III . −Espaces affines euclidiens, isométries

Dans toute cette section, le corps est $\mathbb{R}$.

III.1 . −Généralités, définitions

Définition III.1.1 On appelle *espace affine euclidien* $(E, \overrightarrow{E}, <>)$ la donnée d'un $\mathbb{R}$-espace affine (cf. I.1.1) $(E, \overrightarrow{E})$ (où l'on note simplement la différence ϕ (cf. I.1.13)

$$(A, B) \mapsto \overrightarrow{AB}$$

pour tout couple (A, B) de points de E ;) et d'un produit scalaire $<>$ sur $\overrightarrow{E}$ (cf. II.3.7).

Définition III.1.2 Soit $(E, \overrightarrow{E}, <>)$ un espace affine euclidien.

i L'espace vectoriel $\overrightarrow{E}$ est canoniquement un *espace vectoriel normé*, où, pour tout vecteur $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E}$, on note
$$|u| := \sqrt{< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} >}$$
la *norme euclidienne* de $\overrightarrow{u}$.

ii L'ensemble E est canoniquement un *espace métrique*, où, pour tout couple (A, B) de points de E, on note
$$d(A, B) := |\overrightarrow{AB}|$$
la *distance euclidienne sur* E.

Définition III.1.3 On dit qu'un espace affine $(E, \overrightarrow{E}, <>)$ est *orienté* si l'on a choisi une orientation (cf. II.6.5) sur $\overrightarrow{E}$.

N.B. L'orientation n'a été définie que pour un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 ; mais on se convaincra aisément que l'orientation est une notion qui ne pose pas de problèmes en dimension supérieure.

III.2 . −Quelques propriétés des triangles dans un plan affine euclidien cocyclicité

III.2.1. – Dans cette section $\mathcal{P} := (\mathbb{R}^2, <>)$ est l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure affine canonique (cf. exe.canonique) ; et d'un produit scalaire $<>$ est appelé le *plan affine euclidien.*

Notons que le fait que $\mathcal{P}$ soit de dimension 2, permet d'appliquer à l'espace vectoriel sous-jacent les résultats des paragraphes (cf. II.6 et II.7.)

Il n'est pas question d'examiner, un à un et dans le détail, les résultats donnés dans les paragraphes (loc. cit.), pour savoir ceux qui sont transposables en dimension plus grande. Remarquons, simplement, par exemple et pour mémoire, que la notion d'angle orienté de vecteurs (cf. def.angle) ne peut être utilisée telle quelle en dimension 3.

Proposition III.2.2 (somme des angles d'un triangle) *La somme des angles d'un triangle* A, B, C *est égale à* π ; *plus précisément, étant donnés trois points distincts* A, B, C *de* $\mathcal{P}$,

$$(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) + (\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}) + (\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) \;=\; \pi.$$

N.B. *On diminuerait la porté de ce résultat, en ne remarquant pas que l'utilisation de l'orientation pour identifier les angles à leur mesure, est ici uniquement un artéfact d'écriture : en effet si l'on change l'orientation, les mesures des angles étant changées en leur opposé, le résultat reste valable modulo* 2π!

Preuve : Ce résultat se prouve par une simple application de la relation de Chasles sur les angles (cf. II.7.12.) En effet :

$$\begin{aligned}
(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) + (\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}) + (\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) \quad &= \quad (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) + (\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CA}}) + \\
&\quad\; (\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) + (\widehat{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{BC}}) + \\
&\quad\; (\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}) - vecangACCA - \\
&\quad\; (\widehat{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{BC}}) \\
\underset{\text{(cf. II.7.12)}}{=} &\quad (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}}) - (\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CA}}) - \\
&\quad\; (\widehat{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{BC}}) \\
\underset{\text{(cf. II.7.24.3)}}{=} &\quad 3\pi \text{ modulo } 2\pi\ .
\end{aligned}$$

Certaines notions définies indépendamment de la structure euclidienne, ont cependant une interprétation intéressante dans ce cadre : c'est ce qu'expriment les proposition III.2.1 et III.2.1.

