{13}\xi_{21}\xi_{32} \\ -\xi_{13}\xi_{22}\xi_{31} - \xi_{12}\xi_{21}\xi_{33} - \xi_{11}\xi_{23}\xi_{32} \end{pmatrix} f(e_1, e_2, e_3) . \qquad 1$$

Si l'on note de manière tout à fait usuelle

$$\det_{e_1,e_2,e_3}(\cdot) : V^3 \to K$$

l'application qui aux triplet de vecteurs (v_1, V_2, V_3) associe

$$\begin{aligned} &\xi_{11}\xi_{22}\xi_{33} + \xi_{12}\xi_{23}\xi_{31} \\ &\qquad + \xi_{13}\xi_{21}\xi_{32} - \xi_{13}\xi_{22}\xi_{31} \\ &\qquad - \xi_{12}\xi_{21}\xi_{33} - \xi_{11}\xi_{23}\xi_{32} , \end{aligned}$$

on montre facilement que $\det_{e_1,e_2,e_3}(\cdot)$ est une forme 3-linéaire alternée, non nulle et que toute forme alternée f s'écrit de manière unique

$$f = f(e_1, e_2, e_3)\det_{e_1,e_2,e_3}(\cdot) \in \mathbf{A}^3(V).$$

Autrement dit, $\det_{e_1,e_2,e_3}(\cdot)$ est une base de la droite vectorielle $\mathbf{A}^3(V)$.

On peut donner l'argument plus intrinsèque suivant : Si $d = \dim V = 1$, d'après la remarque II.2.2, et le corollaire II.1.4, il est clair que

$$\dim \mathbf{A}^1(V) = \dim V^* = 1 .$$

Supposons que $\dim V > 1$. Soit $D \subset V$ un sous-espace vectoriel de dimension 1. Soit H un supplémentaire de D dans V. On rappel que

$$\dim H = \dim V - 1 = d - 1 .$$

Étant donné un vecteur v non nul de D, *i.e.* une base de D, à tout $f \in \mathbf{A}^d(V)$ on associe $\phi_v(f) \in \mathbf{A}^{d-1}(H)$ de la manière suivante : Pour tout $d-1$-uplet

$$h_{k\ ,2\le k\le d} \in H \text{ on pose : } [\phi_v(f)](h_2,\ldots,h_d) := f(v,h_2,\ldots,h_d) .$$

On vérifie sans difficulté que ϕ_v est un morphisme0 d'espaces vectoriels de $\mathbf{A}^d(V)$ dans $\mathbf{A}^{d-1}(H)$. Reste maintenant à montrer, ceci étant laissé en exercice, que ϕ_v est injectif. Si on fait alors l'hypothèse de récurence, déjà vérifiée pour $d' = 1$, que pour tout K-espace vectoriel V' de dimension $d' \le d$, $\mathbf{A}^{d'}(V')$ est de dimension 1, $\dim \mathbf{A}^{d-1}(H) = 1$ et par injectivité de ϕ_v

$$\dim \mathbf{A}^d(V) = \dim \mathbf{A}^{d-1}(H) = 1 .$$

ii) Ce point est tout à fait formel et laissé en exercice.

Définition II.2.3 Pour tout $u \in \mathrm{End}(V)$, II.2.1ii $\mathbf{A}^d(u)$ est un endomorphisme de de $\mathbf{A}^d(V)$. Or d'après II.2.1pro.alternees, $\mathbf{A}^d(V)$ est une droite; $\mathbf{A}^d(u)$ est, par conséquent une homothétie.

i) On appellera *déterminant de* u et on notera $\det(u)$ le rapport de l'homothétie $\mathbf{A}^d(u)$.

ii) Une base $(e_1,e_2,\ldots,e_d)$ de V étant fixée, à tout d-uplet $(v_1,\ldots,v_d)$ de vecteurs de V, on peut associer un unique endomorphisme u de V défini par : $u(e_i) = v_{i1\le i\le d}$. On appellera *déterminant du système de vecteurs*
$(v_1,\ldots,v_d)$ <u>*dans la base* $(e_1,\ldots,e_d)$</u> et on notera $\det()e_1,\ldots,e_d(v_1,\ldots,v_d)$ le déterminant de u au sens de (i).

Remarque II.2.4 Remarquons que, dans la définition précédente, le mot <u>déterminant</u> désigne deux objets de nature suffisamment différente pour mériter de le souligner : Le nombre $\det(u)$ défini au point (i) est une quantité parfaitement intrinsèque défini indépendam ment du choix d'une quelconque; pour la raison que le rapport d'une homothétie est toujours <u>bien défini.</u>

En revanche le déterminant d'un système de vecteur n'est ni plus ni moins que l'image de ce système par une certaine forme d-linéaire alternée $\det()e_1,\ldots,e_d$ définie au moyen d'une base de V.

Proposition II.2.5 *i Un morphisme0* $u : V \to W$ *(o* V et W sont de même dimension d,) est inversible si et seulement si $\mathbf{A}^d(u)$ est inversible. Dans le cas où u est un endomorphisme de V, ceci équivaut à dire que u est inversible si et seulement si* $\det(u) \neq 0$.

ii Le point (i) a pour conséquence immédiate que, une base $(e_1, \ldots, e_d)$ de V étant fixée, un système $(v_1, \ldots, v_d)$ de vecteurs de V est libre si et seulement si

$$\circ\,/BiDifah\det(_)e_1, \ldots, e_d(v_1, \ldots, v_d) \;\neq\; 0.$$

Corollaire II.2.6 *Étant doné un K-espace vectoriel V, la proposition précédente et II.2.1ii montrent que l'application*

$$\det(:)(\mathrm{GL}(V), \circ) \to (K^*, *)$$

est un morphisme0 de groupes.

Proposition II.2.7 *Si u est un endomorphisme d'un K-espace vectoriel V de dimension finie d, et $u^* \in \mathrm{End}(V^*)$ désigne son adjoint (cf. II.1.2) alors*

$$\det(u) \;=\; \det(u^*).$$

II.2.8 . −Exercices

Exercice II.2.8.1 Démontrer les points de cette section laissés en exercice.

II.3 . −Formes bilinéaires

Définition II.3.1 Étant donné un K-espace vectoriel V, une *forme bilinéaire sur* V est une application linéaire (*i.e.* un K-morphisme0) $\phi\ :\ V\ \to\ V^*$ (cf. def.dual). Pour tout $x \in V$, $\phi(x)$ est une forme linéaire sur V, c'est-à-dire que l'application :

$$(x, y) \mapsto \phi(x)(y)$$

est linéaire en y. Par ailleurs, elle est linéaire en x du fait que $\phi\ :\ V\ \to\ V^*$ est une application linéaire. On l'écrit le plus souvent :

$$\begin{array}{rcl} \phi : V \times V & \to & K \\ (x, y) & \mapsto & \phi(x, y) := \phi(x)(y)\ . \end{array}$$

Définition II.3.2 Si ϕ est une forme bilinéarie sur un K-espace vcl V, d'après II.1.2, ϕ^* est une application linéaire $(V^*)^* \to V^*$ c'est-à-dire, d'après II.1.5 une application linéaire $V \to V^*$.

On dira que ϕ est *symétrique* si

$$\phi^* = \phi.$$

On vérifiera sans difficulté que cela équivaut à dire que pour tout $(x, y) \in V \times V$,

$$\phi(x, y)\ =\ \phi(y, x).$$

yes

Définition II.3.3 On dira qu'une forme bilinéaire $\phi\ :\ V\ \to\ K$ est *non dégénérée* si c'est un morphisme0 injectif. Notons que si V est de dimension finie, cela équivaut à dire que ϕ est un isomorphisme0 (cf. cor.dimension.dual).

On vérifiera que cela signifie que pour x fixé $\phi(x, y) = 0$ pour tout $y \in V$ si et seulement si $x = 0$.

