Géométrie

Pierre Lorenzon

2003–2004

Université Paris Sud **Année 2003–2004**

L3 **Géométrie**

Responsable Pierre Lorenzon
Bureau 2I3
IMO Bat. 307 91405 Orsay cedex
Tel. : +33 1 69 15 60 26
Courriel : lorenzon@math.u-psud.fr
http://www.math.u-psud.fr/∼lorenzon

Pour une impression papier de ce texte, adressez-vous au secrétariat du L3. Cependant il n'est pas exclu que des modifications qui seront sans doute mineures soient apportées à cette version électronique. À ce propos, toute suggestion, est la bienvenue. Signalez-moi toute erreur.

I . −Espaces vectoriels euclidiens

I.0 . −Rappels sur la dualité

Soit K un anneau commutatif.

Définition I.0.1 Pour tout K-module E, on appelle *dual* de E et on note

$$\check{E} \;:=\; \mathrm{Hom}_K(E, K) \text{ l'ensemble des morphismes de } K\text{-modules de } E \text{ dans } K$$

(vu canoniquement comme K-module sur lui-même) encore appelés *formes linéaires sur E.*

Remarque I.0.2 On rappelle que pour deux K-modules E et F, l'ensemble $\mathrm{Hom}_K(E, F)$ des morphismes de K-modules de E à valeurs dans F a lui-même une structure canonique de K-module et que par conséquent, $\check{E}$ a une structure canonique de K-module donnée par

$$(af + bg)(x) \;:=\; af(x) \;+\; bg(x) \qquad \text{I.0.2.1}$$

pour tout couple $(a, b) \in K \times K$, tout couple $(f, g) \in \mathrm{Hom}_K(E, K) \times \mathrm{Hom}_K(E, K)$ et tout $x \;\in\; E$.

Proposition I.0.3 *Étant donnés deux K-modules E et F pour tout $u \;\in\; \mathrm{Hom}_K(E, F)$ l'application*

$$\begin{array}{rccc} \check{u}: & \check{F} & \to & \check{E} \\ & f & \mapsto & f \circ u \end{array}$$

est un morphisme de K-modules.

Preuve : Pour tout $(f, g) \in \check{F} \times \check{F}$, tout $(a, b) \in K \times K$ et tout $x \;\in\; E$:

$$\begin{array}{rcl} \check{u}[af + bg](x) & = & [(af + bg) \circ u](x) \\ & = & (af + bg)[u(x)] \\ & \underset{\text{(cf. I.0.2.1,)}}{=} & af[u(x)] + bg[u(x)] \\ & = & a(f \circ u)(x) + b(g \circ u)(x) \\ & = & [a(f \circ u) + b(g \circ u)](x) \\ & = & [a\check{u}(f) + b\check{u}(g)](x)\ , \end{array}$$

ce qui prouve la proposition.

Définition I.0.1 Pour un morphisme $u : E \to F$ $\check{u} : \check{F} \to \check{E}$ s'appelle le *dual de u.*

Proposition I.0.2 *i) Pour tout K-module E, le dual $\check{\mathrm{Id}_E}$ de l'identité de E est l'identité $\mathrm{Id}_{\check{E}}$ du dual $\check{E}$ de E.*

ii) Étant donnés E, F, G des K-modules, $u : E \to F$ et $v : F \to G$ des morphismes,

$$(v \check{\circ} u) = \check{u} \circ \check{v} .$$

iii) Étant donné un morphisme $u : E \to F$ que l'on suppose inversible, (i.e. qu'il existe un morphisme $v : F \to E$ tel que $v \circ u = \mathrm{Id}_E$ et $u \circ v = \mathrm{Id}_F$,) alors le dual $\check{v}$ de l'inverse de u est égal à l'inverse $(\check{u})^{-1}$ du dual de u.

iv) Pour deux K-modules E et F, l'application

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_K(E, F) & \to & \mathrm{Hom}_K(\check{F}, \check{E}) \\ u & \mapsto & \check{u} \end{array}$$

est un morphisme de K-modules.

Preuve : Ces quatre propriétés sont tout à fait formelles et leur démonstration est laissée en exercice.

On suppose désormais que K est un corps et l'on s'intéressera donc dorénavant au dual d'un K-module E c'est-à-dire d'un K-espace vectoriel E. On supposera même que E est de dimension finie $d \in \mathbb{N}^*$.

Proposition I.0.1 *Étant donnée une base $\mathcal{B} := (e_1, \ldots, e_d)$ de E, il existe une unique base $\mathcal{B}^* := (e_1^*, \ldots, e_d^*)$ de $\check{E}$ telle que pour tout $1 \le i \le d$ et tout $1 \le j \le d$, $e_i^*(e_j) = 0$ si $i \neq j$ et $e_i^*(e_j) = 1$ si $i = j$.*

Preuve : Pour $1 \le i \le d$ fixé, l'ensemble des conditions

$$e_i^*(e_j)_{1 \le j \le d} := \delta_{ij}$$

(où δ_{ij} est le symbole de Kronecker,) suffit à définir complètement et de manière unique e_i^* puisqu'une application linéaire (un morphisme d'espaces vectoriels) est complètement et uniquement déterminée dès qu'on donne l'image d'une base.

Il n'est pas difficile de montrer ensuite que $\mathcal{B}^*$ est une base de $\check{E}$ et ce point est laissé en exercice.