Proposition III.2.1 *Étant donnés deux points* A*et* b *du plan euclidien* $\mathcal{P}$, I *est le milieu de* A *et* B *(cf. I.5.2s)i et seulement si*

$$d(A,I) = d(B,I)$$

et A, I, B *sont alignés (cf. I.3.1.)*

Définition III.2.2 Étant donnés deux points distincts A et B de $\mathcal{P}$, on appelle *médiatrice du segment* $[A, B]$ l'ensemble des points M de $\mathcal{P}$ tels que

$$d(A, M) = d(B, M).$$

Proposition III.2.3 *Étant donnés deux points distincts* A *et* B *de* $\mathcal{P}$, *la médiatrice de* $[A, B]$ *est* <u>*la droite*</u> *orthogonale à* (AB) *passant par le milieu de* A *et* B

Preuve : Les ingrédients principaux de la démonstration sont les propositions I.3.3, II.3.13 et le théorème de Pythagore.

Proposition III.2.1 *Étant donné quatre points* A, B, C, D *de* $\mathcal{P}$, *deux à deux distincts et non alignés, le quadrilatère* $ABCD$ *est un parallélogramme (cf. I.1.3.iii),) (cf. I.4.1,) si et seulement si*

$$\begin{array}{rcl} d(A,B) & = & d(C,D) \\ & \text{et} & \\ d(A,D) & = & d(B,C)\ . \end{array}$$

La proposition précédente permet donc de donner, <u>dans le cadre euclidien</u> trois définitions équivalentes du paraléllogramme.

Définition III.2.2 On dit qu'un triangle A, C, B est *isocelle de sommet* A, si

$$d(A,B) = d(A,C)\ ,$$

(où d est la distance euclidienne (cf. II.3.10ii).

Proposition III.2.3 *Étant donnés trois points deux à deux distincts A, B, C de $\mathcal{P}$, le triangle ABC est isocelle de sommet A si et seulement si :*

$$(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}) \;=\; (\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}).$$

Preuve : Supposons que ABC soit isocelle *i.e.* $d(A, B) = d(A, C)$. Il s'ensuit que A est un point de la médiatrice (cf. III.2.2 III.2.3) du segment $[B, C]$. Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur (cf. I.3.1,) de la médiatrice de $[B, C]$. Les points B et C étant distincts, par hypothèse, les couple $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{u})$ forment une base de l'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{P}} = \mathbb{R}^2$ sous-jacent à $\mathcal{P}$ (cf. II.3.13.)

Définissons donc une application linéaire

$$\sigma : \begin{array}{ccc} \overrightarrow{\mathcal{P}} & \to & \overrightarrow{\mathcal{P}} \\ \overrightarrow{u} & \mapsto & \overrightarrow{u} \\ \overrightarrow{BC} & \mapsto & \overrightarrow{CB}\,; \end{array}$$

puis $s : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ par

$$s(M) \;:=\; A + \sigma(\overrightarrow{AM}\;.$$

Par construction même, σ est l'application linéaire sous-jacente de s. En outre, $\sigma \in \mathcal{O}_{2,-}(\mathbb{R})$ (cf. II.6.8.)

Enfin on vérifie, sans difficulté, que

$$\begin{array}{rcl} s(A) & = & A, \\ s(B) & = & C, \\ s(C) & = & B\,. \end{array}$$

Il en résulte que

$$\begin{array}{rcl} (\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) & = & (\widehat{\overrightarrow{s(B)s(A)}, \overrightarrow{s(B)s(C)}}) \\ & = & (\widehat{\sigma(\overrightarrow{BA}), \sigma(\overrightarrow{BC})}) \\ & \underset{\text{(cf. II.7.21i)}}{=} & \hat{\sigma}((\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}})) \\ & \underset{\text{(cf. II.7.21ii)}}{=} & -(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}) \\ & = & (\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}})\,. \end{array}$$

La réciproque est laissée en exercice.