On dira encore que « le seul vecteur ϕ-orthogonal à tout vecteur de V est 0_V. »

Définition II.3.4 Étant donnés un K-espace vectoriel V et $\phi\ :\ V\ \to\ V^*$ une forme bilinéaire symétrique sur V, pour toute partie $S \subset V$, on appelle *orthogonal de* S *pour* ϕ et l'on note

$$S^{\perp,\phi}\ :=\ \{x \in V, \mid \phi(s, x) = 0,\ \forall s \in S\}.$$

On remarque que $S^{\perp,\phi}$ le plus souvent noté $S^{\perp}$, (si aucune confusion n'est à craindre,) est un sous-K-espace vectoriel de V, quel que soit S.

Définition II.3.5 Étant donnée une forme bilinéaire $\phi\ :\ V\ \to\ V^*$, un vecteur *isotrope* pour ϕ est un élément $x \in V$ tel que $\phi(x, x) = 0$.

Définition II.3.6 Étant donnée une forme bilinéaire $\phi : V \to V^*$, on appelle *forme quadratique associée à ϕ* l'application :

$$\begin{aligned} Q : V &\to K \\ x &\mapsto \phi(x,x) \ . \end{aligned}$$

On dira que ϕ est la *forme polaire associée à Q*. On rappelle que pour tout $\lambda \in K$, et tout $x \in V$,

$$Q(\lambda x) \ = \ \lambda^2 Q(x).$$

Dans toute la fin de cette section, le corps considéré est désormais $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels ; même si les définitions qui suivent pourraient éventuellement être données pour le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels.

Définition II.3.7 On dira qu'une forme quadratique Q sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel V, de forme pômaire associée ϕ est *définie positive* si pour tout $x \in V$

$$Q(x) \geq 0$$

et $Q(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$; c'est-à-dire si ϕ n'a pas de vecteur isotrope (cf. II.3.5.)

Dans ce cas on dira que ϕ est un *produit scalaire* sur V et on adoptera la notation :

$$< x, y > := \ \phi(x,y).$$

On dira parfois simplement que la forme bilinéaire ϕ est *définie positive.*

Proposition II.3.8 *Si Q est une forme quadratique définie positive sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel V, de forme pôlaire associée ϕ, alors ϕ est non dégénérée.*

Remarque II.3.9 Il faut noter qu'une forme bilinéaire non dégénérée peut être associée à une forme quadratique qui n'est pas définie positive. L'exemple le plus simple est donné par la *forme hyperbolique* sur $\mathbb{R}^2$:

$$\phi((x_1,x_2),(y_1,y_2)) \ := \ x_1x_2 - y_1y_2.$$

Définition II.3.10 Étant donnée une forme quadratique Q définie positive sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel V, on appelle *norme* associée à Q et on note $|x|_Q$ ou simplement $|x|$ la nrome d'un élément de V l'application :

$$\begin{aligned} |-| : V &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{Q(x)} \ . \end{aligned}$$

Proposition II.3.11 *Si Q est une forme quadratique définie positive sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel V, la nrome associée à Q vérifie pour tout triplet (x, y, z) d' éléments de V :*

i $|x - y| = 0$ *si et seulement si* $x = y$;

ii $|x - yX = |y - x|$;

iii $|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$,
C'est-à-dire que l'application

$$\begin{array}{rcl} V \times V & \to & \mathbb{R}^+ \\ (x, y) & \mapsto & |x - y| \end{array}$$

est une distance ;

iv *pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,*

$$|\lambda x| = |\ \lambda\ |\ |x|.$$

Définition II.3.12 Étant donnée une forme bilinéaire ϕ définie positive sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel V de dimension finie d, on appelle *base ϕ-orthogonale*, (resp. *base ϕ-orthonormée*) de V, une base $(v_1, \ldots, v_d)$ vérifiant

$$(*)\phi(v_i, v_j) = 0 \ \forall\ 1 \leq i < j \leq d$$

(resp. (*) et

$$\phi(v_i, v_i) = 1 \ \forall\ 1 \leq i \leq d.)$$

Proposition II.3.13 *Étant donnés un $\mathbb{R}$-espace vectoriel V de dimension finie d, et ϕ une forme bilinéaire définie positive ϕ sur V, pour tout sous-espace vectoriel W de V, $W^{\perp,\phi}$ et W sont supplémentaires.*

Corollaire II.3.14 *Un $\mathbb{R}$-espace vectoriel V de diemsnion finie muni d'une forme bilinéaire définie positive ϕ possède toujours une base ϕ-orthonormée.*

II.4 . −Endomorphismes orthogonaux, auto-adjoints

Dans cette section on ne suppose pas nécessairement que le corps K est $\mathbb{R}$. On désignera par V un K-espace vectoriel de dimension finie $d \geq 1$, et par ϕ une forme bilinéaire symétrique (cf. II.3.1) non dégénérée (cf. II.3.3) sur V.

Définition II.4.1 Un endomorphisme u de l'espace vectoriel V (*i.e.* une application K-linéaire de V dans lui-même) est ϕ-*orthogonal* (ou simplement *orthogonal* s'il 'ny a aucune ambiguïté) si

$$\phi \;=\; u^* \circ \phi \circ u,$$

(où l'on rapplle que $u^* : V^* \to V^*$ désigne l'adjoint de u (cf. II.1.2).)

Cette définition équivaut à : pour tout $x \in V$,

$$\phi(x) \;=\; u^*(\phi(u(x))),$$

qui est une égalité dans V^*, c'est à dire une égalité entre formes linéaires, *i.e.* entre applications ; donc équivalente à : pour tout $y \in V$,

$$\begin{array}{rrcl} & \phi(x)(y) & = & [u^*(\phi(u(x)))](y) \\ (\text{cf. } \widetilde{\text{II}}.1.2) & \phi(x)(y) & = & [\phi(u(x)) \circ u](y) \\ \equiv & \phi(x)(y) & = & [\phi(u(x))](u(y)) \\ \equiv & \phi(x,y) & = & \phi(u(x), u(y))\ . \end{array}$$

Définition II.4.2 On dit qu'un endomorphisme u de V est ϕ-*auto-adjoint* (ou simplement *auto-adjoint* s'il n'y a aucune ambiguïté) si

$$\phi \circ u \;=\; u^* \circ \phi.$$

On montre, par un procédé analotue à celui utilisé en II.3.4, que cette identité équivaut à : pour tout $(x, y) \in V \times V$,

$$\phi(x, u(y)) \;=\; \phi(u(x), y).$$

Proposition II.4.3 *Un endomorphisme u de V est ϕ-orthogonal si et seulement si l'image par u d'une base ϕ-orthogonal (cf. II.3.12) est une base orthogonal.*

Proposition II.4.4 *Un endomorphisme u de V est ϕ-auto-adjoint si et seulement si la matrice M_u de u dans une base ϕ-orthogonormée (cf. II.3.12) est symétrique.*

Corollaire II.4.5 *Soit ψ une forme bilinéaire symétrique sur V. Alors :*

i l'endomorphisme $u_\psi : \phi^{-1} \circ \psi$ de V est ϕ-auto-adjoint ;

ii pour tout $(x, y) \in V \times V$,

$$\psi(x, y) \;=\; \phi(x, u_\psi(y))\ ;$$

iii la matrice de u_ψ (usuellement appelée la matrice de ψ) dans une base ϕ-orthogonal est symétrique.

II.4.6 . −Exercices

Exercice II.4.6.1 Donner une preuve des propositions non démontrée de la section II.4.

II.5 . −Groupe orthogonal

Dans cette section V est un K-espace vectoriel de dimension finie $d \in \mathbb{N}^*$. Soit ϕ une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur V (cf. II.3.3), (cf. II.3.2).

Proposition II.5.1 *Le sous-ensemble de* $\mathrm{GL}(V)$ *des endomorphismes inversibles de* V *ϕ-orthogonaux (cf. II.4.1), est un sous-groupe de* $\mathrm{GL}(V)$ *appelé groupe ϕ-orthogonal et noté* $\mathcal{O}_\phi(V)$.