Définition I.0.1 Pour toute base $\mathcal{B}$ de E, la base $\mathcal{B}^*$ dont l'existence et l'unicité ont été prouvées dans la proposition I.0.1, est appelée *base duale de* $\mathcal{B}$.

Remarque I.0.2 i) Si $\mathcal{B} := (e_1, \ldots, e_d)$ est une base de E et $\mathcal{B}^*$ sa base duale, pour tout

$$x := \sum_{i=1}^{d} x_i e_i \in E ,$$

$e_i^*(x) = x_i$. C'est pourquoi l'élément e_i^* de la base duale $\mathcal{B}^*$ est aussi usuellement appelé *application* $i^{\text{ième}}$ *coordonnée dans la base* $\mathcal{B}$.

ii) Si $u : E \to F$ est un morphisme (application linéaire) $\mathcal{B} := (e_1, \ldots, e_{\dim E})$ (resp. $\mathcal{C} := (f_1, \ldots, f_{\dim F})$) étant une base de E (resp. F) de base duale $\mathcal{B}^*$ (resp. $\mathcal{C}^*$,) la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(u)$ de u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ est donnée par

$$[M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(u)]_{ij\ ,\ 1 \leq i \leq \dim F\ ,\ 1 \leq j \leq \dim E} = f_i^*[u(e_j)] .$$

Corollaire I.0.3 *Un K-espace vectoriel E et son dual $\check{E}$ ont même dimension.*

Preuve : C'est une conséquence immédiate de la proposition I.0.1.

Proposition I.0.1 *i) Pour tout $x \in E$, l'application*

$$\begin{array}{rccc} \tilde{x} : & \check{E} & \to & K \\ & f & \mapsto & f(x) \end{array}$$

est un élément du dual $\check{\check{E}}$ de $\check{E}$.

ii) L'application

$$\begin{array}{ccc} E & \to & \check{\check{E}} \\ x & \mapsto & \tilde{x} \end{array}$$

est un morphisme injectif et par conséquent un isomorphisme.

Preuve :

i) Pour tout $(f, g) \in \check{E} \times \check{E}$ et tout $(a, b) \in K \times K$,

$$\begin{array}{rcl} \tilde{x}(af + bg) & = & (af + bg)(x) \\ & \underset{\text{(cf. I.0.2.1,)}}{=} & af(x) + bg(x) \\ & = & a\tilde{x}(f) + b\tilde{x}(g) \end{array}$$

ce qui prouve que $\tilde{x} \in \check{\check{E}}$.

ii) Vérifier que $x \mapsto \tilde{x}$ est un morphisme est formel et laissé en exercice. Pour $x \in E$,

$$\begin{array}{rcl} \tilde{x} & = & 0 \in \check{\check{E}} \\ \Leftrightarrow \ \forall f \in \check{E}\ ,\ f(x) & = & 0 \in K\ . \end{array}$$

En appliquant cette dernière assertion aux éléments $e_1^*, \dots, e_d^*$ de la base duale d'une base $e_1, \dots, e_d$ de E, et la remarque I.0.2.i), on conclut que $x = 0$; ce qui assure l'injectivité recherchée.

Comme finalement

$$\dim \check{\check{E}} \overset{\text{(cf. I.0.3,)}}{=} \dim \check{E} \overset{\text{(cf. I.0.3,)}}{=} \dim E\ ,$$

l'injectivité du morphisme $x \mapsto \tilde{x}$ assure que ce dernier est un isomorphisme.

Corollaire I.0.3 *i) Le K-espace vectoriel $\check{\check{E}}$ est canoniquement isomorphe à E. Il est appelé bidual de E.*

La plupart du temps, on notera simplement x au lieu de $\tilde{x}$ pour $x \in E$, et indifféremment $f(x)$ ou $x(f)$ ou encore

$$\langle f \mid x \rangle := f(x) = x(f) \tag{1}$$

pour $x \in E$ et $f \in \check{E}$.

On a alors, pour tout $(x,y) \in E \times E$, tout $(f,g) \in \check{E} \times \check{E}$ et tout $(a,b) \in K \times K$,

$$\langle f \mid ax + by \rangle = a\langle f \mid x \rangle + b\langle f \mid y \rangle \tag{2}$$

et

$$\langle af + bg \mid x \rangle = a\langle f \mid x \rangle + b\langle g \mid x \rangle\ . \tag{3}$$

ii) Pour tout morphisme $u : E \to F$ (application linéaire,)

$$\check{\check{u}} := (\check{\check{u}}) = u\ .$$

Remarque I.0.4 Si l'on suppose qu'on est dans la situation de I.0.2.ii),

$$\begin{array}{rcl} [M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(u)]_{ij} & = & f_i^*[u(e_j)] \\ & = & [f_i^* \circ u](e_j) \\ & \overset{\text{(cf. I.0.3,)}}{=} & [\check{u}(f_i^*)](e_j) \\ & \overset{\text{(cf. I.0.3.i),)}}{=} & e_j[\check{u}(f_i^*)] \\ & = & [M_{\mathcal{C}^*}^{\mathcal{B}^*}(\check{u})]_{ji}\ , \end{array}$$

c'est-à-dire que la matrice du dual de u exprimée dans les bases duales des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ est la transposée ${}^tM_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(u)$ de la matrice de u exprimée dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. C'est pourquoi on trouvera parfois la dénomination *transposé de* u pour $\check{u}$ et la notation ${}^tu := \check{u}$.