Définition III.2.1 i Étant doné un point $\Omega \in \mathcal{P}$ et un nombre réel $r > 0$, on appelle *cercle de centre* Ω *et de rayon* r l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que $d(\Omega, M) = r$.

ii Étant donnés trois points A, B, C non alignés (cf. I.3.1,) de $\mathcal{P}$, il existe un unique cercle $\mathcal{C}$ passant par les points A, B et C appelé *cercle circonscfrit au triangle* ABC.

Notons que ceci résulte facilement du fait que les médiatrices de deux côtés distincts du triangle ABC ne sont par parallèles, et sont donc sécantes en un point équidistant des points A, B, C.

Proposition III.2.2 *Soit* A, B, C *trois points non alignés de* $\mathcal{P}$, *et* Ω *le centre du cercle circonscrit au triangle* ABC. *Alors*

$$(\widehat{\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega C}}) \;=\; 2 * (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}).$$

Preuve : Ceci résulte des proposition III.2.3 appliquée aux trois triangles isocelles ΩAB, ΩBC et ΩCA ; puis de la proposition III.2.2 appliquée aux trois triangles précédents ainsi qu'au triangle ABC.

Proposition III.2.1 *Étant donnés deux points distincts* B *et* C *de* $\mathcal{P}$ *et* Ω *un point de la médiatrice de* $[B, C]$; *si* $A \in \mathcal{P}$ *est tel que*

$$(\widehat{\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega C}}) \;=\; 2 * (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$$

alors A *appartient au cercle de centre* Ω *passant par* B *et* C.

Preuve : Soit O le centre du cercle cirsonscrit au triangle ABC. Le point O appartient à la médiatrice de $[B, C]$ et vérifie, par la proposition III.2.2

$$(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}}) \;=\; 2 * (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}).$$

Il s'ensuit que

$$(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}}) \;=\; (\widehat{\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega C}}).$$

On conclut la démonstration grâce au lemme III.2.1.

Lemme III.2.1 *Soient P et Q deux points distincts de $\mathcal{P}$, si O et O' sont deux points de la médiatrice (cf. III.2.2 III.2.3,) de $[P,Q]$ tels que*

$$\widehat{(\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ})} = \widehat{(\overrightarrow{O'P},\overrightarrow{O'Q})}$$

(cf. II.7.8,) alors

$$O = O'.$$

Preuve : Par définition même des angles II.7.6.1, il existe un élément $\rho \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ (cf. II.5.2) tel que

$$\begin{aligned} \rho(\overrightarrow{OP}) &= \overrightarrow{O'P} \\ \rho(\overrightarrow{OQ}) &= \overrightarrow{O'Q}\,. \end{aligned} \qquad \text{III.2.1}$$

L'application ρ est uniquement déterminée puisque $(\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ})$ est une base de $\overrightarrow{\mathcal{P}} = \mathbb{R}^2$.

Fixons par aileurs, un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ (cf. I.3.1) de la médiatrice de $[P,Q]$; et définissons l'application linéaire $\sigma : \overrightarrow{\mathcal{P}} \to \overrightarrow{\mathcal{P}}$ par $\sigma(\overrightarrow{u}) := \overrightarrow{u}$ et $\sigma(\overrightarrow{PQ} := \overrightarrow{QP}$ (comme dans la démonstration de la proposition III.2.3.)

On a alors

$$\begin{aligned} \sigma(\overrightarrow{OP}) &= \overrightarrow{OQ} \\ \sigma(\overrightarrow{O'P}) &= \overrightarrow{O'Q}\,. \end{aligned} \qquad \text{III.2.2}$$

Il vient alors :

$$\begin{array}{cccc} & \rho(\overrightarrow{OQ}) & \overset{\text{(cf. III.2.1)}}{=} & \overrightarrow{O'Q} \\ \overset{\text{(cf. III.2.2)}}{=} & \rho(\sigma(\overrightarrow{OP})) & = & \sigma(\overrightarrow{O'P}) \\ \equiv & \sigma\circ\rho\circ\sigma(\overrightarrow{OP}) & = & \overrightarrow{O'P}\,. \end{array} \qquad \text{III.2.3}$$

Par ailleurs, d'après III.2.1

$$\rho(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{O'P}. \qquad \text{III.2.4}$$

En général, la donnée de l'image, par une application linéaire d'un seul vecteur de $\mathbb{R}^2$ ne suffit pas à déterminer entièrement cette dernière; mais ρ (par construction) et $\sigma\circ\rho\circ\sigma$ (puisque $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ est un sous-groupe distingué de $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ II.5.3i) sont dans $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$.

