II . –Groupe orthogonal, cas de la dimension 2, angles

II.0 . –Rappels sur les formes linéaires alternées et les déterminants

Dans toute cette section, E **est un** $\mathbb{K}$**-espace vectoriel de dimension finie** $d \in \mathbb{N}^*$**, où** $\mathbb{K}$ **est un corps de caractéristique différente de** 2. **On note** $\mathcal{S}_d$ **le groupe des permutations sur l'ensemble** $[1; d] \subset \mathbb{N}$.

Définition II.0.1 (Forme d-linéaire alternée) On appelle *forme d-linéaire alternée* sur E une application

$$f \ : \ E^d := E \times \ldots \times E \ \to \ \mathbb{K} \, ,$$

telle que pour tout d-uplet $(v_1, \ldots, v_d)$ d'éléments de E, tout entier $1 \leq i \leq d$, tout élément $v'_{i \, \in \, E}$ et tout couple $(\lambda, \lambda') \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$,

$$f(v_1, \ldots, \lambda v_i + \lambda' v'_i, \ldots, v_d) \ = \ \lambda f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_d) \ + \ \lambda' f(v_1, \ldots, v'_i, \ldots, v_d) \ ; \quad \text{II.0.1.1}$$

et pour toute permutation $s \in \mathcal{S}_d$,

$$f(v_{s(1)}, \ldots, v_{s(d)}) \ = \ \sigma(s) f(v_1, \ldots, v_d) \ , \qquad \text{II.0.1.2}$$

(où $\sigma(s)$ désigne la signature de la permutation s.)

On notera $\mathcal{A}^d \, E$ l'ensemble des formes d-linéaires alternées sur E.

Remarque II.0.2 Si $d = 1$, on remarque immédiatement que

$$\mathcal{A}^d \, E \ \cong \ E^* \ .$$

On supposera, dans toute la suite de ce paragraphe (II.0), que $d \geq 2$.

Lemme II.0.3 *Soit $f \in \mathcal{A}^d \, E$, et $(v_1, \ldots, v_d)$ un d-uplet d'éléments de E tel qu'il existe $1 \leq i < j \leq d$ tels que $v_i = v_j$. Alors*

$$f(v_1, \ldots, v_d) \ = \ 0 \ .$$

Proposition II.0.4 *L'ensemble $\mathcal{A}^d \, E$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et*

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{A}^d \, E \ = \ 1 \ . \qquad \textit{II.0.4.1}$$

Preuve : *On a vu que si* $d = 1$,

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{A}^d\, E \overset{=}{II.0.2} \dim_{\mathbb{K}} E^* \overset{=}{I.0.3} \dim_{\mathbb{K}} E = 1 .$$

Supposons $d > 1$ *et que pour tout* $d' < d$ *et tout* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* F *de dimension* d',

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{A}^{d'}\, F = 1 .$$

Pour tout $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *de dimension* d, *considérons un sous-*$\mathbb{K}$*-espace vectoriel* H *de* E *de dimension* $d-1$ *et un supplémentaire* D *de* H. *Dès lors,* $\dim_{\mathbb{K}} D = 1$. *Notons* v *une base de* D. *On définit une application*

$$\phi : \mathcal{A}^d\, E \to \mathcal{A}^{d-1}\, H$$

de la manière suivante : pour tout $f \in \mathcal{A}^d\, E$ *et tout* $d-1$*-uplet* $(w_1, \ldots, w_{d-1})$ *de vecteurs de* H,

$$[\phi(f)](w_1, \ldots, w_{d-1}) := f(v, w_1, \ldots, w_{d-1}) . \qquad \textit{II.0.4.1}$$

Il est clair que ϕ *est un* <u>*morphisme*</u> *de* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels. Supposons, pour* $f \in \mathcal{A}^d\, E$, *que* $\phi(f) = 0_{\mathcal{A}^{d-1}\, H}$. *Pour tout* $d-1$*-uplet* $(h_1, \ldots, h_{d-1})$ *de vecteurs de* H, $f(v, h_1, \ldots, h_{d-1}) = 0$ *en particulier si* $(h_1, \ldots, h_{d-1})$ *est une base de* H. *Dans ce cas,* $(v, h_1, \ldots, h_{d-1})$ *est une base de* E. *Il s'ensuit, par linéarité (cf. II.0.1.2), que*

$$\forall (v_1, \ldots, v_d) \in E^d,\ f(v_1, \ldots, v_d) = 0_{\mathbb{K}} ;$$

i.e. $f = 0_{\mathcal{A}^d\, E}$ *c'est-à-dire que* ϕ *est* <u>*injectif.*</u>

Comme $\mathcal{A}^d\, E$ *est de dimension strictement positive (il suffit de vérifier qu'il existe des formes* d*-linéaires alternées non nulles sur* E*) et* $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{A}^{d-1}\, H = 1$ *par hypothèse de récurrence,*