Preuve : Il est clair que $\mathrm{Id}_V \in \mathcal{O}_\phi(V)$. Par ailleurs, pour tout couple (f, g) d'endomorphismes ϕ-orthogonaux de V,

$$\begin{array}{rcl} (f \circ g)^* \circ \phi \circ (f \circ g) & \overset{=}{\text{(cf. II.1.1)}} & g^* \circ f^* \circ \phi \circ f \circ g \\ & = & g^* \circ \phi \circ g \\ & = & \phi\,; \end{array}$$

c'est-à-dire que $f \circ g$ est ϕ-orthogonal.

Pour tout $f \in \mathcal{O}_\phi(V)$,

$$\begin{array}{rcl} (f^{-1})^* \circ \phi \circ f^{-1} & \overset{=}{\text{(cf. II.1.3)}} & (f^*)^{-1} \circ \phi \circ f^{-1} \\ & = & (f^*)^{-1} \circ (f^* \circ \phi \circ f) \circ f^{-1} \\ & = & \phi\,; \end{array}$$

c'est-à-dire que f^{-1} est ϕ-orthogonal.

Proposition II.5.1 *Pour tout* $u \in \mathcal{O}_\phi(V)$,

$$\det(u)^2 = 1,$$

(cf. II.2.6).

Preuve : Pour tout $u \in \mathcal{O}_\phi(V)$,

$$\begin{array}{rccc} & \phi & = & u^* \circ \phi \circ u \\ \overset{\rightarrow}{\text{(cf. II.2.1ii)}} & \mathbf{A}^d(\phi) & = & \mathbf{A}^d(u^*) \circ \mathbf{A}^d(\phi) \circ \mathbf{A}^d(u) \\ \overset{\rightarrow}{\text{(cf. II.2.3i)}} & \mathbf{A}^d(\phi) & = & \det(()u^*).\det(u)\mathbf{A}^d(\phi) \\ \overset{\rightarrow}{\text{(cf. II.2.7)}} & \mathbf{A}^d(\phi) & = & \det(u)^2\mathbf{A}^d(\phi) \\ \rightarrow & \det(u)xs^2 & = & 1\,; \end{array}$$

en effet, ϕ est un isomorphisme0 puisqu'elle est non dégénérée (cf. II.3.3).

Corollaire II.5.1 *La restriction de l'application* $\det$ *(cf. II.2.6) au sous-groupe* $\mathcal{O}_\phi(V)$ *de* $\mathrm{GL}(V)$ *est un morphisme0 de groupes :*

$$\det(:)\mathcal{O}_\phi(V) \to (\mathbb{Z}^\times, *)$$

(o $(\mathbb{Z}^\times, *)$ est le sous-groupe multiplicatif des éléments inversibles de $\mathbb{Z}$ i.e. l'ensemble $\{-1; 1\}$ muni de la multiplication.)*

Définition II.5.2 On appellera *groupe spécial orthogonal* et on notera

$$\mathcal{SO}_\phi(V) \ := \ \mathrm{Ker}\,(\det(:)\mathcal{O}_\phi(V) \to (\mathbb{Z}^\times, *))$$

le noyau de l'application déterminant sur $\mathcal{O}_\phi(V)$.

Remarque II.5.3 i) Notons que $\mathcal{SO}_\phi(V)$ est un sous-groupe distingué de $\mathcal{O}_\phi(V)$.

ii) Remarquons encore, que le quotient $\mathcal{O}_\phi(V)/\mathcal{SO}_\phi(V)$ s'identifie canoniquement à l'image de $\det$ autrement dit à $\mathbb{Z}^\times$.

II.6 . $-$Un cas particulier

l'étude de $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$

Dans cette section on considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $V := \mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel :

$$\begin{array}{rcl} <>: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ ((x,y),(x',y')) & \mapsto & xx' + yy' \end{array}$$

II.6.1. $-$ on notera

$$\mathcal{O}_2(\mathbb{R}) := \mathcal{O}_{<>}(\mathbb{R}^2)$$

(resp.

$$\mathcal{SO}_2(\mathbb{R}) := \mathcal{SO}_{<>}(\mathbb{R}^2))$$

le groupe orthogonale (cf. II.5.1) (resp. le groupe spécial orthogonal (cf. II.5.2)) de $(\mathbb{R}^2, <>)$.

Remarque II.6.2 Étant donné un élément $\gamma \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ si $\lambda \in \mathbb{R}$, est une valeur propre de γ, alors

$$\lambda^2 \; = \; 1.$$

En effet, si x est un vecteur propre non nul associé à λ, on a :

$$\begin{array}{rcl} < x, x > & = & < \gamma(x), \gamma(x) > \\ & = & < \lambda x, \lambda x > \\ & = & \lambda^2 < x, x > . \end{array}$$

II.6.3. $-$ soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des bases orthogonals de $V = (\mathbb{R}^2, <>)$ *i.e.* des bases $<>$-orthogonals de $\mathbb{R}^2$ (cf. II.3.12). Si (b_1, b_2) est un couple d' éléments de $\mathcal{B}$, il existe un unique $\phi \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ tel que $\phi(b_1) = b_2$, (cf. II.4.3) (cette notation symbolique, que nous serons amenés à utiliser par la suite, signifiant que $\phi(e_1) = e_2$ et $\phi(e_1') = e_2'$ où $b_1 := (e_1, e_1')$ et $b_2 := (e_2, e_2')$)

Ainsi, pour tout couple (b_1, b_2) d' éléments de $\mathcal{B}$,

$$\det_{b_1}(b_2) \; = \; \det_{b_2}(b_1) \; \in \mathbb{Z}^\times. \qquad \text{II.6.3.1}$$

On définit la relation binaire $\sim$ sur $\mathcal{B}$ de la manière suivante :

$$b_1 \sim b_2 \text{ si } \det_{b_1}(b_2) = 1. \qquad \text{II.6.3.2}$$

Proposition II.6.4 *i La relation $\sim$ est une relation d'équivalence.*

ii Un élément b_0 de $\mathcal{B}$ <u>étant choisi</u> l'application

$$\begin{array}{rcl} \det()b_0 : \mathcal{B} & \to & \mathbb{Z}^\times \\ b & \mapsto & \det_{b_0}(b) \end{array}$$

induit une bijection encore noté

$$\det()b_0 : \mathcal{B}/\sim \to \mathbb{Z}^\times$$

de l'ensemble $\mathcal{B}/\sim$ des classes selon $\sim$ dans $\mathbb{Z}^\times$.

iii Si b_0 et b_0' sont des éléments de $\mathcal{B}$, on a la relation suivantre entre les isomorphismes $\det()b_0$ et $\det()b_0'$ définis comme en (ii) :

$$\det()b_0' \;=\; \det_{b_0}(b_0')\det()b_0'.$$

Définition II.6.5 On dira qu'on a*choisi une orientation* sur l'espace vectoriel euclidien $V = (\mathbb{R}^2, <>)$ si l'on a choisi un isomorphisme0

$$\mathcal{B}/\sim \cong \mathbb{Z}^\times.$$

On peut choisir un tel isomorphisme0 en choisissant un élément b_0 de $\mathcal{B}$ (cf. II.6.4), au quel cas on dire que $(\mathbb{R}^2, <>, b_0)$ est un *espace vectoriel euclidien orienté.*

Une orientation étant choisie sur V (V étant orienté) on appellera *base orthogonal directe* (resp. *rétrograde*) un élément de $\mathcal{B}$ correspondant à $1 \in \mathbb{Z}^\times$ (resp. $-1 \in \mathbb{Z}^\times$)

Un corrolaire direct de ce qui précède et de la proposition II.4.3 est :

Proposition II.6.6 *Une orientation étant choisie sur $V = (\mathbb{R}^2, <>)$, un élément $\rho \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ appartient à $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ si et seulement si l'image d'une base orthogonal directe par ρ est une base orthogonal directe.*

Remarque II.6.7 Tous les résultats énoncés depuis II.6.3 pour $\mathbb{R}^2$, restent valables pour n'importe quel espace vectoriel réel de dimension finie muni d'un produit scalaire.

II.6.8. – D'après la remarque II.5.3ii, on sait que $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})/\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ est un ensemble de deux classes dont l'une est $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ qui est la classe de l'identité et l'autre sera notée $\mathcal{O}_{2,-}(\mathbb{R})$.