Ces deux applications sont donc déterminées par l'image d'un seul vecteur non nul d'après la proposition II.6.9. Il s'ensuit que III.2.3 et III.2.4 entraînent

$$\sigma\circ\rho\circ\sigma = \rho.$$

Or, d'après la proposition II.6.3i,

$$\sigma\circ\rho\circ\sigma = \rho^{-1}\,;$$

d'où

$$\rho \;=\; \rho^{-1}.$$

Si Γ : $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R}) \to S_1$ désigne l' isomorphisme0 défini en II.7.2.5 on a nécessairement

$$\Gamma(\rho)^2 \;=\; 1\;;$$

c'est-à-dire

$$\Gamma(\rho) = 1 \text{ ou } -1\;;$$

c'est-à-dire, finalement,

$$\rho = \mathrm{Id} \text{ ou } -\mathrm{Id}.$$

Si $\rho = \mathrm{Id}$, l'étalité III.2.1 implique $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{O'P}$ *i.e.* $O = O'$.

Si $\rho = -\mathrm{Id}$, l'égalité III.2.1 implique $\overrightarrow{OP} = -\overrightarrow{O'P}$ c'est-à-dire que soit deux des points O, O', P sont confondus, soit les points O, O', P sont sur la droite (OO'). Si donc O et O' sont distincts, P appartient nécessairementà la médiatrice de $[P, Q]$ c'est-à-dire que P est le milieu de $[P, Q]$ ce qui contredit le fait que P et Q sont distincts.

Définition III.2.5 On dit que des points $A_{i i\in[1,n]\cap\mathbb{N}}$ sont *cocycliques* s'il appartiennent à un même cercle.

Corollaire III.2.6 *Quatre points A, B, C, D deux à deux distincts et cocycliques vérifient :*

$$\mathrm{mod}\,(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})\pi(\widehat{\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}}).$$

Preuve : Ce corollaire découle immédiatement de la proposition III.2.2.

Proposition III.2.1 *Étant donnés quatre points A, B, C, D de $\mathcal{P}$, deux à deux distincts ; s'ils vérifient*

$$\mathrm{mod}\,(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})\pi(\widehat{\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}})$$

alors ils sont soit alignés soit cocycliques.

Preuve : Si A, B, C sont alignés

$$\mathrm{mod}\,(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})\pi 0$$

(cf. II.7.17). Il s'ensuit que

$$\mathrm{mod}\,(\widehat{\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}})\pi 0\;;$$

donc que B, C, D sont alignés ; ce qui implique finalement que A, B, C, D sont alignés.

Si A, B, C ne sont pas alignés, notons Ω le centre du cercle circonscrit à A, B, C. On a alors

$$\begin{array}{rcl} 2(\widehat{\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}}) & = & 2(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \\ & \underset{\text{(cf. III.2.2)}}{=} & (\widehat{\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega C}}) \end{array}$$

ce qui prouve grâce à la proposition III.2.1 que D appartient au cercle circonscrit à A, B, C.

III.2.1 . –Exercices

Exercice III.2.1.1 Donner une preuve des propositions non démontrées de la section III.2.

III.3 . −Classification des isométries du plan affine euclidien

Dans cette section $\mathcal{P}$ est le plan affine euclidien (cf. III.2.1).

Définition III.3.1 On appelle *isométrie de* $\mathcal{P}$ une application $i : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ vérifiant, pour tout couple (A, B) de points de $\mathcal{P}$,

$$d(i(A), i(B)) \;=\; d(A, B). \qquad \text{III.3.1.1}$$

Proposition III.3.2 *Si i est une isométrie de $\mathcal{P}$, i possède une application linéaire sous-jacente $\overrightarrow{i} : \overrightarrow{\mathcal{P}} \to \overrightarrow{\mathcal{P}}$ appartenant à $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ (cf. II.5.1) (cf. II.6.1).*

Preuve : La démonstration s'effectuera en plusieurs étapes et comportera des lemmes intermédiaires.