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{A}^d\, E = 1 .$$

Proposition II.0.5 *Étant donnés deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels* E *et* F *de* <u>*même*</u> *dimension* d, *on note*

$$\mathcal{A}^d : \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(E, F) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{A}^d\, F, \mathcal{A}^d\, E)$$

l'application définie par $u \mapsto \mathcal{A}^d\,(u)$ *où*

$$\forall f \in \mathcal{A}^d\, F,\ \forall (v_1, \ldots, v_d) \in E^d,\ [(\mathcal{A}^d\,(u))(f)](v_1, \ldots, v_d) := f(u(v_1), \ldots, u(v_d)) , \qquad \textit{II.0.5.1}$$

ii) Cette application vérifie pour E, F, G *des* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels de* <u>*même*</u> *dimension* d *et*

$$u : E \to F ,\ v : F \to G \text{ des morphismes :}$$

$$\mathcal{A}^d\,(v \circ u) = \mathcal{A}^d\,(u) \circ \mathcal{A}^d\,(v) .$$

iii) Avec les notations précédentes, si v est l'inverse de u, alors $\mathcal{A}^d(u)$ est inversible et

$$\mathcal{A}^d(v) = \mathcal{A}^d(u)^{-1}.$$

iv) Pour tout morphisme $u : E \to F$, $\mathcal{A}^d(u)$ est un morphisme (application linéaire) de $\mathcal{A}^d F$ dans $\mathcal{A}^d E$.

Remarque II.0.6 On pourrait simplement noter $\mathcal{A}^d(u) = f \circ u$ si cette notation n'était abusive pour $d \neq 1$, et si cela ne pouvait conduire à des confusions. Cette notation peut cependant aider à comprendre le comportement de $\mathcal{A}^d(u)$ vis-à-vis de la composition et de l'inverse notamment, très analogue à celui de u^* (cf. I.0.1.)

En revanche, il faut bien prendre garde au fait que en général $\mathcal{A}^d(u+v) \neq \mathcal{A}^d(u) + \mathcal{A}^d(v)$!

Définition II.0.7 (Déterminant d'un endomorphisme) Pour tout

$$u : E \to F \text{ avec } \dim E = \dim F = d,$$

on appelle *déterminant de* u l'application

$$\mathcal{A}^d(u) : \mathcal{A}^d F \to \mathcal{A}^d E.$$

Proposition II.0.8 *i) Si $u : E \to E$ est un endomorphisme alors $\mathcal{A}^d(u)$ est un endomorphisme de $\mathcal{A}^d E$ qui est de dimension 1. L'application $\mathcal{A}^d(u)$ est donc une homothétie uniquement caractérisée par son rapport $k \in \mathbb{K}$. Le scalaire k est aussi appelé* déterminant *de u et noté $\det(u)$.*

ii) Si u et v sont des endomorphismes de E la proposition II.0.5.ii) a pour conséquence que

$$\det(v \circ u) = \det(u)\det(v) = \det(u \circ v).$$

De même, la proposition II.0.5.iii) a pour conséquence que, si u est un automorphisme de E (i.e. un endomorphisme inversible,)

$$\det(u^{-1}) = (\det(u))^{-1}.$$

Il s'ensuit que la restriction de l'application $\det(\cdot)$ au groupe linéaire $\mathrm{GL}(E)$ définit un morphisme à valeurs dans le groupe $(\mathbb{K}^\times, *)$.

Remarque II.0.9 Attention : Il faut bien noter que le déterminant d'un endomorphisme u de E est indépendant du choix de toute base sur E.

Définition II.0.10 (Déterminant d'un système de vecteurs) Une base

$$(e_1, \ldots, e_d) \text{ de } E \text{ étant fixée,}$$

à tout d-uplet $(v_1, \ldots, v_d)$ de vecteurs de E, on peut associer un unique endomorphisme u de E défini par :

$$u(e_i) \;:=\; v_{i\,,\,1\,\leq\, i\,\leq\, d}\;.$$

On appellera *déterminant du système de vecteurs* $(v_1, \ldots, v_d)$ *dans la base* $(e_1, \ldots, e_d)$ et on notera

$$\det_{e_1,\ldots,e_d}(v_1, \ldots, v_d) \;:=\; \det(u)$$

le déterminant de u au sens de la définition II.0.7.

Remarque II.0.11 i) Il s'ensuit immédiatement que pour tout endomorphisme u de E,

$$\det(u) \;=\; \det_{(e_1,\ldots,e_d)}(u(e_1), \ldots, u(e_d))\;.$$

ii) L'identité II.0.5.ii) a pour conséquence que, si

$$(e_1, \ldots, e_d) \text{ et } (e'_1, \ldots, e'_d) \text{ sont deux bases de } E,$$

et $(v_1, \ldots, v_d)$ un système de vecteurs quelconque,

$$\det_{(e_1,\ldots,e_d)}(v_1, \ldots, v_d) \;=\; \det_{(e_1,\ldots,e_d)}(e'_1, \ldots, e'_d) \;\cdot\; \det_{(e'_1,\ldots,e'_d)}(v_1, \ldots, v_d)\;.$$

Remarque II.0.12 Attention : Le déterminant d'un système de vecteurs, en revanche, n'a de sens que par rapport à une base donnée.