Remarque I.0.5 Soient E et F des K-espaces vectoriels tels qu'on dispose d'un isomorphisme $\omega : F \cong \check{E}$. Alors, par dualité, $\check{\omega}$ (cf. I.0.1) est un isomorphisme (cf. I.0.2.iii)) de $\check{\check{E}} = E$ sur $\check{F}$ et pour tout $x \in E$ et tout $y \in F$,

$$\begin{array}{rcl} \omega(y)(x) & \overset{=}{\text{(cf. I.0.1.i),)}} & \tilde{x}[\omega(y)] \\ & = & (\tilde{x} \circ \omega)(y) \\ & = & \check{\omega}(x)(y) \; . \end{array}$$

On notera alors souvent

$$\langle y \mid x \rangle \; := \; \omega(y)(x) \; = \; \check{\omega}(x)(y) \; . \qquad \text{I.0.5.1}$$

L'accouplement

$$(x, y) \in E \times F \mapsto \langle y \mid x \rangle$$

a les propriétés suivantes, pour tout $(x, x') \in E \times E$, tout $(y, y') \in F \times F$, tout $(a, a') \in K \times K$, tout endomorphisme u de E et tout endomorphisme v de F :

ii)

$$\langle y \mid ax + a'x' \rangle \; = \; a\langle y \mid x \rangle \; + \; a'\langle y \mid x' \rangle \; ;$$

iii)

$$\langle ay + a'y' \mid x \rangle \; = \; a\langle y \mid x \rangle \; + \; a'\langle y' \mid x \rangle \; ;$$

iv)

$$\begin{array}{rcl} \langle y \mid u(x) \rangle & = & \omega(y)[u(x)] \\ & = & \check{\omega}[u(x)](y) \\ & = & [\check{\omega} \circ u](x)(y) \\ & = & \tilde{y}[(\check{\omega} \circ u)(x)] \\ & = & [\tilde{y} \circ \check{\omega} \circ u](x) \\ & \overset{=}{\text{(cf. I.0.1,)}} & (\,\check{}\ \check{\circ}\ u\omega)(y)(x) \\ & \overset{=}{\text{(cf. I.0.2.ii),)}} & [\check{u}(\check{\check{\omega}}(y))](x) \\ & = & \omega[\omega^{-1} \circ \check{u} \circ \omega(y)](x) \\ & = & \langle \omega^{-1}\check{u}\omega(y) \mid x \rangle \; ; \end{array}$$

v)

$$\langle v(y) \mid x \rangle \; = \; \langle y \mid \check{\omega}^{-1}\check{v}\check{\omega}(x) \rangle \; .$$

vi) Noter que les formules iv) et v) se simplifient considérablement si $F = \check{E}$ en

$$\langle y \mid u(x)\rangle \ = \ \langle \check{u}(y) \mid x\rangle \text{ et } \langle v(y) \mid x\rangle \ = \ \langle y \mid v^*(x)\rangle \ ,$$

respectivement.

vii) Il est bon de comparer cette notation au cas des espaces vectoriels euclidiens (cf. I.2.3.iii).) Dans ce cas en effet, la structure euclidienne donne une identification de E avec $\check{E}$.

I.1 . –Rappels sur les formes bilinéaires

Dans toute cette section K est un corps et E un K-espace vectoriel de dimension $d \in \mathbb{N}^*$.

Définition I.1.1 On appelle *forme bilinéaire sur E* un morphisme (application linéaire) $\phi : E \to \check{E}$ (cf. I.0.1.)

Remarque I.1.2 Soit ϕ une forme bilinéaire sur E,

i) Pour tout $(x, y) \in E \times E$, $\phi(x) \in \mathrm{Hom}_K(E, K)$ *i.e.* $\phi(x)(y) \in K$. L'application $\phi : E \to \check{E}$ définit donc une application encore notée

$$\phi : E \times E \to K \ .$$

On notera souvent $\phi(x, y) := \phi(x)(y)$ pour tout $(x, y) \in E \times E$.

ii) Comme $\phi : E \to \check{E}$ est un morphisme, pour tout $(x, x') \in E \times E$ et tout $(\lambda, \lambda') \in K \times K$,

$$\phi(\lambda x + \lambda' x') \ = \ \lambda\phi(x) + \lambda'\phi(x') \ \in \ \check{E} \ ;$$

i.e. pour tout $y \in E$:

$$\phi(\lambda x + \lambda' x', y) \ = \ \lambda\phi(x, y) + \lambda'\phi(x', y) \ \in \ K \ .$$

iii) Enfin, pour tout $x \in E$, $\phi(x) \in \check{E}$ *i.e.* $\phi(x)$ est un morphisme de E à valeurs dans K . Il s'ensuit que pour tout $(y, y') \in E \times E$ et tout $(\mu, \mu') \in K \times K$,

$$\phi(x, \mu y + \mu' y') \ = \ \mu\phi(x, y) + \mu'\phi(x, y') \ \in \ K \ .$$

Définition I.1.3 Étant donnée une forme bilinéaire ϕ sur E , on dit qu'un endomorphisme u de E est *ϕ-orthogonal* si pour tout $(x, y) \in E \times E$,

$$\phi(u(x), u(y)) \ = \ \phi(x, y) \ .$$

Remarque I.1.4 Étant donnée une forme bilinéaire ϕ sur E , un endomorphisme u de E est ϕ-orthogonal si et seulement si