Lemme III.3.1 *Si i est une isométrie de $\mathcal{P}$, pour tout couples (A, B) et (A', B') de points de $\mathcal{P}$, tels que*

$$\overrightarrow{AB} \;=\; \overrightarrow{A'B'}$$

on a

$$\overrightarrow{i(A)i(B)} \;=\; \overrightarrow{i(A')i(B')}.$$

Preuve : La preuve du lemme III.3.1 est un jeu sur les trois définitions équivalentes du parallélogramme, ou tout au moins sur deux d'entre elles.

En effet si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$, il s'ensuit, par la définition I.1.3.iii) que $ABB'A'$ est un paralél-logramme. Ceci implique trivialement (en prenant la norme des égalités vectorielles correspondantes) que

$$\begin{array}{rcl} d(A, B) & = & d(A', B') \\ & \text{et} & \\ d(A, A') & = & d(B, B')\ ; \end{array}$$

(où d est la distance euclidienne (cf. III.1.2ii).)

Par la propriété caractéristique des isométries (cf. III.3.1.1) l'égalité ci-dessus implkique

$$\begin{array}{rcl} d(i(A), i(B)) & = & d(i(A'), i(B')) \\ & \text{et} & \\ d(i(A), i(A')) & = & d(i(B), i(B'))\ ; \end{array}$$

ce qui implique, par la proposition III.2.1, que la quadrilatère $i(A)i(B)i(B')i(A')$ est un paraléllogramme ; d'où finalement, par définition même (cf. I.1.3.iii)), que

$$\overrightarrow{i(A)i(B)} \;=\; \overrightarrow{i(A')i(B')}.$$

Le lemme III.3.1 montre que l'on peut définir l'image d'un vecteur indépendamment de son représentant ; ce qui permet de définir une application $\overrightarrow{i} : \overrightarrow{\mathcal{P}} \to \overrightarrow{\mathcal{P}} = \mathbb{R}^2$ par

$$\overrightarrow{i}(\overrightarrow{u}) := \overrightarrow{i(A)i(B)} \qquad \text{III.3.1}$$

où $\overrightarrow{AB}$ est un représentant quelconque de $\overrightarrow{u}$.

Lemme III.3.2 *Pour toute isométrie i de $\mathcal{P}$, l'application $\overrightarrow{i}$ définie en III.3.1 est additive ; c'est-à-dire que pour tout couple $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, d' éléments de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$,*

$$\overrightarrow{i}(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{i}(\overrightarrow{u}) + \overrightarrow{i}(\overrightarrow{v}).$$

Preuve : La démonstration du lemme III.3.2 repose encore sur l'équivalence de la définition métrique III.2.1 et de la définition vectorielle I.1.3.iii) du paraléllogramme.

En effet, on peu calculer la somme de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ indépendamment du choix de leur représentant respectif grâce au lemme III.3.1. Soit donc $\overrightarrow{OA}$ (resp. $\overrightarrow{OB}$) un représentant de $\overrightarrow{u}$ (resp. $\overrightarrow{v}$.) Soit C l'unique point de $\mathcal{P}$ tel que

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}.$$

Dès lors $OACB$ est un paraléllogramme. Par un argument analogue à celui de la preuve de III.3.1 il suit de la propriété caractéristique des isométries (cf. III.3.1.1), que

$$i(O)i(A)i(C)i(B)$$

est un paraléllogramme. Il s'ensuit que

$$\begin{array}{rrcl} & \overrightarrow{i(O)i(C)} & = & \overrightarrow{i(O)i(A)} + \overrightarrow{i(O)i(B)} \\ \equiv & \overrightarrow{i}(\overrightarrow{OC}) & = & \overrightarrow{i}(\overrightarrow{OA}) + \overrightarrow{i}(\overrightarrow{OB}) \\ \equiv & \overrightarrow{i}(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) & = & \overrightarrow{i}(\overrightarrow{u}) + \overrightarrow{i}(\overrightarrow{v}) . \end{array}$$