Lemme II.0.13 *Pour tout d-uplet*

$$x \;:=\; (x_1, \ldots, x_d)$$

d'éléments de E et tout d-uplet

$$y \;:=\; (y_1, \ldots, y_d)$$

d'éléments de E^*, on pose

$$\delta(x, y) \;:=\; \sum_{s\,\in\,\mathcal{S}_d} \sigma(s) \prod_{i\,\in\,[1;d]} \langle x_{s(i)}, y_i\rangle \qquad \textit{II.0.13.1}$$

avec la notation de I.0.5.1.

Alors pour tout (x, y) comme ci-dessus, δ vérifie les propriétés suivantes :

ii)

$$\delta(x,y) \;=\; \sum_{s \,\in\, \mathcal{S}_d} \sigma(s) \prod_{i \,\in\, [1;d]} \langle x_i, y_{s(i)} \rangle \;.$$

Preuve : *C'est le changement de variable $s \mapsto s^{-1}$ sur le paramètre d'intégration $s \in \mathcal{S}_d$ puisque $\sigma(s) = \sigma(s^{-1})$.*

iii) Pour y fixé, $\delta(\cdot, y)$ est une forme d-linéaire alternée sur E.

Preuve : *La vérification de la d-linéarité risque d'être un peu fastidieuse à écrire, quoiqu'elle soit, en réalité, très simple à vérifier.*

Fixons $y := (y_1, \ldots, y_d)$ et pour tout $x := (x_1, \ldots, x_d)$ vérifions, par exemple, la linéarité par rapport à la première variable. Pour n'importe laquelle d'entre les autres la vérification se ramène en fait à celle-ci par un changement d'indice. Soit donc $x'_1 \in E$ et $(a, a') \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned}
\delta(ax_1 + a'x'_1, \ldots, x_d, y) \quad & \overset{=}{ii)} \quad \sum_{s \,\in\, \mathcal{S}_d} \sigma(s)\langle ax_1 + a'x'_1, y_{s(1)}\rangle \prod_{i \,\in\, [2;d]} \langle x_i, y_{s(i)}\rangle \\
& \overset{=}{I.0.5.ii)} \quad \sum_{s \,\in\, \mathcal{S}_d} \sigma(s)[a\langle x_1, y_{s(1)}\rangle + a'\langle x'_1, y_{s(1)}\rangle] \prod_{i \,\in\, [2;d]} \langle x_i, y_{s(i)}\rangle \\
& = \quad a\delta(x_1, \ldots, x_d, y) + a'\delta(x'_1, \ldots, x_d, y) \,,
\end{aligned}$$

ce qui prouve II.0.1.1 pour $\delta(\cdot, y)$.

Soit maintenant donnée une permutation $p \in \mathcal{S}_d$, y étant toujours fixé comme précédemment et x variable. On a alors :

$$\begin{aligned}
\delta(x_{p(1)}, \ldots, x_{p(d)}, y) &= \sum_{s \,\in\, \mathcal{S}_d} \sigma(s) \prod_{i \,\in\, [1;d]} \langle x_{s[p(i)]}, y_i\rangle \\
&= \sum_{s \,\in\, \mathcal{S}_d} \sigma(p)^2\sigma(s) \prod_{i \,\in\, [1;d]} \langle x_{s[p(i)]}, y_i\rangle \\
&= \sigma(p) \sum_{s \,\in\, \mathcal{S}_d} \sigma(s \circ p) \prod_{i \,\in\, [1;d]} \langle x_{s\circ p(i)}, y_i\rangle \\
&= \sigma(p) \sum_{s \,\in\, \mathcal{S}_d} \sigma(s) \prod_{i \,\in\, [1;d]} \langle x_{s(i)}, y_i\rangle \\
&= \sigma(p)\delta(x_1, \ldots, x_d, y) \,,
\end{aligned}$$

la dernière étape étant obtenue en faisant le changement de variable $s \mapsto s\circ p$ sur le paramètre d'intégration $s \in \mathcal{S}_d$.

Ceci prouve finalement que $\delta(\cdot, y)$ vérifie II.0.1.2.

iv) Pour x fixé, $\delta(x, \cdot)$ est une forme d-linéaire alternée sur E^*.

Preuve : *Se démontre comme iii) graçe à ii).*

v) Pour tout endomorphisme u de E,

$$\delta(u(x), y) \;=\; \det(u)\delta(x,y) \text{ (où } u(x) \;:=\; (u(x_1), \dots, u(x_d)) \text{ .)}$$

Preuve : *Découle de iii).*

vi) Pour tout endomorphisme v de E^*,

$$\delta(x, v(y)) \;=\; \det(v)\delta(x,y) \text{ (où } v(y) \;:=\; (v(y_1), \dots, v(y_d)) \text{ .)}$$

Preuve : *Découle de iv).*

vii) Pour tout endomorphisme u de E (resp. v de E^*,)

$$\delta(u(x), y) \;=\; \delta(x, u^*(y)) \text{ resp. } \delta(x, v(y)) \;=\; \delta(v^*(x), y) \text{ .)}$$