$$\begin{array}{cccccc}
 & \forall (x,y) \in E \times E \ , & \phi(u(x), u(y)) & = & \phi(x, y) & \in K \\
\Leftrightarrow & \forall (x,y) \in E \times E \ , & [\phi(u(x))](u(y)) & = & \phi(x)(y) & \in K \\
\Leftrightarrow & \forall x \in E, & [\phi(u(x))] \circ u & = & \phi(x) & \in \check{E} \\
\overset{\Leftrightarrow}{(\text{cf. I.0.1,})} & \forall x \in E, & \check{u}[\phi(u(x))] & = & \phi(x) & \in \check{E} \\
\Leftrightarrow & & \check{u} \circ \phi \circ u & = & \phi & \in \mathrm{Hom}_K(E, \check{E}) \ .
\end{array}$$

On en déduit que u est ϕ-orthogonal si et seulement si

$$\check{u} \circ \phi \circ u \ = \ \phi \ .$$

Proposition I.1.5 *Étant donnée une forme bilinéaire ϕ sur E , soient u et v deux endomorphismes de E .*

i) Si u et v sont ϕ-orthogonaux $u \circ v$ et $v \circ u$ sont ϕ-orthogonaux.

ii) Si $v = u^{-1}$, v est ϕ-orthogonal si et seulement si u est ϕ-orthogonal.

Preuve : La démonstration de cette proposition est immédiate à partir de la formulation de la ϕ-orthogonalité donnée dans la remarque I.1.4 et des propriétés I.0.2.ii) et I.0.2.iii).

Définition I.1.1 On dit qu'une forme bilinéaire ϕ est *non dégénérée* si elle est injective en tant que morphisme $\phi : E \to \check{E}$.

Remarque I.1.2 Une forme bilinéaire non dégénérée est en fait un isomorphisme $\phi : E \to \check{E}$, d'après le théorème du rang, puisque E est de dimension finie $d \in \mathbb{N}^*$ et que $\dim E = \dim \check{E}$ (cf. I.0.3.)

On dispose alors d'un isomorphisme entre E et $\check{E}$ et on adoptera souvent la notation I.0.5.1

$$\langle x \mid y \rangle := \phi(x)(y) = \phi(x, y) . \qquad \text{I.1.2.1}$$

Proposition I.1.3 *Soit ϕ une forme bilinéaire non dégénérée sur E .*

i) ϕ^{-1} est une forme bilinéaire non dégénérée sur $\check{E}$.

ii) Si un endomorphisme u de E est ϕ-orthogonal alors u est inversible d'inverse

$$u^{-1} = \phi^{-1} \circ \check{u} \circ \phi \overset{=}{\text{(cf. I.1.9.1,)}} u^* . \qquad 1$$

iii) Un endomorphisme u de E est ϕ-orthogonal (cf. I.1.3) si et seulement si son dual (cf. I.0.1) $\check{u}$ est ϕ^{-1}-orthogonal.

iv) L'ensemble des endomorphismes ϕ-orthogonaux de E est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$ appelé groupe orthogonal pour ϕ et noté $\mathcal{O}_\phi(E)$.

Preuve :

i Est immédiat grâce à la proposition I.0.3.i).

ii Un endomorphisme u de E est ϕ-orthogonal si et seulement si (cf. I.1.4)

$$\begin{array}{rrcl} & \check{u}\circ\phi\circ u & = & \phi \\ \Leftrightarrow & \phi^{-1}\circ\check{u}\circ\phi\circ u & = & \mathrm{Id}\ ; \end{array}$$

ce qui implique que u est injectif donc inversible, puisque E est de dimension finie, et que son inverse est $u^{-1} = \phi^{-1}\circ\check{u}\circ\phi$.

iii Par ailleurs, u est ϕ-orthogonal si et seulement si

$$\begin{array}{lrcl} & \check{u}\circ\phi\circ u & = & \phi \\ \Leftrightarrow & u^{-1}\circ\phi^{-1}\circ(\check{u})^{-1} & = & \phi^{-1} \\ \Leftrightarrow & \phi^{-1} & = & u\circ\phi^{-1}\circ\check{u} \\ \overset{\Leftrightarrow}{\text{(cf. I.0.3.ii),)}} & \check{\check{u}}\circ\phi^{-1}\circ\check{u} & = & \phi^{-1} \end{array}$$

ce qui prouve que $\check{u}$ est ϕ^{-1}-orthogonal d'après la remarque I.1.4.

iv Est une conséquence facile de ce qui précède et de la proposition I.1.5.

Définition I.1.1 Étant donnée une forme bilinéaire ϕ non dégénérée sur E , on dit qu'un endomorphisme u de E est *ϕ-auto-adjoint* si

$$\check{u} = \phi\circ u\circ\phi^{-1}\ .$$

Remarque I.1.2 Si un endomorphisme u de E est ϕ-auto-adjoint pour une forme bilinéaire non dégénérée ϕ sur E ,

$$\begin{array}{lrrcll} & & \check{u} & = & \phi\circ u\circ\phi^{-1} & \in \mathrm{End}(\check{E})) \\ \Leftrightarrow & & \phi^{-1}\circ\check{u}\circ\phi & = & u & \in \mathrm{End}(E) \\ \Leftrightarrow & \forall x\in E, & \phi^{-1}[\check{u}(\phi(x))] & = & u(x) & \in E \\ \Leftrightarrow & \forall x\in E, & \check{u}(\phi(x)) & = & \phi(u(x)) & \in \check{E} \\ \Leftrightarrow & \forall x\in E, & \phi(x)\circ u & = & \phi(u(x)) & \in \check{E} \\ \Leftrightarrow & \forall (x,y)\in E\times E\ , & \phi(x)(u(y)) & = & \phi(u(x))(y) & \in K \\ \Leftrightarrow & \forall (x,y)\in E\times E\ , & \phi(x,u(y)) & = & \phi(u(x),y) & \in K\ . \end{array}$$