Proposition II.6.9 *Étant donné un couple (u, v) d' éléments de V tels que*

$$< v, v > = < u, u > = \; 1,$$

il existe un unique élément $\rho_{u,v}$ de $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{O}_{2,-}(\mathbb{R})$) tel que

$$\rho_{u,v}(u) \;=\; v.$$

Preuve : Un endormorphisme est complètement déterminé dès qu'on connaît l'image d'une base. Soit donc u' un vecteur de V tel que (u, u') forme un systèmùe libre. On peut, sans, restriction de généralité, supposer que $|u'| = 1$ et $< u, u' >= 0$.

Si l'image v' de u' par ρ existe, comme $\rho \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ est un endomorphisme orthogonal, nécessairement, $< v', v >= 0$ et $|v'| = 1$. L'espace vectoriel V étant de dimension 2, $v^\perp$ est une droite vectorielle (cf. II.3.13); il y a donc deux vecteurs v'_1 et $v'_2 = -v'_1$ répondant aux conditions $|v'_i| = 1$ et $< v, v'_i >= 0$ pour $i = 1$ ou 2.

Le couple (u, u') étant une base de V il existe un unique couple $(a_u, a_{u'})$ (resp. $(a'_{i,u}, a'_{i,u'}$ pour $i = 1$ ou $2,$) d' éléments de $\mathbb{R}$ tel que $v = a_u.u + a_{u'}u'$ (resp. $v'_i = a'_{i,u}u + a'_{i,u'}u'$ pour $i = 1$ ou 2 ;) et

$$\begin{array}{rcl} a_u^2 + a_{u'}^2 & = & 1 \\ a'^2_{i,u} + a'^2_{i,u'} & = & 1 \\ a_u a'_{i,u} + a_{u'} a'_{u'} & = & 0\ , \end{array} \qquad \text{II.6.1}$$

pour $i = 1$ ou 2.

Si $v'_i = \rho_{u,v}(v)$, par définition (cf. II.2.3),

$$\det(()\rho_{u,v}) \ = \ \det_{u,u'}(v, v'_i).$$

Or

$$d_i \ := \ \det_{u,u'}(v, v'_i) \ = \ a_u a'_{i,u'} - a_{u'} a'_{i,u}\ ;$$

d'où, du fait que $v'_1 = -v'_2$, $d_1 = -d_2$. Par ailleurs remarquons que le produit des deux premières lignes de II.6.1 donnent :

$$a_u^2 a'^2_{i,u'} + a_{u'}^2 a'^2_{i,u} + a_u^2 a'^2_{i,u} + a_{u'}^2 a'^2_{i,u'} = 1\ ; \qquad \text{II.6.2}$$

tandis que la troisième ligne de II.6.1 implique :

$$a_u^2 a'^2_{i,u} + a_{u'}^2 a'^2_{i,u'} + 2a_u a_{u'} a'_{i,u} a'_{i,u'} = 0. \qquad \text{II.6.3}$$

Les identités II.6.2 et II.6.3 impliquent :

$$\begin{array}{rccl} & a_u^2 a'^2_{i,u'} + a_{u'}^2 a'^2_{i,u} - 2a_u a_{u'} a'_{i,u} a'_{i,u'} & = & 1 \\ \equiv & (a_u a'_{i,u'} - a_{u'} a'_{i,u})^2 & = & 1 \\ \equiv & \det_{(u,u')}(v, v'_i)^2 & = & 1\ . \end{array}$$

Le déterminant de ρ étant fixé, une seul des deux vecteurs v'_i $i = 1$ ou 2, convient.

Remarque II.6.4 On tire facilement du calcul qui précède, que

$$\det_{(u,u')}(u,v) \;=\; a_{u'} \;= < v, u' > .$$

Étude de $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$

Proposition II.6.5 *Une base orthogonal* (e_1, e_2) *de* $(\mathbb{R}^2, <>)$, *étant fixée, pour tout élément* $\rho \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$, *il existe un unique couple* (a, b) *d' éléments de* $\mathbb{R}$, *tel que la matrice de* ρ *dans la base* (e_1, e_2) *soit :*

$$M_\rho \;=\; \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Preuve : L' élément $\rho \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ est, a priori, représenté par une matrice

$$M_\rho^{(e_1,e_2)} \;:=\; \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

dans la base (e_1, e_2). Le fait que ρ appartienne à $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$, équivaut à :

$$\begin{aligned}
&\left\{ \begin{array}{ccc} < \rho(e_1), \rho(e_1) > & = & < e_1, e_1 > \\ < \rho(e_1), \rho(e_2) > & = & < e_2, e_2 > \\ < \rho(e_1), \rho(e_2) > & = & < e_1, e_2 > \\ \det(()\rho) & = & 1 \end{array} \right. \\
\equiv \quad &\left\{ \begin{array}{ccc} a^2 + c^2 & = & 1 \\ b^2 + d^2 & = & 1 \\ ab + cd & = & 0 \\ ad - bc & = & 1 \end{array} \right. \\
\to \quad &\left\{ \begin{array}{ccc} a^2 + c^2 & = & 1 \\ b^2 + d^2 & = & 1 \\ ab^2 + bcd & = & 0 \\ abd + cd^2 & = & 0 \\ ad - bc & = & 1 \end{array} \right. \qquad \text{II.6.1} \\
\to \quad &\left\{ \begin{array}{ccc} a^2 + c^2 & = & 1 \\ b^2 + d^2 & = & 1 \\ ab^2 + ad^2 - d & = & 0 \\ cb^2 + b + cd^2 & = & 0 \end{array} \right. \\
\to \quad &\left\{ \begin{array}{ccc} a & = & d \\ b & = & -c\,. \end{array} \right.
\end{aligned}$$

On peut donc poser

$$M_\rho^{(e_1,e_2)} \;:=\; \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Proposition II.6.2 *Soit $\rho \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$, pour toute base orthogonal (e_1, e_2) et tout couple de vecteurs (u, u') de V tel que*

$$|u| \;=\; |u'| \;=\; 1,$$

on a :

$$\det_{(e_1,e_2)}(u, \rho(u)) \;=\; \det_{(e_1,e_2)}(u', \rho(u')).$$

Preuve : Soit ϕ l'unique élément de $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$, tel que $u = \phi(e_1)$. Soit $v := \phi(e_2)$. Alors :

$$\begin{array}{rcl} \det_{(e_1,e_2)}(u, \rho(u)) & = & \\ detbase(e_1, e_2)u, v\det_{(u,v)}(u, \rho(u)) & & \\ & = & \det(()\phi)\det_{(u,v)}(u, \rho(u)) \\ & = & \det_{(u,v)}(u, \rho(u)), \end{array} \qquad \text{II.6.1}$$

(resp.

$$\det_{(e_1,e_2)}(u', \rho(u')) \;=\; \det_{(u,v)}(u', \rho(u')).) \qquad \text{II.6.2}$$

Soit ψ l'unique élément de $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$, tel que $\psi(u) = u'$. En posans $v' := \psi(v)$, on a :

$$\begin{array}{rcl} \det_{(u,v)}(u', \rho(u')) & = & \det_{(u,v)}(u', v')\det_{(u',v')}(u', \rho(u')) \\ & = & \det(()\psi)\det_{(u',v')}(u', \rho(u')) \\ & = & \det_{(u',v')}(u', \rho(u'))\ . \end{array} \qquad \text{II.6.3}$$

D'après la proposition II.6.5, il existe un unique couple de réels a_ρ, b_ρ (resp. $(a_\phi, b_\phi),$) tel que la matrice de ρ (resp. ϕ) dans la base (u, v) soit :

$$M_\rho \;=\; \begin{pmatrix} a_\rho & -b_\rho \\ b_\rho & a_\rho. \end{pmatrix} \qquad \text{II.6.4}$$

(resp.