Preuve : *Pour tout endomorphisme u de E, on a :*

$$\begin{aligned}
\delta(u(x), y) \quad &= \quad \sum_{s \,\in\, \mathcal{S}_d} \sigma(s) \prod_{i \,\in\, [1;d]} \langle u(x_i), y_{s(i)} \rangle \\
&\underset{I.0.5.vi)}{=} \quad \sum_{s \,\in\, \mathcal{S}_d} \sigma(s) \prod_{i \,\in\, [1;d]} \langle x_i, u^*(y_{s(i)}) \rangle \\
&\underset{ii)}{=} \quad \sum_{s \,\in\, \mathcal{S}_d} \sigma(s) \prod_{i \,\in\, [1;d]} \langle x_{s(i)}, u^*(y_i) \rangle \\
&= \quad \delta(x, u^*(y)) \,.
\end{aligned}$$

La deuxième identité est exactement duale de celle-ci en utilisant la bidualité (cf. I.0.3.)

viii) Si x est une base de E et y sa base duale (cf. I.0.1,) $\delta(x, y) = 1$.

***Preuve** : Pour démontrer ce point, il suffit de remarquer que, pour*

$$s \neq \mathrm{Id}_{[1;d]} \ , \ \prod_{i \in [1;d]} \langle x_i, y_{s(i)} \rangle = 0,$$

et que pour l'identité, ce produit vaut 1.

ix) Si x (resp. y) est un système lié,

$$\delta(x, y) = 0 \ .$$

***Preuve** : Supposons que y est lié. Le raisonnement se ferait de manière exactement identique avec x [1].*

Si donc y est lié, on peut supposer que $y_1 = \sum_{i=2}^{d} a_i y_i$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\delta(x, y) &= \delta(x, \sum_{=i}^{2} d a_i y_i, y_2, \ldots, y_d) \\
&= \sum_{s \in \mathcal{S}_d} \sigma(s) \langle x_{s(1)}, \sum_{i=2}^{d} a_i y_i \rangle \prod_{j \in [2;d]} \langle x_{s(j)}, y_j \rangle \\
&\underset{I.0.5.iii)}{=} \sum_{s \in \mathcal{S}_d} \sigma(s) [\sum_{i=2}^{d} a_i \langle x_{s(1)}, y_i \rangle] \prod_{j \in [2;d]} \langle x_{s(j)}, y_j \rangle \\
&= \sum_{i=2}^{d} a_i \sum_{s \in \mathcal{S}_d} \sigma(s) \langle x_{s(1)}, y_i \rangle \prod_{i \in [2;d]} \langle x_{s(i)}, y_i \rangle \\
&= \sum_{i=2}^{d} a_i \delta(x, y_i, y_2, \ldots, y_d) \\
&\underset{II.0.3}{=} 0 \ .
\end{aligned}$$

1. mais on prend cette fois des formes linéaires et non des vecteurs pour ne pas laisser penser au lecteur qu'on lui cache quelque chose lorsqu'on affirme que les raisonnements sur x et y sont duaux l'un de l'autre et qu'il suffit de faire l'un d'entre eux.

x) Si $x := (x_1, \dots, x_d)$ est un d-uplet de vecteurs de E et $b := (b_1, \dots, b_d)$ une base de E,

$$\det_b(x) = \delta(x, b^*) \,,$$

(où b^* est la base duale (cf. I.0.1,) de b.)

Preuve : *Posons u l'endomorphisme de E défini par :*

$$u(b_i) := x_i \,,\ 1 \leq i \leq d \,.$$

On a alors :

$$\begin{array}{rcl} \det_b(x) & \overset{=}{II.0.10} & \det(u) \\ & \overset{=}{viii)} & \det(u)\delta(b, b^*) \\ & \overset{=}{v)} & \delta(u(b), b^*) \\ & = & \delta(x, b^*) \,. \end{array}$$

Corollaire II.0.14 *Étant donnée une base b de E et l'application qui à tout système d-uplet d'éléments de E, v associe $\det_b(v)$ est une forme d-linéaire alternée sur E.*

Preuve : *C'est une conséquence de II.0.13.x) et de II.0.13.iii).*

Corollaire II.0.15 *Étant donné un endomorphisme u de E,*

$$\det(u) = \det(u^*) \,, \qquad \textit{II.0.15.1}$$

(où u^* désigne le dual de u (cf. I.0.1 ;)) pour toute base $\mathcal{B}$ de E, si

$$M := (m_{i,j})_{\frac{1 \leq i \leq d}{1 \leq j \leq d}}$$

est la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$:

$$\det(M) := \det(u) = \sum_{s \,\in\, \mathcal{S}_d} \sigma(s) \prod_{i \,\in\, [1;d]} M_{i,s(i)} = \det({}^t M) \qquad \textit{II.0.15.2}$$

Preuve : *Pour tout (x, y) comme dans le lemme II.0.13, et tout endomorphisme u de E, on a :*

$$\begin{array}{rcl} \det(u)\delta(x, y) & \overset{=}{II.0.13.v)} & \delta(u(x), y) \\ & \overset{=}{II.0.13.vii)} & \delta(x, u^*(y)) \\ & \overset{=}{II.0.13.vi)} & \det(u^*)\delta(x, y) \,. \end{array}$$