Remarque I.1.3 Pour $\phi : E\to\check{E}$ une forme bilinéaire, on remarque que le dual $\check{\phi}$ de ϕ (cf. I.0.1) est un morphisme de $\check{\check{E}}$ (le dual de $\check{E}$) dans $\check{E}$, *i.e.*, modulo l'identification canonique I.0.3.i) de E dans $\check{E}$.

Définition I.1.4 On dit qu'une forme bilinéaire $\phi : E\to\check{E}$ est *symétrique* si

$$\phi = \check{\phi} \in \mathrm{Hom}_K(E,\check{E})\ .$$

Remarque I.1.5 Soit $\phi : E \to \check{E}$ une forme bilinéaire symétrique. Pour tout $x \in E$,

$$\phi(x) = \check{\phi}(x) \in \check{E} ;$$

i.e. pour tout $y \in E$,

$$\begin{array}{rrcll} & \phi(x)(y) & = & \check{\phi}(x)(y) & \in & K \\ \Leftrightarrow & \phi(x)(y) & = & (x \circ \phi)(y) & \in & K \\ \Leftrightarrow & \phi(x)(y) & = & x(\phi(y)) & \in & K \\ \Leftrightarrow & \phi(x)(y) & = & \phi(y)(x) & \in & K \\ \Leftrightarrow & \phi(x,y) & = & \phi(y,x) & \in & K . \end{array}$$

Exemple I.1.6 Soient $(e_1, \ldots, e_d)$ une base de E et $(e_1^*, \ldots, e_d^*)$ sa base duale (cf. I.0.1.) On définit un unique morphisme

$$\begin{array}{rccl} \phi : & E & \to & \check{E} \\ & e_i & \mapsto & e_i^* \,\forall\, 1 \leq i \leq d . \end{array}$$

Puisque l'image d'une base par ϕ est une base, ϕ est un isomorphisme et donc une forme bilinéaire non dégénérée sur E (cf. I.1.1.) On cherche à déterminer $\check{\phi}$. Comme $\check{\phi}$ est un morphisme de K-espaces vectoriels, $\check{\phi}$ est entièrement déterminé par l'image d'une base de $\check{\check{E}} = E$; *i.e.* pour tout $1 \leq i \leq d$, il suffit de connaître $\check{\phi}(e_i)$. Or $\check{\phi}(e_i) \in \check{E}$ *i.e.* $\check{\phi}(e_i)$ est une application linéaire de E à valeurs dans K . Elle est entièrement déterminée si l'on connaît l'image d'une base de E . Il suffit donc de déterminer, pour tout $1 \leq j \leq d$

$$\begin{array}{rcl} \check{\phi}(e_i)(e_j) & \underset{\text{(cf. I.0.1,)}}{=} & (e_i \circ \phi)(e_j) \\ & = & e_i[\phi(e_j)] \\ & = & e_i(e_j^*) \\ & \underset{\text{(cf. I.0.3.i),)}}{=} & e_j^*(e_i) \\ & \underset{\text{(cf. I.0.1,)}}{=} & \delta_{ij} \\ & = & e_i^*(e_j) \\ & = & \phi(e_i)(e_j) . \end{array}$$

Il s'ensuit que $\phi = \check{\phi}$ donc que ϕ est symétrique.

Définition I.1.7 Soit ϕ une forme bilinéaire symétrique sur E.

i) On dit que deux éléments x et y de E sont ϕ-*orthogonaux* si $\phi(x,y) = 0$.

ii) Une base $(e_1, \ldots, e_d)$ de E est ϕ-*orthogonale* si $\phi(e_i, e_j) = 0$, pour tout $1 \leq i \leq d$, tout $1 \leq j \leq d$, $i \neq j$.

Remarque I.1.8 Étant donnée une forme bilinéaire ϕ non dégénérée sur E , pour tout endomorphisme u de E , notons

$$u^\flat \;:=\; \phi^{-1} \circ \check{u} \circ \phi\,. \qquad \text{I.1.8.1}$$

Pour tout $(x, y) \in E \times E$,

$$\begin{array}{rcl} \phi(u^\flat(x), y) & = & \phi[u^\flat(x)](y) \\ & = & \phi[\phi^{-1}(\check{u}(\phi(x)))](y) \\ & = & \check{u}(\phi(x))(y) \\ & = & (\phi(x) \circ u)(y) \\ & = & \phi(x)(u(y)) \\ & = & \phi(x, u(y))\,. \end{array}$$

On pourrait appeler $u^\flat$ *ϕ-adjoint à gauche* de u .
De même, on pose

$$u^\sharp \;:=\; \check{\phi}^{-1} \circ \check{u} \circ \check{\phi}\,. \qquad \text{I.1.8.2}$$