À ce stade, on a montré que $\overrightarrow{i}$ est additive ; mais pas tout à fait linéaire. On pourrait ensuite montrer par réccurence que $\overrightarrow{i}(n\overrightarrow{u}) = n\,\overrightarrow{i}(\overrightarrow{u})$, pour tout $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$ et tout $n \in \mathbb{N}$. Enfin on pourrait encore montrer que pour tout p et q dans $\mathbb{N}$, $\overrightarrow{i}(\frac{p}{q}\overrightarrow{u}) = \frac{p}{q}\overrightarrow{i}(\overrightarrow{u})$. C'est-à-dire qu'on obtiendrait que $\overrightarrow{i}$ est $\mathbb{Q}$-linéaire. La propriété caractéristique des isométries (cf. III.3.1.1) prouve qu'une isométrie est continue pour la topologie de la norme euclidienne sur $\mathcal{P}$. On conclurait finalement par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

Nous allons employer une autre voie que celle décrite ci-dessus, dans laquelle la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ est « remplacée » par le fait que tout nnombre réel positif a une racine carrée (inégalité de Cauchy-Schwarz). On va commencer par montrer que $\overrightarrow{i}$ conserve le produit scalaire.

Lemme III.3.1 *Pour tout couple* $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ *d' éléments de* $\overrightarrow{\mathcal{P}}$,

i
$$|\overrightarrow{i}(\overrightarrow{u})| = |\overrightarrow{u}|\ ;$$

ii
$$< \overrightarrow{i}(\overrightarrow{u}), \overrightarrow{i}(\overrightarrow{v}) > = < \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} > .$$

Preuve :

i Résulte immédiatement de III.3.1.1 (cf. III.1.2).

ii

$$\begin{array}{rcl} < \overrightarrow{i}(\overrightarrow{u}), \overrightarrow{i}(\overrightarrow{v}) > & = & \frac{1}{4}[|\overrightarrow{i}(\overrightarrow{u}) + \overrightarrow{i}(\overrightarrow{v})|^2 - |\overrightarrow{i}(\overrightarrow{u}) - \overrightarrow{i}(\overrightarrow{v})|^2] \\ & \underset{(\text{cf. III.3.2})}{=} & \frac{1}{4}[|\overrightarrow{i}(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})|^2 - |\overrightarrow{i}(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})|^2] \\ & \underset{(i)}{=} & \frac{1}{4}[|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}|^2 - |\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}|^2] \\ & = & < \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} > . \end{array}$$

Le point III.3.1i montre que $\overrightarrow{i}$ est injective et donc bijective (par le théorème noyau-image). Enfin le point III.3.1ii montre que $\overrightarrow{i} \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$, si l'on admet sa compatibilité à la multiplication par les réels ; qui est le seul point qu'il nous reste à démontrer ; et qui fait l'objet du lemme suivant :

Lemme III.3.1 *Étant donnée une isométrie* i *de* $\mathcal{P}$, *pour tout vecteur* $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$ *et tout nombre réel* λ,
$$\overrightarrow{i}(\lambda\overrightarrow{u}) = \lambda\overrightarrow{i}(\overrightarrow{u}).$$

Preuve : D'après III.3.1i,

$$\begin{array}{rcl} |\overrightarrow{i}(\lambda\overrightarrow{u})| & = & |\lambda\overrightarrow{u}| \\ & = & |\lambda|\,|\overrightarrow{u}| \\ & = & |\lambda|\,|\overrightarrow{i}(\overrightarrow{u})|. \end{array}$$