L'identité II.0.15.1 en résulte immédiatement en prenant, par exemple, x *une base de* E *et* y *sa base duale (cf. I.0.1,) puisqu'alors on a* $\delta(x,y) = 1$ *(cf. II.0.13.viii).)*

Prenons encore x *une base de* E *et* y *sa base duale. On a alors, pour tout endomorphisme* u *de* E :

$$\begin{array}{lcl} \det(u) & \overset{=}{II.0.13.viii)} & \det(u)\delta(x,y) \\ & \overset{=}{II.0.13.v)} & \delta(u(x),y) \\ & = & \displaystyle\sum_{s \in \mathcal{S}_d} \sigma(s) \prod_{i \in [1;d]} \langle u(x_{s(i)}), y_i \rangle \\ & \overset{=}{I.0.5.1} & \displaystyle\sum_{s \in \mathcal{S}_d} \sigma(s) \prod_{i \in [1;d]} y_i^*[u(x_{s(i)})] \\ & \overset{=}{I.0.2.ii)} & \displaystyle\sum_{s \in \mathcal{S}_d} \sigma(s) \prod_{i \in [1;d]} M_x(u)_{i,s(i)} \ . \end{array}$$

Le fait que le déterminant de M *soit aussi celui de sa transposée peut résulter d'un raisonnement combinatoire sur la formule précédente ; mais en fait ce raisonnement a déjà été fait et on peut tirer ce résultat de II.0.13.vii)et de I.0.4.*

Ceci achève de prouver les identités II.0.15.1.

Corollaire II.0.16 *i) Un endomorphisme* u *de* E *est inversible si et seulement si* $\det(u) \neq 0$.

Preuve : *Si* u *est un automorphisme de* E, *d'après II.0.5.iii) son déterminant* $\det(u)$ *est inversible (i.e. non nul.)*

Réciproquement, si u *n'est pas inversible, pour une base donnée* $(e_1, \ldots, e_d)$ *le système* $(u(v_1), \ldots, u(v_d))$ *est lié. Il résulte alors de II.0.13.ix) et II.0.11.i) que* $\det(u) = 0$.

ii) Étant donnée une base $(e_1, \ldots, e_d)$ *de* E, *un système* $(v_1, \ldots, v_d)$ *de vecteurs de* E *est une base si et seulement si*

$$\det_{(e_1,\ldots,e_d)}(v_1, \ldots, v_d) \neq 0 \ .$$

Preuve : *Est une conséquence immédiate de i).*

Proposition II.0.17 *Supposons donnée sur E une forme bilinéaire (cf. I.1.1,) non dégénérée (cf. I.1.1,) ϕ. Alors tout endomorphisme u de E ϕ-orthogonal (cf. I.1.3,) vérifie*

$$\det(u)^2 = 1 .$$

Preuve : *Rappelons que u est ϕ-orthogonal si et seulement si*

$$\begin{array}{lrcl}
 & u^* \circ \phi \circ u & = & \phi \\
\Rightarrow & \mathcal{A}^d\left(u^* \circ \phi \circ u\right) & = & \mathcal{A}^d\left(\phi\right) \\
\overset{\Rightarrow}{II.0.5.ii)} & \mathcal{A}^d\left(u\right) \circ \mathcal{A}^d\left(\phi\right) \circ \mathcal{A}^d\left(u^*\right) & = & \mathcal{A}^d\left(\phi\right) \\
\Rightarrow & \det(u)\mathcal{A}^d\left(\phi\right)\det(u^*) & = & \mathcal{A}^d\left(\phi\right) \\
\Rightarrow & \det(u)\det(u^*)\mathcal{A}^d\left(\phi\right) & = & \mathcal{A}^d\left(\phi\right) \\
\overset{\Rightarrow}{II.0.5.iii)} & \det(u)\det(u^*) & = & 1 \\
\overset{\Rightarrow}{II.0.15.1} & \det(u)^2 & = & 1 .
\end{array}$$

II.0.18 . $-$Exercices

Exercice II.0.18.1 [Déterminants par blocs]

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, **on note** $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ **la matrice identité. Dans la suite** p **et** q **sont dans** $\mathbb{N}^*$.

1) Soient

$$A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \text{ et } B \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R}) .$$

a) Calculer en fonction de $\det(A)$ et $\det(B)$

$$\det(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix}) \text{ et } \det(\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}) .$$

b) En déduire $\det(\begin{pmatrix} A & \\ 0 & B \end{pmatrix})$ en fonction de $\det(A)$ et $\det(B)$.

Indication : *Utiliser la multiplicativité du déterminant.*

2) Soient

$$A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \ , \ B \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R}) \text{ et } C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R}) .$$

a) Calculer $\det(\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & I_q \end{pmatrix})$ en fonction de $\det(A)$.

b) Pour
$$M := \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{R}),$$
calculer $\det(M)$ en fonction de $\det(A)$ et $\det(B)$.

II.1 . $-$Groupe orthogonal et orientation

Définition II.1.1 Une matrice carrée $d * d$ à coefficients réels est dite *orthogonale* si les vecteurs associés à ses colonnes dans $\mathbb{R}^d$ euclidien (cf. I.2.2) forment une base orthonormée.