Dès lors, pour tout $(x, y) \in E \times E$,

$$\begin{array}{rcl} \phi(x, u^\sharp(y)) & = & \phi(x)(u^\sharp(y)) \\ & = & \phi(x)[\check{\phi}^{-1}(\check{u}(\check{\phi}(y)))] \\ & = & [\phi(x) \circ \check{\phi}^{-1}][\check{u}(\check{\phi}(y))] \\ & = & (\check{\check{\phi}}^{-1})(\phi(x))[\check{u}(\check{\phi}(y))] \\ & = & x[\check{u}(\check{\phi}(y))] \\ & = & (x \circ \check{u})[\check{\phi}(y)] \\ & = & u(x)[\check{\phi}(y)] \\ & = & \check{\phi}(y)(u(x)) \\ & = & (y \circ \phi)(u(x)) \\ & = & y(\phi(u(x)) \\ & = & \phi(u(x))(y) \\ & = & \phi(u(x), y) \end{array}$$

On pourrait appeler $u^\sharp$ *ϕ-adjoint à droite* de u.

Définition I.1.9 Si l'on suppose que ϕ est une forme bilinéaire non dégénérée et que, de plus, ϕ est symétrique, on a de manière évidente

$$u^* \;:=\; u^\sharp \;=\; u^\flat \;=\; \phi^{-1} \circ \check{u} \circ \phi\,, \qquad \text{I.1.9.1}$$

appelé ϕ-*adjoint de* u et qui vérifie

$$\begin{array}{rcl} & \forall (x,y) \in \times E & \\ \langle u^*(x) \mid y \rangle \ \overset{=}{\text{(cf. I.1.2.1,)}} \ \phi(u^*(x), y) & = & \phi(x, u(y)) \ = \ \langle x \mid u(y) \rangle \\ & \text{et} & \\ \langle x \mid u^*(y) \rangle \ = \ \phi(x, u^*(y)) & = & \phi(u(x), y) \ = \ \langle u(x) \mid y \rangle \ . \end{array}$$

I.1.9.2

Proposition I.1.10 *Étant donnée une forme bilinéaire symétrique non dégénérée ϕ sur E, un endomorphisme u de E est ϕ-auto-adjoint (cf. I.1.1) si et seulement si il est égal à son ϕ-adjoint.*

Remarque I.1.11 Si l'on ne suppose pas que ϕ est symétrique, mais qu'on suppose en revanche que u est ϕ-auto-adjoint au sens de la définition I.1.1, on a :

$$\begin{array}{lrcl} & \check{u} & = & \phi \circ u \circ \phi^{-1} \\ \Leftrightarrow & u & = & \phi^{-1} \circ \check{u} \circ \phi \\ \overset{\Leftrightarrow}{\text{(cf. I.1.8.1,)}} & u & = & u^\flat \\ \overset{\Leftrightarrow}{\text{(cf. I.0.3.ii),)}} & \check{u} & = & (\phi^{-1} \circ \check{} \ \check{} \circ \phi u) \\ \overset{\Leftrightarrow}{\text{(cf. I.0.2.ii),)}} & \check{u} & = & \check{\phi} \circ \check{\check{u}} \circ \check{\phi}^{-1} \\ \overset{\Leftrightarrow}{\text{(cf. I.0.3.ii),)}} & u & = & \check{\phi}^{-1} \circ \check{u} \circ \check{\phi} \\ \overset{\Leftrightarrow}{\text{(cf. I.1.8.2,)}} & u & = & u^\sharp \ . \end{array}$$

On en déduit que u est ϕ-auto-adjoint si et seulement si

$$u \ = \ u^\flat \ = \ u^\sharp \ .$$

Si ϕ n'est pas symétrique, $u^\flat$ et $u^\sharp$ sont, a priori, différents. Si ϕ est symétrique, ils sont égaux mais ne sont égaux à u que si ce dernier est ϕ-auto-adjoint.

Remarque I.1.12 Si ϕ est la forme bilinéaire symétrique non dégénérée construite à partir d'une base de E et de sa base duale (cf. I.1.6) la matrice de ϕ dans ces bases est alors

$$M(\phi) \ = \ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix} \ .$$

Il s'ensuit alors que

$$M(u^*) \ = \ M(\check{u}) \ \overset{=}{\text{(cf. I.0.4,)}} \ {}^tM(u) \, {}^tM(u) \ . \qquad \text{I.1.12.1}$$

I.2 . −Espaces vectoriels euclidiens

Dans cette section E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $d \in \mathbb{N}^*$.

Définition I.2.1 Une forme bilinéaire ϕ sur E (cf. I.1.1,) est *définie* si $\phi(x,x) = 0$ implique $x = 0$ pour $x \in E$ et *positive* si $\phi(x,x) \geq 0$ pour tout $x \in E$.

Remarque I.2.2 Une forme bilinéaire définie positive est non dégénérée (cf. I.1.1.)

Définition I.2.3 i) Une forme bilinéaire (cf. I.1.1) symétrique (cf. I.1.4) définie positive ϕ sur E est appelée *produit scalaire*.

ii) Un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie muni d'un produit scalaire est dit *euclidien* ou *muni d'une structure euclidienne.*

iii) Pour $(x,y) \in E \times E$, on note parfois

$$\langle x,y \rangle \ := \ \phi(x,y) \ ,$$

(cf. I.0.5.vii).)

iv) On notera souvent (E,ϕ) ou $(E,<>)$ un espace vectoriel euclidien. La forme bilinéaire ϕ est en effet non-dégénérée (cf. I.1.1) et réalise par conséquent un isomorphisme entre E et son dual $\check{E}$. Ainsi la notation $\langle x,y \rangle \ := \ \phi(y)(x)$ est compatible avec celle donnée en I.0.5.