$$M_\phi \;=\; \begin{pmatrix} a_\phi & -b_\phi \\ b_\phi & a_\phi. \end{pmatrix}) \qquad \text{II.6.5}$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{array}{rcl} \det_{(e_1,e_2)}(u', \rho(u')) & \overset{=}{\text{(cf. II.6.2)}} & \det_{(u,v)}(u', \rho(u')) \\ & \overset{=}{\text{(cf. II.6.3)}} & \det_{(u',v')}(u', \rho(u')) \\ & \overset{=}{\text{(cf. II.6.4)}} & < \rho(u'), v' > \\ & = & < \rho(\phi(u)), \phi(v) > \\ & \overset{=}{\text{(cf. II.6.5)}} & < a_\phi\rho(u) + b_\phi\rho(v), -b_\phi u + a_\phi v > \\ & = & -a_\phi b_\phi < \rho(u), u > +{a_\phi}^2 < \rho(u), v > -{b_\phi}^2 < \rho(v), u > a_\phi b_\phi < \rho(v), v > \\ & \overset{=}{\text{(cf. II.6.4)}} & -a_\phi b_\phi a_\rho + {a_\phi}^2 b_\rho + {b_\phi}^2 b_\rho + a_\phi b_\phi a_\rho \\ & = & b_\rho \\ & = & < \rho(u), v > \\ & \overset{=}{\text{(cf. II.6.4)}} & \det_{(u,v)}(u, \rho(u)) \\ & \overset{=}{\text{(cf. II.6.1)}} & \det_{(e_1,e_2)}(u, \rho(u)). \end{array}$$

Corollaire II.6.6 *Les identités II.6.1 et II.6.2 combinées au résultat de la proposition II.6.7 montre en fait que pour un vecteur unitaire u, la quantité $\det_{(e_1,e_2)}(u,\rho(u))$ ne dépend pas de la base (e_1,e_2) mais uniquement de l'orientation ; et qu'elle est changée en son opposée si l'on change d'orientation.*

On pourra avoir besoin, par la suite de la formule qui en découle, pour deux bases orthonormées (e_1,e_2) et (f_1,f_2)

$$\det_{(e_1,e_2)}(e_1,\rho(e_1)) \;=\; \det_{(e_1,e_2)}(f_1,f_2)\det_{(f_1,f_2)}(f_1,\rho(f_1)). \qquad \textit{II.6.6.1}$$

Proposition II.6.7 *Une base orthogonal (e_1,e_2) de V étant fixée ; avec les notations de la proposition II.6.9, si (u,v) et (u',v') sont deux couples de vecteurs de norme 1, de V tels que :*

$$\det_{(e_1,e_2)}(u,v) \;=\; \det_{(e_1,e_2)}(u',v')$$

alors : si $\rho_{u,v}$ et $\rho_{u',v'}$ sont dans $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$,

$$\mathrm{Tr}(\rho_{u,v}) \;=\; \mathrm{Tr}(\rho_{u',v'}),$$

$$\rho_{u,v} \;=\; \rho_{u',v'}.$$

Preuve : Simplifions les notations en posant $\rho := \rho_{u,v}$ (resp. $\rho' := \rho_{u',v'}$.)

Posons $w' := \rho(u')$. Soient z (resp. z') des vecteurs de norme 1 respectivement orthonaux à u et u' et tels que $\det_{(u,z)}(u',z') = 1$. Notons que cela revient juste à considérer l' élément $\phi \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ tel que $\phi(u) = u'$ donné par la proposition II.6.9, et à poser $z' := \phi(z)$. On a alors :

$$\begin{array}{rcl}
<w',z'> & \overset{=}{\text{(cf. II.6.4)}} & \det_{(u',z')}(u',w') \\
& = & \det_{(u',z')}(u',\rho(u')) \\
& = & \det(()\phi)\det_{(u',z')}(u',\rho(u')) \\
& = & \det_{(u,z)}(u',\rho(u')) \\
& \overset{=}{\text{(cf. II.6.2)}} & \det_{(u,z)}(u,\rho(u)) \\
& = & \det_{(e_1,e_2)}(u,z)\det_{(e_1,e_2)}(u,v) \\
& \overset{=}{\text{hypothèse}} & \det_{(e_1,e_2)}(u,z)\det_{(e_1,e_2)}(u',v') \\
& = & \det_{(e_1,e_2)}(u,z)\det_{(e_1,e_2)}(u',z')\det_{(u',z')}(u',v') \\
& = & \det_{(u',z')}(u',v') \\
& = & <v',z'> \;.
\end{array} \qquad \text{II.6.1}$$

On rappelle le résultat bien connu d'algèbre linéaire que la trace d'un endomorphisme est un invariant par changement de base ; et peut donc se calculer dans n'importe quelle base :

$$\begin{aligned} 2 < w', u' > \quad & \overset{=}{\text{(cf. II.6.5)}} \quad \mathrm{Tr}(\rho) \\ & \overset{=}{\text{hypothèse}} \quad \mathrm{Tr}(\rho') \\ & \overset{=}{\text{(cf. II.6.5)}} \quad 2 < v', u' > \ . \end{aligned} \tag{II.6.2}$$

Les égalités II.6.1 et II.6.2 prouvent que

$$w' \ = \ v' \ ;$$

ce qui achève la preuve.

Proposition II.6.3 *Le groupe $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ est un groupe abélien (commutatif.)*

Preuve : Pour tout couple (ρ, ϕ) d' éléments de $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$,

$$\mathrm{Tr}_{\rho\phi/} \ (=) \ \mathrm{Tr}_{\phi\rho/} \ (;) \tag{II.6.1}$$

cette propriété étant vraie en général sur l'anneau des endomorphismes $\mathrm{End}(V)$.
Soit u, v une base orthogonale de V.

$$\begin{aligned} \det{}_{(e_1,e_2)}(u, \phi(\rho(u))) \quad & \overset{=}{\text{(cf. II.6.2)}} \quad \det{}_{)}(e_1, e_2)[\phi(u), \phi(\rho(\phi(u)))] \\ & = \quad \det(()\phi)\det{}_{)}\phi(u), \phi(v)[\phi(u), \phi(\rho(\phi(u)))] \\ & \overset{=}{\text{(cf. II.6.4)}} \quad < \phi(v), \phi(\rho(\phi(u))) > \\ & = \quad < v, \rho(\phi(u)) > \\ & \overset{=}{\text{(cf. II.6.4)}} \quad \det{}_{(u,v)}(u, \rho(\phi(u)). \end{aligned}$$

Cette dernière égalité et II.6.1 permettent de conclure, grâce à la proposition (cf. II.6.7), que

$$\phi \circ \rho \ = \ \rho \circ \phi \ .$$

Théorème II.6.2 *Une orientation étant fixée sur* $V = (\mathbb{R}^2, <>)$, *pour tout élément* $\rho \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ *il existe un unique couple* (a, b) *de nombres réels tels que, la matrice de* ρ *soit*

$$M_\rho = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

dans toute base orthogonal directe et

$$M_\rho = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

dans toute base orthogonal rétrograde.

Preuve : Étant donné un élément $\rho \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$,l a proposition II.6.5 montre qu'il existe, a priori, de un tel couple de réels, pour chaque base orthogonal de V. Supposons donc donnés deux couples (a, b) et (a', b') correspondant à des bases (e_1, e_2) (e'_1, e'_2) respectivement.

Le fait que la trace est un invariant de l'endomorphisme implique :

$$\begin{aligned} 2a &= \mathrm{Tr}(\rho) \\ &= 2a'. \end{aligned}$$

Par aillrus :

$$\begin{aligned} b' \quad & \overset{=}{II.6.4} \quad \det_{(e'_1,e'_2)}(e'_1, \rho(e'_1)) \\ & \overset{=}{II.6.6.1} \quad \det_{(e_1,e_2)}(e'_1, e'_2).\det_{(e_1,e_2)}(e_1, \rho(e_1)) \\ & \overset{=}{II.6.4} \det_{(e_1,e_2)}(e'_1, e'_2).b\ . \end{aligned}$$

Ceci achève la preuve du théorème.

Définition II.6.1 On appellera *rotation* un élément de $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$.