Dans toute cette section, (E, ϕ) est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien (cf. I.2.3) de dimension finie d.

On notera $\langle \bullet, \bullet \rangle$ l'accouplement sur E (cf. I.0.5.1) $|| \bullet ||$ la norme euclidienne sur E (cf. I.2.6.)

Proposition II.1.2 *Étant donné un endomorphisme u de E, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) L'endomorphisme u est ϕ-orthogonal (cf. I.1.3.)

b) Pour tout $x \in E$,

$$||u(x)|| = ||x|| \, .$$

c) L'image par u d'une base ϕ-orthonormée (cf. I.2.8) est une base ϕ-orthonormée.

d) Le $\check{u}$ (cf. I.0.1) est un endomorphisme ϕ^{-1}-orthogonal de l'espace dual $\check{E}$ (cf. I.0.1) de E.

e) Dans toute base $\underline{\phi\text{-orthonormée}}$ $\mathcal{B}$ la matrice $M_{\mathcal{B}}(u)$ ainsi que sa transposée ${}^t M_{\mathcal{B}}(u)$ sont orthogonales.

vi) Le ϕ-adjoint u^* (cf. I.1.9) de u est l'inverse de u.

Preuve : À ce stade, cette proposition est une synthèse d'un certain nombre de résultats précédents et n'apporte pas grand-chose de nouveau. Nous nous bornerons donc à indiquer à quels résultats antérieurs il faut faire appel (ou même lesquels simplement appliquer directement) pour la démonstration.

(a) $\Leftrightarrow$ (b) est une conséquence immédiate de l'une (au choix) des identités de polarisation I.2.5.1 ou I.2.5.2.

(a) $\Leftrightarrow$ (c) est un exercice facile qui n'utilise que l'écriture d'un vecteur dans une base et la bilinéarité du produit scalaire.

(a) $\Leftrightarrow$ (d) a déjà été démontré pour une forme bilinéaire non dégénérée en I.1.3.iii) au moins dans le sens direct. Il faut remarquer (cf. I.2.2) que ϕ est non dégénérée et donc que le résultat s'applique bien ici et utiliser la bidualité (cf. I.0.3.ii)) pour obtenir le sens réciproque.

- Enfin, la conjonction de (c) et (d) équivalent évidemment à (e), comme (c) est déjà équivalent à (d), ces deux assertions sont équivalentes à (e).

(a) $\Rightarrow$ (f) a déjà été montré en I.1.3.i). La réciproque est un un exercice très formel.

Définition II.1.1 La caractérisation II.1.2.b) des endomorphismes orthogonaux de E conduit à également appeler ces derniers *isométries vectorielles.*

Définition II.1.2 i) Si (E, ϕ) est un espace euclidien, la forme ϕ est non dégénérée (cf. I.2.2) et par conséquent tout endomorphisme ϕ-orthogonal (isométrie vectorielle) est un automorphisme (cf. I.1.3.i)) et l'ensemble des endomorphismes ϕ-orthogonaux est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$ appelé *groupe orthogonal* et noté $\mathcal{O}_\phi(E)$.

ii) L'application déterminant (cf. II.0.8.i),) donne un morphisme de groupes de $\mathrm{GL}(E)$ à valeurs dans $(\mathbb{R}^\times, *)$ (cf. II.0.8.ii),) dont la restriction à $\mathcal{O}_\phi(E)$ est à valeurs dans $(\{-1; 1\}, *)$ (cf. II.0.17.) On note $\mathcal{SO}_\phi(E) \subset \mathcal{O}_\phi(E)$ le noyau de la restriction de $\det(\cdot)$ à $\mathcal{O}_\phi(E)$.

On appelle *groupe spécial orthogonal* ce sous-groupe qui est <u>distingué</u> dans $\mathcal{O}_\phi(E)$.

Remarque II.1.3 L'application $\det(:)\mathcal{O}_\phi(E) \to (\mathbb{Z}^\times, *)$ est en fait surjective. En effet il est immédiat de vérifier, par exemple grâce à la formule II.0.15.2 que l'endomorphisme σ défini par

$$\sigma(e_1) = -e_1 \ , \ \sigma(e_i) \ = \ e_i \ , \ 2 \ \leq \ i \ \leq \ d$$

vérifie $\det(\sigma) = -1$. Par conséquent, le morphisme de groupes $\det(\cdot)$ induit, par passage au quotient, un isomorphisme

$$\mathcal{O}_\phi(E)/\mathcal{SO}_\phi(E) \ \cong \ (\mathbb{Z}^\times, *) \ .$$

On notera $\mathcal{O}_{\phi,-}(E) \ := \ \det()^{-1} \cdot (-1)$ la classe des isométries vectorielles u de E telles que $\det(u) = -1$.

Définition II.1.4 On appellera *isométrie vectorielle directe* (ou *positive*) (resp. *indirecte* (ou *négative*)) un élément du <u>groupe</u> $\mathcal{SO}_\phi(E)$ (resp. de <u>l'ensemble</u> $\mathcal{O}_{\phi,-}(E)$.)