Définition I.2.4 Étant donnée une forme bilinéaire symétrique ϕ sur E,

i) on appelle *forme quadratique associée à ϕ* l'application

$$\begin{aligned} Q : E &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \phi(x,x) \ ; \end{aligned}$$

ii) on dit que Q est *définie positive* si ϕ l'est ;

iii) ϕ est la *forme polaire associée à Q* .

Remarque I.2.5 Étant donnée une forme bilinéaire symétrique ϕ sur E et Q la forme quadratique associée, pour tout $(x, y) \in E \times E$,

$$\phi(x, y) \;=\; \frac{1}{2}[Q(x+y) - Q(x) - Q(y)] \qquad \text{I.2.5.1}$$

et

$$\phi(x, y) \;=\; \frac{1}{4}[Q(x+y) - Q(x-y)) \,. \qquad \text{I.2.5.2}$$

Définition I.2.6 Étant donné un espace euclidien $(E, <>)$,

i) on appelle *norme euclidienne sur E* l'application

$$\begin{array}{rcl} E & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & ||x|| \;:=\; \sqrt{\langle x, x\rangle} \;; \end{array}$$

ii) on appelle *distance euclidienne sur E* l'application

$$\begin{array}{rrcl} d: & E \times E & \to & \mathbb{R}^+ \\ & (x, y) & \mapsto & ||x-y|| \;=\; \sqrt{\langle x-y, x-y\rangle} \;. \end{array}$$

Proposition I.2.7 *Étant donné un espace euclidien $(E, <>)$, la norme euclidienne et la distance euclidienne ont les propriétés suivantes, pour tout $(x, y, z) \in E \times E \times E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$:*

i)

$$||\lambda x|| \;= |\; \lambda \;|\; ||x|| \;;$$

ii)

$$|\; \langle x, y\rangle \;| \leq \; ||x||.||y||$$

(inégalité de Cauchy-Schwarz ,) on a égalité si et seulement si x et y sont liés;

iii) $||x|| = 0$ *si et seulement si* $x = 0$;

iv) $d(x, y) = 0$ *si et seulement si* $x = y$;

v)

$$||x+y|| \;\leq\; ||x|| + ||y|| \;;$$

vi)

$$d(x, z) \;\leq\; d(x, y) \;+\; d(y, z)$$

(inégalité triangulaire.)

Définition I.2.8 Étant donné un espace vectoriel euclidien (E,ϕ), on appelle *base ϕ-orthonormée* de E une base

$$
\begin{array}{lrcl}
\multicolumn{4}{c}{(e_1,\ldots,e_d) \text{ telle que } :} \\
\forall 1\le i\le d,\ \forall 1\le j\le d, & & & \\
i\neq j \Rightarrow & \phi(e_i,e_j) & = & 0 \\
\text{et} & \phi(e_i,e_i) & = & 1\,.
\end{array}
$$

Proposition I.2.9 *Étant donnés un espace vectoriel euclidien (E,ϕ) et $(e_1,\ldots,e_d)$ une base de E, il existe une unique base orthonormée $(f_1,\ldots,f_d)$ de E telle que*

- *pour tout $1\ \le\ i\ \le\ d$*

$$\mathrm{Vect}\{f_1,\ldots,f_i\} \;=\; \mathrm{Vect}\{e_1,\ldots,e_i\}\ ;$$

- *pour tout $1\ \le\ i\ \le\ d\ \phi(e_i,f_i)>0$.*

Proposition I.2.10 *Soit (E,ϕ) un espace vectoriel euclidien.*

i) L'application $\phi^{-1}:\check{E}\to E$ est un produit scalaire sur $\check{E}$.

ii) Pour toute base ϕ-orthonormée $(e_1,\ldots,e_d)$ de E , le système

$$f_{i\,,\,1\,\le\,i\,\le\,d} \;:=\; \phi(e_i)$$

est une base ϕ^{-1}-orthonormée de $\check{E}$;

iii) De plus, $f_{i\,,\,1\,\le\,i\,\le\,d}$ est la base duale de $e_{i\,,\,1\,\le\,i\,\le\,d}$ (cf. I.0.1.)

iv) Réciproquement, étant donnée une base

$$\mathcal{B} \;:=\; (e_1,\ldots,e_d)$$

de E et

$$\mathcal{B}^* \;:=\; (e_1^*,\ldots,e_d^*)\ ,$$

le morphisme

$$\begin{array}{rcl} \phi:E & \to & \check{E} \\ e_i & \mapsto & e_i^* \end{array}$$

est l'<u>unique</u> forme bilinéaire (cf. I.1.1) symétrique (cf. I.1.4) définie positive (cf. I.2.1) sur E telle que $\mathcal{B}$ soit ϕ-orthonormée (cf. I.2.8.)

Le morphisme $\phi^{-1}:\check{E}\to E$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur $\check{E}$ et $\mathcal{B}^*$ est ϕ^{-1}-orthonormée.