Étude de $\mathcal{O}_{2,-}(\mathbb{R})$

II.6.2. – Soit (e_1, e_2) une base orthogonal de $V = (\mathbb{R}^2, <>)$. On définit :

$$\begin{aligned} \sigma : V &\to V \\ e_1 &\mapsto e_1 \\ e_2 &\mapsto -e_2\ . \end{aligned} \qquad \text{II.6.2.1}$$

Il est clair que $\sigma \in \mathcal{O}_{2,-}(\mathbb{R})$, et qu'un résultat général sur les groupes quotients permet de faire l'identification :

$$\mathcal{O}_{2,-}(\mathbb{R}) \cong \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})\sigma. \qquad \text{II.6.2.2}$$

Proposition II.6.3 *i Pour tout* $\rho \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$,

$$\rho \circ \sigma \;=\; \sigma \circ \rho^{-1}.$$

ii Pour tout $\gamma \in \mathcal{O}_{2,-}(\mathbb{R})$,

$$\gamma^2 \;=\; \mathrm{Id}_.$$

Corollaire II.6.4 *Les éléments de* $\mathcal{O}_{2,-}(\mathbb{R})$ *sont des symétries orthogonales.*

II.6.5 . –Exercices

Exercice II.6.5.1 Donner une preuve des propositions non démontrées de la section II.6.

Exercice II.6.5.2 Montrer que si une rotation II.6.1 a des valeurs propres, alors c'est nécessairement
$\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$ ou $-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$.

Exercice II.6.5.3 Montrer que si $\gamma \in \mathcal{O}_{2,-}(\mathbb{R})$, γ possède nécessairement1 et -1 comme valeurs propres ; et est donc diagonalisable dans une base orthogonal.

Exercice II.6.5.4 a) Étudier la composée de deux symétries orthogonales *i.e.* de deux éléments de $\mathcal{O}_{2,-}(\mathbb{R})$.

b) En déduire, un élément σ de $\mathcal{O}_{2,-}(\mathbb{R})$ étant fixé, que pour tout $\gamma \in \mathcal{O}_{2,-}(\mathbb{R})$, il existe un unique $\rho \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ tel que

$$\gamma \;=\; \rho\sigma.$$

c) Déterminer les éléments caractéristiques de γ en fonction de ceux de σ et de ceux de ρ.

II.7 . –Angles dans le plan euclidien, interprétation complexe

Dans cette section, V est le plan euclidien, *i.e.* le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel $<>$ (cf. II.6).

II.7.1. – Une base orthogonal (e_1, e_2) de V étant choisie, on définit un isomorphisme0 de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{C} : V & \to & \mathbb{C} \\ e_1 & \mapsto & 1 \\ e_2 & \mapsto & i\ . \end{array} \tag{II.7.1.1}$$

Proposition II.7.2 *La base (e_1, e_2) étant fixée, pour $\rho \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ (cf. II.6.1) (resp. $\gamma \in \mathcal{O}_{2,-}(\mathbb{R})$ (cf. II.6.8)),*

i Il existe un unique nombre complexe

$$u_{(e_1,e_2),\rho} \ \in \ s_1 \ := \ \{z \in \mathbb{C} \ | \ |z| = 1\}$$

(resp. $u_{(e_1,e_2),\gamma} \in S_1,$) tel que pour tout $v \in V$,

$$\rho(v) \ = \ \mathbb{C}^{-1}(u_{(e_1,e_2),\rho}\mathbb{C}(v)), \tag{II.7.2.1}$$

(resp.

$$\gamma(v) \ = \ \mathbb{C}^{-1}(u_{(e_1,e_2),\gamma}\overline{\mathbb{C}(v)})\ .) \tag{II.7.2.2}$$

ii Pour toute base orthogonal (e'_1, e'_2) et pour tout $\rho \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$,

$$u_{(e_1,e_2),\rho} \ = \ u_{(e'_1,e'_2),\rho} \text{ si } \det()(e_1, e_2)(e'_1, e'_2) = 1, \tag{II.7.2.3}$$

$$u_{(e_1,e_2),\rho} \ = \ \overline{u_{(e'_1,e'_2),\rho}} \text{ si } \det()(e_1, e_2)(e'_1, e'_2) = -1. \tag{II.7.2.4}$$

Ce qui signifie encore, que l'application

$$\rho \ \mapsto \ u_\rho \ := \ u_{(e_1,e_2),\rho}$$

est bien définie dès qu'une orientation est choisie (cf. II.6.5).

iii Une orientation étant choisie, l'application

$$\begin{array}{rcl} \Gamma : \mathcal{SO}_2(\mathbb{R}) & \to & S_1 \\ \rho & \mapsto & u_\rho, \end{array} \tag{II.7.2.5}$$

est un isomorphisme0 de groupes abéliens.

Preuve : La donnée de la base (e_1, e_2) fixe une oritnetation sur $V = (\mathbb{R}^2, <>)$. Pour tout $\rho \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$, il existe un unique couple $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ d' éléments de $\mathbb{R}^2$ tel que la matrice M_ρ de ρ dans toute base directe est

$$m_\rho = \begin{pmatrix} \mathbf{a} & -\mathbf{b} \\ \mathbf{b} & \mathbf{a} \end{pmatrix}$$

(cf. II.6.2). Pour tout $v = xe_1 + ye_2 \in (\mathbb{R}^2, >>)$,

$$\begin{aligned} \mathbb{C}(\rho(v)) &= \mathbb{C}(M_\rho . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) \\ &= \mathbb{C}(\begin{pmatrix} \mathbf{a} & -\mathbf{b} \\ \mathbf{b} & \mathbf{a} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) \\ &= \mathbb{C}(\begin{pmatrix} \mathbf{a}x - \mathbf{b}y \\ \mathbf{b}x + \mathbf{a}y \end{pmatrix}) \\ &= \mathbf{a}x - \mathbf{b}y + i(\mathbf{b}x + \mathbf{a}y) \\ &= (\mathbf{a} + i\mathbf{b})(x + iy) \\ &= (\mathbf{a} + i\mathbf{b})\mathbb{C}(v). \end{aligned}$$

Ceci prouve II.7.2.1.

Le point (ii) est une conséquence directe du théorème II.6.2 ; ce qui permet de poser

$$u_\rho := \mathbf{a} + i\mathbf{b}. \qquad \text{II.7.3}$$

Soit

$$\begin{aligned} \sigma : V &\rightarrow V \\ e_1 &\mapsto e_1 \\ e_2 &\mapsto -e_2. \end{aligned}$$

Il est clair que $\sigma \in \mathcal{O}_{2,-}(\mathbb{R})$ (cf. II.6.8), et que

$$\mathbb{C}^{-1}(\overline{\mathbb{C}(v)} = \sigma(v). \qquad \text{II.7.4}$$

Posons

$$\rho := \gamma \circ \sigma \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R}),$$

qui équivaut encore à

$$\gamma = \rho \circ \sigma. \qquad \text{II.7.5}$$

D'après le début de la démonstration, il existe un unique u_ρ ne dépendant que de l'orientation satisfaisant II.7.2.1. Pour tout $v := xe_1 + ye_2 \in V$,

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{C}(\gamma(v)) & \overset{=}{\text{(cf. II.7.5)}} & \mathbb{C}(\rho(\sigma(v))) \\ & \overset{=}{\text{(cf. II.7.4)}} & \mathbb{C}[\rho(\mathbb{C}^{-1}(\overline{\mathbb{C}(v)}))] \\ & \overset{=}{\text{(cf. II.7.2.1)}} & \mathbb{C}[\mathbb{C}^{-1}[u_\rho.\mathbb{C}(\mathbb{C}^{-1}(\overline{\mathbb{C}(v)}))]] \\ & = & u_\rho.\overline{\mathbb{C}(v)}\ ; \end{array}$$

ce qui prouve (cf. II.7.2.2) ; et achève la preuve des points (i) et (ii).

Attention : Le complexe u_ρ dans le calcul précédent n'a pas l'air de dépendre de la base ; mais seulement de l'orientation. C'est de fait bien le cas ; mais $\rho := \gamma \circ \sigma$ n'est pas indépendant de la base choisie.

C'est pourqoi le point (ii) de cette proposition ne concerne que les éléments de $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$.