Remarque II.1.5 Étant donné un élément $\gamma \ \in \ \mathcal{O}_\phi(E)$, si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de γ, alors

$$| \ \lambda \ | = \ 1 \ .$$

En effet, si x est un vecteur propre associé à λ, on a :

$$||x|| \underset{\text{(cf. II.1.2.b),)}}{=} ||\gamma(x)|| = ||\lambda x|| \underset{\text{(cf. I.2.7.i),)}}{=} | \ \lambda \ | \ ||x|| \ .$$

II.1.6. – soit $\mathbb{B}$ l'ensemble des bases ϕ-orthonormées de E (cf. I.2.8.) Si

$$(b_1 \ := \ b_{1,i \ , \ 1 \ \leq \ i \ \leq \ d} \ , \ b_2 \ := \ b_{2,i \ , \ 1 \ \leq \ i \ \leq \ d})$$

est un couple d'éléments de $\mathbb{B}$, il existe un unique $\gamma \in \mathcal{O}_\phi(E)$ tel que $\gamma(b_1) = b_2$, (cf. II.1.2.c).) (Cette notation symbolique, que nous serons amenés à utiliser par la suite, signifie que $\gamma(b_{1,i}) = b_{2,i}$ pour tout $1 \leq i \leq d$.)

Ainsi, pour tout couple (b_1, b_2) d'éléments de $\mathbb{B}$,

$$\begin{array}{lcl} \det_{b_1}(b_2) & \overset{=}{\text{(cf. II.0.10,)}} & \det(\gamma) \\ & \overset{=}{\text{(cf. II.0.8.ii),)}} & \det(\gamma^{-1}) \\ & = & \det_{b_2}(b_1) \ . \end{array} \tag{II.1.6.1}$$

On définit la relation binaire $\sim$ sur $\mathbb{B}$ de la manière suivante :

$$b_1 \sim b_2 \text{ si } \det_{b_1}(b_2) = 1 \ . \tag{II.1.6.2}$$

Proposition II.1.7 *i) La relation $\sim$ définie en II.1.6.2 est une relation d'équivalence.*

ii) Un élément b_0 de $\mathbb{B}$ étant choisi, l'application

$$\begin{array}{rrcl} \det()b_0 : & \mathbb{B} & \to & \mathbb{Z}^\times \\ & b & \mapsto & \det_{b_0}(b) \end{array}$$

induit une bijection encore notée

$$\det()b_0 \ : \ \mathbb{B}/\sim \to \ \mathbb{Z}^\times$$

de l'ensemble $\mathbb{B}/\sim$ des classes selon $\sim$ dans $\mathbb{Z}^\times$.

iii) Si b_0 et b_0' sont des éléments de $\mathbb{B}$, on a la relation suivante entre les bijections $\det()b_0$ et $\det()b_0'$ définies comme en (ii) :

$$\det()b_0' \ = \ \det_{b_0}(b_0')\det()b_0' \ .$$

Définition II.1.8 i) On dira qu'on a *choisi une orientation* sur l'espace euclidien (E, ϕ) si l'on a choisi une bijection

$$\mathbb{B}/\sim \to \ \mathbb{Z}^\times \ .$$

ii) Choisir un tel isomorphisme est équivalent à choisir un élément b_0 de $\mathbb{B}$ appartenant à l'une des deux classes pour la relation $\sim$ (cf. II.1.7.ii),) auquel cas on dira que $(E, \phi, \overline{b_0})$ est un *espace vectoriel euclidien orienté.*

iii) Une orientation étant choisie sur E (E étant orienté,) on appellera *base directe* (resp. *rétrograde*) un élément de $\mathbb{B}$ correspondant à $1 \in \mathbb{Z}^\times$, (resp. $-1 \in \mathbb{Z}^\times$.)

Remarque II.1.9 On peut compléter la remarque I.2.2 puisque dans $\mathbb{R}^d$, une base (canonique) orthonormée pour la structure euclidienne canonique est toujours donnée. Autrement dit, $\mathbb{R}^d$ est muni d'une orientation canonique.

Proposition II.1.10 *Une orientation $b_0 \in \mathbb{B}$ étant choisie sur E ,*

i) un élément $\gamma \in \mathcal{O}_\phi(E)$ appartient à $\mathcal{SO}_\phi(E)$, (resp. à $\mathcal{O}_{\phi,-}(E)$,) si et seulement si l'image de toute base orthonormée directe par γ est une base orthonormée directe (resp. une base orthonormée rétrograde) si et seulement si l'image de toute base orthonormée rétrograde par γ est une base orthonormée rétrograde (resp. directe ;)

ii) l'orientation induit une bijection naturelle de $\mathcal{SO}_\phi(E)$, (resp. $\mathcal{O}_{\phi,-}(E)$,) sur l'ensemble des bases orthonormées directes (resp. des bases orthonormées rétrogrades ;)

iii) pour tout système $v := (v_1, \ldots, v_d)$ de vecteurs de E et toute base $b \in \mathbb{B}$ directe (resp. rétrograde,)

$$\det()b(v) = \det_{b_0}(v) \text{ (resp. } \det()b(v) = -\det_{b_0}(v) \text{ .)}$$

Preuve : Les points (i) et (ii) résultent de ce qui précède ; quant au point (iii) il est une conséquence immédiate de II.0.11.ii).