Preuve :

i L'application ϕ^{-1} est un morphisme

$$\check{E} \to E = \check{\check{E}}$$

(cf. I.0.3.i)) ; c'est donc une *forme bilinéaire* sur $\check{E}$ (cf. I.1.1.) Par ailleurs,

$$(\check{\phi^{-1}}) = (\check{\phi})^{-1} = \phi^{-1}$$

(cf. I.0.2.iii)) ; ϕ^{-1} est donc *symétrique* (cf. I.1.4.)

De plus, comme ϕ est définie positive, elle est donc non dégénérée (cf. I.1.1) et définit, par conséquent, un isomorphisme $\phi : E \to \check{E}$. Ainsi, pour tout $z \in \check{E}$ il existe un unique $x \in E$ tel que $z = \phi(x)$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \phi^{-1}(z,z) &= \phi^{-1}(z)(z) \\ &= \phi^{-1}[\phi(x)][\phi(x)] \\ &= x[\phi(x)] \\ &\underset{\text{(cf. I.0.3.i),)}}{=} \phi(x)(x) \\ &= \phi(x,x) \\ &\geq 0 \,; \end{aligned}$$

c'est-à-dire que ϕ^{-1} est *positive*.

Finalement, $\phi^{-1}(z,z) = 0$ équivaut, d'après ce qui précède, à $\phi[\phi^{-1}(z), \phi^{-1}(z)] = 0$; c'est-à-dire $\phi^{-1}(z) = 0$, car ϕ est définie ; et enfin $z = 0$. La forme ϕ^{-1} sur $\check{E}$ est donc *définie*.

ii Étant donnée une base ϕ-orthonormée $e_{i\,,\,1 \leq i \leq d}$ de E , et

$$f_{i\,,\,1 \leq i \leq d} := \phi(e_i) \,,$$

pour tout $1 \leq i \leq d$, $1 \leq j \leq d$,

$$\begin{aligned} \phi^{-1}(f_i, f_j) &= \phi^{-1}[\phi(e_i), \phi(e_j)] \\ &= \phi(e_j, e_i) \,; \end{aligned}$$

ce qui prouve que $f_{i\,,\,1 \leq i \leq d}$ est une base ϕ^{-1}-orthonormée de $\check{E}$.

iii Pour tout $1 \leq i \leq d$, $1 \leq j \leq d$,

$$\begin{aligned} f_i(e_j) &= \phi(e_i)(e_j) \\ &= \phi(e_i, e_j) \,; \end{aligned}$$

ce qui prouve que $f_{i\,,\,1 \leq i \leq d}$ est bien la base duale de $e_{i\,,\,1 \leq i \leq d}$.

iv Est une extension facile de I.1.6 et des points précédents.

Proposition I.2.1 *Étant donné un espace euclidien* (E, ϕ) *, un endomorphisme* u *de* E *est* ϕ*-auto-adjoint (cf. I.1.1) si et seulement si la matrice* $M(u)$ *de* u *dans une base* ϕ*-orthonormée (cf. I.2.8) est symétrique i.e.*

$$ {}^tM(u) \;=\; M(u) \;. $$

Preuve : Ce résultat est une conséquence de la remarque I.0.4 et de la proposition I.2.10 ainsi que la description de la matrice de ϕ dans les bases $e_{i\,,\,1\,\leq\,i\,\leq\,d}$ et $\phi(e_i)_{\,,\,1\,\leq\,i\,\leq\,d}$ donnée dans la remarque I.1.12.

Corollaire I.2.1 *Étant donnés un espace euclidien* (E, ϕ) *et* ψ *une forme bilinéaire symétrique sur* E *:*

i) l'endomorphisme $u_\psi := \phi^{-1} \circ \psi$ *de* E *est* ϕ*-auto-adjoint (cf. I.1.1) ;*

ii) pour tout $(x, y) \in E \times E$ *,*

$$ \psi(x, y) \;=\; \phi(x, u_\psi(y)) \;; $$

iii) la matrice de u_ψ *(usuellement appelée la matrice de* ψ*) dans une base* ϕ*-orthonormée est symétrique.*

Remarque I.2.2 Étant donné un entier $d \geq 1$, l'ensemble $\mathbb{R}^d$ des d-uplets d'éléments de $\mathbb{R}$ possède une structure canonique de $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Pour cette structure, il existe une base canonique

$$ e_{i\,,\,1\,\leq\,i\,\leq\,d} \;:=\; (0, 0, \ldots, 1, \ldots, 0) $$

où l'élément 1 est placé en $i^{\text{ième}}$ position. D'après la proposition I.2.10.iv), l'application $e_i \mapsto e_i^*$ est l'unique produit scalaire sur $\mathbb{R}^d$ pour lequel $e_{i\,,\,1\,\leq\,i\,\leq\,d}$ est une base orthonormée (cf. I.2.8.)

Ainsi, lorsqu'on parlera de $\mathbb{R}^d$ euclidien sans autre précision ce sera toujours en référence à cette structure canonique. Il se peut même parfois, qu'en parlant simplement de $\mathbb{R}^d$, on suppose implicitement qu'il est muni de sa structure euclidienne.

Ceci explique que certaines définitions qui paraissent tout à fait intrinsèques pour n'avoir été données, la plupart du temps, que dans ce cadre, méritent plus de précision dans un cadre plus général. Il faut notamment penser à la notion d'auto-adjonction I.1.1 qui n'a de sens, sans autre précision, que si l'on suppose donnée une structure euclidienne (ou tout au moins une forme non dégénérée (cf. I.1.1)) ou si celle-ci est vraiment canonique.