II.7.6. — On rappelle qu'on appelle *vecteur unitaire* un élément $u \in V$ tel que $|u| = \sqrt{< u, u >} = 1$. Soit $\mathcal{U}$ l'ensemble des couples (u, v) de vecteurs unitaires de $V = (\mathbb{R}^2, <>)$. Notons $\sim$ la relation binaire définie sur $\mathcal{U}$ par

$$(u, v) \sim (u', v')$$

s'il existe un élément $\rho \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ tel que

$$\begin{array}{rcl} u' & = & \rho(u) \\ v' & = & \rho(v)\ . \end{array} \qquad \text{II.7.6.1}$$

Proposition II.7.7 *La relation définie en II.7.6.1 est une relation d'équivalence.*

Définition II.7.8 On appellera *angle de vecteurs* ou parfois *angle orienté de vecteurs* une classe d'équivalence pour la relation $\sim$ définie en II.7.6.1.

On notera $\widehat{(u, v)}$ la classe du couple (u, v) appartenant à $\mathcal{U}$.

Définition II.7.9 Si u et v sont deux vecteurs <u>non nuls</u> mais non nécessairementunitaires de V, on appellera *angle de vecteurs* et on notera encore $\widehat{(u, v)}$ l'angle $\widehat{(\frac{u}{|u|}, \frac{v}{|v|})}$.

II.7.10. — La proposition II.6.9 permet de définir une application

$$\begin{array}{rcl} \omega : \mathcal{U} & \to & \mathcal{SO}_2(\mathbb{R}) \\ (u, v) & \mapsto & \rho_{u,v}, \end{array} \qquad \text{II.7.10.1}$$

(où $\rho_{u,v}$ est caractérisé par $\rho_{u,v}(u) = v$.)

Proposition II.7.11 *L'application ω induit une bijection, encore notée*

$$\begin{array}{rcl} \omega : \mathcal{U}/\sim & \to & \mathcal{SO}_2(\mathbb{R}) \\ \widehat{(u,v)} & \mapsto & \rho_{u,v} \end{array}$$

(o $\sim$ est la relation définie en II.7.6.1.)*

Preuve : Soient (u, v) et (u', v') dans $\mathcal{U}$ tels que

$$(u,v) \sim (u',v'),$$

i.e.

$$\widehat{(u,v)} = \widehat{(u',v')}.$$

Il existe un unique $\rho \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ tel que

$$\begin{array}{rcl} \rho(u) & = & u' \\ \rho(v) & = & v', \end{array}$$

(cf. II.7.8).

Notons $\rho_{u,v}$ (resp. $\rho_{u',v'}$) l'unique élément de $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ tel que $\rho_{u,v}(u) = v$, (resp. $\rho_{u',v'}(u') = v'$) (cf. II.6.9).

Il vient alors :

$$\begin{array}{rcl} \rho_{u,v}(u') & = & \rho_{u,v}(\rho(u)) \\ & \underset{\text{(cf. II.6.3)}}{=} & \rho(\rho_{u,v}(u) \\ & = & \rho(v) \\ & = & v'. \end{array}$$

Ceci signifie, grâce à la proposition II.6.9 que

$$\begin{array}{rcl} \omega((u,v)) & = & \rho_{u,v} \\ & = & \rho_{u',v'} \\ & = & \omega((u',v')) \ ; \end{array}$$

c'est-à-dire que ω « passe au quotient » autrement dit, définit bien une application

$$\omega : \mathcal{U}/\sim \to \mathcal{SO}_2(\mathbb{R}).$$

Supposons maintenant donnés deux angles $\widehat{(u,v)}$ et $\widehat{(u',v')}$ tels que

$$\omega(\widehat{(u,v)}) = \omega(\widehat{(u',v')}).$$

Pour tout représentant (x, y) (resp. (x', y')) de $\widehat{(u, v)}$, (resp. $\widehat{(u', v')}$) dans $\mathcal{U}$, on a :

$$\rho_{x,y} \;=\; \rho_{x',y'}$$

par définition même de ω (cf. II.7.10.1). Par ailleurs, il existe un unique $\rho_{x,x'} \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$, tel que $\rho_{x,x'}(x) = x'$ (cf. II.6.9). Or :

$$\begin{array}{rcl} \rho_{x,x'}(y) & = & \rho_{x,x'}(\rho_{x,y}(x)) \\ & \underset{\text{(cf. II.6.3)}}{=} & \rho_{x,y}(\rho_{x,x'}(x)) \\ & = & \rho_{x,y}(x') \\ & = & \rho_{x',y'}(x') \\ & = & y' \;; \end{array}$$

ce qui signifie exactement (cf. II.7.6.1) que (x, y) et (x', y') définissent la même classe dans $\mathcal{U}/\sim$, ou encore que

$$\widehat{(x, y)} \;=\; \widehat{(x', y')} \;;$$

c'est-à-dire, finalement, que

$$\widehat{(u, v)} \;=\; \widehat{(u', v')}.$$

Nous venons donc de démontrer que ω est une application *injective.*

De plus, pour tout $\rho \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$, $\widehat{(u, \rho(u))}$ pour u un vecteur unitaire de V, est un antécédent pour ρ par ω. Il en résulte donc que ω est une application *surjective ;* et finalement que ω est une *bijection.*

Corollaire II.7.12 *La bijection ω permet de définir une loi d'addition sur les angles, induite par la loi de composition $\circ$ sur $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$. Plus précisément, on posera, pour deux angles $\widehat{(u, v)}$ et$\widehat{(u', v')}$,*

$$\widehat{(u, v)} + \widehat{(u', v')} \;:=\; \omega^{-1}[\omega(\widehat{(u, v)}) \circ \omega(\widehat{(u', v')})].$$

Avec cette définition, il est immédiat de vérifier que l'on a une relation de Chasles *pour les angles ; c'est-à-dire que pour tout triplet (u, v, w) de vecteurs unitaires :*

$$\widehat{(u, v)} + \widehat{(v, w)} \;=\; \widehat{(u, w)}. \qquad \textit{II.7.12.1}$$

Il s'ensuit de manière totologique que ω devient un isomorphisme0 de groupes abéliens de $(\mathcal{U}/\sim, +)$ sur $(\mathcal{SO}_2(\mathbb{R}), \circ)$.

Remarque II.7.13 Remarquons qu'avec la définition de l'*addition* sur les angles déduites du corrolaire II.7.12, on a :

$$\begin{array}{rcl} \widehat{(u,v)} & = & -\widehat{(v,u)} \\ 0_{\mathcal{U}/\sim} & = & \widehat{(u,u)}. \end{array}$$

Notons que les constructons qui précèdent, depuis II.7.6 sont indépendantes de toute orientaiton sur V.

II.7.14. — Indépendamment de toute orientation on dispose désormais d'un isomorphisme0 de groupes abéliens

$$\omega : (\mathcal{U}/\sim, +) \;\to\; (\mathcal{SO}_2(\mathbb{R}), \circ)$$

(cf. II.7.12). Une orientation étant choisie, on dipose de plus d'un isomorphisme0 de groupes abéliens

$$\Gamma : (\mathcal{SO}_2(\mathbb{R}), \circ) \;\to\; (S_1, *).$$

Enfin on a, également indépendamment de toute orientation sur V un isomorphisme0 de groupes abéliens

$$\arg : S_1 \;\to\; \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}.$$

Ceci conduit à la définition suivante :

Définition II.7.15 Une orientation étant choisie, on appelle *mesure principale de l'angle orienté* $\widehat{(u,v)}$ le représentant dans $[0, 2\pi[$ de

$$\arg[\Gamma(\omega(\widehat{(u,v)}))]$$

que l'on notera $\underline{\widehat{(u,v)}}$.

Remarque II.7.16 i Les identités II.7.2.3 et II.7.2.4 montre que si l'on change d'orientation la mesure principale θ de l'angle $\widehat{(u,v)}$ est changée en $-\theta$modulo2π.

ii Une orientation étant choisie, on fera parfois l'abus de notation qui consiste à écrire $\widehat{(u,v)}$ au lieu de $\underline{\widehat{(u,v)}}$.