Par ailleurs

$$\begin{array}{rcl} |< \overrightarrow{i}(\overrightarrow{u}), \overrightarrow{i}(\lambda\overrightarrow{u}) >| & \underset{(\text{cf. III.3.1ii})}{=} & |< \overrightarrow{u}, \lambda\overrightarrow{u} >| \\ & = & |\lambda|\,|\overrightarrow{u}||\overrightarrow{u}| \\ & = & |\overrightarrow{i}(\overrightarrow{u})||\overrightarrow{i}(\lambda\overrightarrow{u})|\ ; \end{array}$$

cette dernière égalité résultant de la première série d'égalités que nous avons écrite dans cette preuve. Il résulte, par ailleurs, de cette dernière série d'égalités, par la réciproque de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que $\overrightarrow{i}(\overrightarrow{u})$ et $\overrightarrow{i}(\lambda\overrightarrow{u})$ sont colinéaires. Enfin, combinée avec ce résultat, l'égalité $|\overrightarrow{i}(\lambda\overrightarrow{u})| = |\lambda|\,|\overrightarrow{i}(\overrightarrow{u})|$ montre que l'on a soit

$$\overrightarrow{i}(\lambda\overrightarrow{u}) \;=\; \lambda\overrightarrow{i}(\overrightarrow{u}),$$

soit

$$\overrightarrow{i}(\lambda\overrightarrow{u}) \;=\; -\lambda\overrightarrow{i}(\overrightarrow{u}),$$

On montre que cette deuxième égalité implique nécessairement, par le fait que i est une isométrie, que $\lambda = 0$; ce qui achève la preuve du lemme III.3.1.

On a ainsi terminé la démonstration de la proposition III.3.2.

On peut d'hores et déjà classer les isométries de la manière suivante :

Définition III.3.1 Une isométrie i de $\mathcal{P}$, sera appelée *directe* (resp. *indirecte*) si son application linéaire sous-jacente $\overrightarrow{i}$ est dans $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{O}_{2,-}(\mathbb{R})$) (cf. II.6.1).

Proposition III.3.2 *i L'ensemble $\mathcal{I}$ des isométries de $\mathcal{P}$ muni de la loi de composition $\circ$ est un groupe.*

ii L'application naturelle

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{I}, \circ) & \to & (\mathcal{O}_2(\mathbb{R}), \circ) \\ i & \mapsto & \overrightarrow{i} \end{array}$$

est un morphisme0 surjectif de groupes dont le noyau est le sous-groupe des translations $\mathcal{T}(\mathcal{P})$.

Preuve :

i Il est clair que la composée de deux isométries est encore une isométrie. En outre, l'identité de $\mathcal{P}$ est bien évidemment une isométrie.
Soit $i \in \mathcal{I}$ une isométrie. Choisissons un point $A \in \mathcal{P}$ et définissons $j : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ par

$$j(M) \;:=\; A + \overrightarrow{i}^{-1}(\overrightarrow{i(A)M})$$

pour tout $M \in \mathcal{P}$. Rappelons que $\overrightarrow{i}^{-1}$ a un sens puisque $\overrightarrow{i} \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$.

Pour tout P et Q points de$\mathcal{P}$,

$$
\begin{aligned}
|\overrightarrow{j(P)j(Q)}| &= |\overrightarrow{(A+\overrightarrow{i}^{-1}(\overrightarrow{i(A)P}))(A+\overrightarrow{i}^{-1}(\overrightarrow{i(A)Q}))}| \\
&= |\overrightarrow{i}^{-1}(\overrightarrow{i(A)Q}) - \overrightarrow{i}^{-1}(\overrightarrow{i(A)P})| \\
&= |\overrightarrow{i}^{-1}(\overrightarrow{PQ})| \\
&= |\overrightarrow{PQ}|\,;
\end{aligned}
$$

ce qui prouve que j est une isométrie. Il résulte également des étapes intermédiaires du calcul précédent, que $\overrightarrow{j} = \overrightarrow{i}^{-1}$.

Pour tout point $M \in \mathcal{P}$,

$$
\begin{aligned}
i(j(M)) &= i[A+\overrightarrow{i}^{-1}(\overrightarrow{i(A)M})] \\
&= i(A) + \overrightarrow{i}\,[\overrightarrow{i}^{-1}(\overrightarrow{i(A)M})] \\
&= i(A) + \overrightarrow{i(A)M} \\
&= M.
\end{aligned}
$$

Ce qui prouve que j est un inverse à droite pour i.