Proposition II.7.17 *Deux vecteurs u et v unitaires sont orthogonaux (resp. colinéaires) si et seulement si*

$$\bmod \widehat{(u,v)}\pi\frac{\pi}{s},$$

(resp.

$$\bmod \widehat{(u,v)}\pi 0.)$$

Preuve : En combinant II.7.3 et II.6.4, on observe que

$$\sin(\widehat{(u,v)}) \;=\; \det{}_{()}(e_1,e_2)(u,\rho_{u,v}(u)) \;=\; \det{}_{()}(e_1,e_2)(u,v), \qquad \text{II.7.18}$$

(où (e_1,e_2) est une base orthogonal quelconque.)

	Les vecteurs u et v unitaires sont orthogonaux
si et seulement si	(u,v) est une base orthogonal directe
	relativement à l'orientation définie par (e_1,e_2)
	ou (u,v) est une base orthogonal rétrograde
	relativement à l'orientation définie par (e_1,e_2) ;
$\equiv$	$\det{}_{()}(e_1,e_2)(u,v) \;=\; 1$ ou $\det{}_{()}(e_1,e_2)(u,v) \;=\; -1$;
$\equiv$	$\sin(\widehat{(u,v)}) \;=\; 1$ ou $\sin(\widehat{(u,v)}) \;=\; -1$;
$\equiv$	$\mathrm{mod}\ \widehat{(u,v)}\pi\frac{\pi}{2}$.
	(resp. Les vecteurs u et v sont colinéaires
si et seulement si	$\det{}_{()}(e_1,e_2)(u,v) = 0$;
$\equiv$	$\sin(\widehat{(u,v)}) = 0$;
$\equiv$	$\mathrm{mod}\ \widehat{(u,v)}\pi 0$.)

Remarque II.7.19 Notons que si l'on utilise l'orientation dans la preuve de la proposition précédente, le résultat, quant à lui, ne dépend pas de l'orientation.

II.7.20. – À tout élément $\phi \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ correspond une application

$$\begin{array}{rcl} \hat{\phi} : \mathcal{U} & \to & \mathcal{U} \\ (u,v) & \mapsto & (\phi(u),\phi(v)) \,. \end{array} \qquad \text{II.7.20.1}$$

Proposition II.7.21 *i Pour tout élément $\phi \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$, l'application $\hat{\phi}$ « passe au quotient » i.e. induit une application encore notée*

$$\begin{array}{rcl} \hat{\phi} : \mathcal{U}/\sim & \to & \mathcal{U}/\sim \\ \widehat{(u,v)} & \mapsto & (\widehat{\phi(u),\phi(v)}). \end{array}$$

ii L'application $\phi \mapsto \hat{\phi}$ est en fait un morphisme0 de groupes :

[-] de $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ dans le groupe $\mathrm{Aut}_{(}(\mathcal{U})/\sim,+)$ des automorphismes de $(\mathcal{U}/\sim,+)$,

[-] qui se factorise à travers le groupe des automorphismes intérieurs de $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$,

[-] et dont l'image est le sous-groupe à deux éléments (isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) de $\mathrm{Aut}_{(}(\mathcal{U})/\sim,+)$ formé des éléments Id et $-\mathrm{Id}$.

Plus précisément, pour tout $\phi \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$, *(resp.* $\phi \in \mathcal{O}_{2,-}(\mathbb{R})$, *)*

$$\hat{\phi} \;=\; \mathrm{Id}_{\mathcal{U}/\sim},$$

(resp.

$$\hat{\phi} \;=\; -\mathrm{Id}_{\mathcal{U}/\sim}.)$$

Preuve :

i Soit $\phi \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$. Soient (x, y) et (x', y') deux représentants d'un angle $\widehat{(u, v)}$.

$$\begin{array}{rcl} \phi \circ \omega((x, y)) \circ \phi^{-1}(\phi(x)) & \overset{=}{\text{(cf. II.7.10.1)}} & \phi \circ \rho_{x,y} \circ \phi^{-1}(\phi(x)) \\ & = & \phi \circ \rho_{x,y}(x) \\ & = & \phi(y). \end{array}$$

Il s'ensuit, d'après II.6.9 que

$$\omega((\phi(x), \phi(y))) \;=\; \rho_{\phi(x),\phi(y)} \;=\; \phi \circ \omega((x, y)) \circ \phi^{-1}. \qquad \text{II.7.22}$$

En effet, $\phi \circ \omega((x, y)) \circ \phi^{-1}$ est bien un élément de $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ car c'est le conjugué, par un élément de $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ d'un élément de $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ qui est distingué dans $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ (cf. II.5.3i).

Par ailleurs

$$\begin{array}{rcl} \phi \circ \omega((x, y))\phi^{-1}(\phi(x')) & \overset{=}{\text{(cf. II.7.11)}} & \phi \circ \omega((x', y')) \circ \phi^{-1}(\phi(x')) \\ & = & \phi \circ \omega((x', y'))(x') \\ & = & \phi(y'), \end{array}$$

ce qui prouve d'après II.7.11 que

$$\omega((\phi(x), \phi(y))) \;=\; \phi \circ \omega((x, y)) \circ \phi^{-1}. \qquad \text{II.7.23}$$

En combinant II.7.22 et II.7.23, on obtient :

$$\begin{array}{rcl} \omega(\widehat{(\phi(x), \phi(y))}) & = & \omega((\phi(x), \phi(y))) \\ & = & \phi \circ \omega((x, y)) \circ \phi^{-1} \\ & = & \phi \circ \omega(\widehat{(u, v)}) \circ \phi^{-1} \\ & = & \omega(\phi(x'), \phi(y'))) \;; \end{array}$$

ce qui prouve, d'après II.7.11 que

$$\widehat{(\phi(x), \phi(y))} \;=\; \widehat{(\phi(x'), \phi(y'))}.$$

ii On vient de montrer que

$$\omega[\hat{\phi}(\widehat{(u,v)})] = \phi \circ \omega(\widehat{(u,v)}) \circ \phi^{-1} ;$$

ce qui signifie exactement que que $\hat{\phi}$ agit sur $\mathcal{U}/\sim$ à travers l' isomorphisme0 ω par conjugaison, autrement dit que ϕ détermine un automorphisme intérieur de $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$. Si $\phi \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$,

$$\begin{array}{rcl} \phi \circ \omega(\widehat{(u,v)}) \circ \phi^{-1} & \overset{=}{\text{(cf. II.6.3)}} & \phi \circ \phi^{-1} \circ \omega(\widehat{(u,v)}) \\ & = & \omega(\widehat{(u,v)}) \end{array}$$

pour tout angle $\widehat{(u,v)} \in \mathcal{U}/\sim$; ce qui signifie que

$$\hat{\phi} = \mathrm{Id}_{\mathcal{U}/\sim}.$$

Si $\phi \in \mathcal{O}_{2,-}(\mathbb{R})$

$$\phi \circ \omega(\widehat{(u,v)}) \circ \phi^{-1} \overset{=}{\text{(cf. II.6.3i)}} \omega(\widehat{(u,v)})^{-1} ;$$

c'est-à-dire que

$$\hat{\phi} = -\mathrm{Id}_{\mathcal{U}/\sim}.$$

Il faut essentiellement retenir de la proposition précédente sa formulation usuelle, à savoir que toute isométrie direct conserve les angles, et que toute isométrie indirecte transforme un angle en son opposé.

II.7.24 . –Exercices

Exercice II.7.24.1 Faire les démonstrations des propositions non démontrées de la section II.7.

Exercice II.7.24.2 Dans la démonstration de la proposition II.7.2, interpréter géométriquement $\rho = \gamma \circ \sigma$, et déterminer ses éléments caractéristiques en fonction de ceux de γ.

Exercice II.7.24.3 Montrer que pour tout $(u, v) \in \mathcal{U}$, (cf. II.7.6),

$$\begin{array}{llcl} \text{i} & \widehat{(-u,v)} & = & \widehat{(u,v)} + \pi \\ \text{ii} & \widehat{(-u,-v)} & = & \widehat{(u,v)} \\ \text{iii} & \widehat{(u,-u)} & = & \pi \,. \end{array}$$