De même, pour tout $M \in \mathcal{P}$,

$$
\begin{aligned}
j(i(M)) &= A+\overrightarrow{i}^{-1}(\overrightarrow{i(A)i(M)}) \\
&= A+\overrightarrow{i}^{-1}[\overrightarrow{i}\,(\overrightarrow{AM})] \\
&= A+\overrightarrow{AM} \\
&= M\,;
\end{aligned}
$$

ce qui prouve que j est un inverse à gauche pour i.

ii Ce point est laisé en exercice.

Lemme III.3.1 *Soit* $r \in \mathcal{I}$, *telle que* $\overrightarrow{r} \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ *et* $\overrightarrow{r} \neq \mathrm{Id}$, *alors* r *possède un unique point fixe.*

Preuve : Soit $A \in \mathcal{P}$ un point fixe par r, tout point $B \neq A$ n'est pas fixe par r. En effet, si r avait deux points fixe distincts, $\overrightarrow{r}$ aurait un vecteur fixe, ce qui impliquerait que $\overrightarrow{r} = \mathrm{Id}$ par la proposition II.6.9. S'il existe, le point fixe de r est unique.

Soit $A \in \mathcal{P}$. Si A est fixe par r, c'est l'unique point fixe cherché.

Si A n'est pas fixe considérons d'abord le cas où $\overrightarrow{r} = -\mathrm{Id}$. Dans ce cas, il est facile de montrer que le milieu de $[A, r(A)]$ est un point fixe pour r.

Si maintenant $\overrightarrow{r} \neq -\mathrm{Id}$, comme r est bijective, $r^2(A) \neq r(A)$. Par ailleurs, $\overrightarrow{Ar(A)}$ et $\overrightarrow{r(A)r^2(A)} = \overrightarrow{r}(\overrightarrow{Ar(A)})$ ne sont pas colinéaires. S'ils l'étaint, en effet, $\overrightarrow{Ar(A)}$ serait un vecteur propre pour $\overrightarrow{r}$ ce qui impliquerait $\overrightarrow{r} = \mathrm{Id}$ ou $-\mathrm{Id}$. Il résulte de ce qui précède, que les médiatrices respectives de $[A, r(A)]$ et $[r(A), r^2(A)]$ ne sont pas parallèles ; et donc sécantes en un point O. On peut alors montrer, grâce à la proposition III.2.2 que O est un point fixe pour r.

Définition III.3.1 On appelle *rotation* une isométrie r dont

$$\text{l'application linéaire sous-jacente } \overrightarrow{r} \text{ appartient à } \mathcal{SO}_2(\mathbb{R}) \setminus \{\mathrm{Id}\}\ .$$

Une rotation possède un poin fixe appelé *centre*. Une orientation étant choisie sur $\mathcal{P}$ on appelle *angle de la rotation* r l'argument de $\Gamma(\overrightarrow{r})$ (cf. II.7.2.5).

Définition III.3.2 Étant donnée une droite $D \subset \mathcal{P}$ (cf. I.3.1), on appelle *réflexion d'axe* D une isométrie s qui est aussi une symétrie (cf. I.5.2).

On remarque que les réflexions sont les symétries dont la direction est orthogonale à $\overrightarrow{D}$.

Les résultats précédents premettent d'établir la classification suivante des isométries :

Proposition III.3.3 *a Si $i \in \mathcal{I}$ est une isométrie directe, i est soit*

[i] soit une translation ($\overrightarrow{i} = \mathrm{Id}_,$)

[ii] soit une rotation ($\overrightarrow{i} \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R}) - \{\mathrm{Id}_\}$;)

b Si $i \in \mathcal{I}$ est une isométrie indirecte, ($\overrightarrow{i} \in \mathcal{O}_{2,-}(\mathbb{R}),$) i est

[i] soit une réflexion,

[ii] soit la composée commutative d'une réflexion et d'une translation dans la direction de l'axe de réflexion (cf. I.5.1).

Proposition III.3.4 *Toute isométrie est le produit d'au plus trois réflexions.*

III.3.5 . −Exercices

Exercice III.3.5.1 Complétez les preuves de la section III.3.