II.2 . –Étude du groupe spécial orthogonal en dimension 2.

Dans cette section, on s'intéresse à l'étude du groupe spécial orthogonal $\mathcal{SO}_\phi(E)$ (cf. II.1.2.ii)) (groupe des isométrie positives (cf. II.1.4)) pour un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien (cf. I.2.3.ii)) (E, ϕ) de dimension 2.

Le but de cette section est d'établir les théorèmes II.2.7, II.2.1, II.2.1 et II.2.4, ce dernier conduisant à la définition II.2.1.

Proposition II.2.1 *Soit (E, ϕ) un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien (cf. I.2.3) de dimension 2 . Soit $B := (e_1, e_2)$ une base ϕ-orthonormée (cf. I.2.8) de E.*

On définit l'endomorphisme ρ_B de E par

$$\begin{aligned} \rho_B(e_1) &:= e_2 \\ \rho_B(e_2) &:= -e_1 \ ; \end{aligned} \qquad \textit{II.2.1.1}$$

c'est-à-dire que la matrice de ρ_B dans la base B est

$$M_B(\rho_B) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \qquad \textit{II.2.1.2}$$

iii) L'endomorphisme ρ_B appartient à $\mathcal{SO}_\phi(E)$ (cf. II.1.2.ii).)

iv) L'endomorphisme ρ_B vérifie :

$$\begin{aligned} \rho_B^2 &= -\mathrm{Id}_E \\ \rho_B^3 &= -\rho_B \\ \rho_B^4 &= \mathrm{Id}_e \ . \end{aligned}$$

v) L'endomorphisme ρ_B a la propriété :

$$\rho_B^* \underset{\text{(cf. I.1.9.1,)}}{=} \phi^{-1} \circ \check{\rho}_B \circ \phi \underset{\text{(cf. I.1.3.i),)}}{=} \rho_B^{-1} = -\rho_B \ .$$

vi) Pour tout élément $\rho \in \mathcal{SO}_\phi(E)$, il existe un unique couple $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tel que

$$\rho = a\mathrm{Id}_E + b\rho_B \ ,$$

de plus, $a^2 + b^2 = 1$.

Preuve :

i) En effet

$$\begin{aligned} \check{\rho_B}[\phi(\rho_B(e_1))] &= \check{\rho_B}[\phi(e_2)] \\ &= \check{\rho_B}(e_2^*) \\ &= e_2^* \circ \rho_B \ . \end{aligned}$$

On a par ailleurs :

$$\begin{aligned} e_2^* \circ \rho_B(e_1) &= e_2^*(e_2) \\ &= 1 \\ &= e_1^*(e_1) \\ &= \phi(e_1)(e_1) \ ; \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} e_2^* \circ \rho_B(e_2) &= e_2^*(-e_1) \\ &= 0 \\ &= e_1^*(e_2) \\ &= \phi(e_1)(e_2) \ ; \end{aligned}$$

c'est-à-dire finalement que

$$\check{\rho_B} \circ \phi \circ \rho_B(e_1) = \phi(e_1) \ .$$

On démontre de manière analogue que

$$\check{\rho_B} \circ \phi \circ \rho_B(e_2) = \phi(e_2) \ ,$$

i.e. finalement que

$$\check{\rho_B} \circ \phi \circ \rho_B = \phi$$

donc que ρ_B est ϕ-orthogonal.

Par ailleurs

$$\begin{aligned} \det(\rho_B) &\overset{\text{(cf. II.0.11.i),)}}{=} \det(_) B[\rho_B(e_1), \rho_B(e_2)] \\ &\overset{\text{(cf. II.0.10,)}}{=} \delta(e_2, -e_1, e_1^*, e_2^*) \\ &\overset{\text{(cf. II.0.13.1,)}}{=} \langle e_1^* \mid e_2\rangle\langle e_2^* \mid -e_1\rangle - \langle e_2^* \mid e_2\rangle\langle e_1^* \mid -e_1\rangle \\ &= 1 \ . \end{aligned}$$

ii) Est un exercice.

iii) A déjà été démontré en I.1.3.i).

iv) Pour tout $\rho \in \mathcal{SO}_\phi(E)$, il existe un unique quadruplet $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que la matrice de ρ dans la base $B = (e_1, e_2)$ soit

$$M_B(\rho) \ := \ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} .$$

Le fait que ρ appartienne à $\mathcal{SO}_\phi(E)$ équivaut à :

$$\begin{aligned}
&\left\{\begin{array}{rcl} \phi[\rho(e_1), \rho(e_1)] & = & \phi(e_1, e_1) \\ \phi[\rho(e_2), \rho(e_2)] & = & \phi(e_2, e_2) \\ \phi[\rho(e_1), \rho(e_2)] & = & \phi(e_1, e_2) \\ \det(\rho) & = & 1 \end{array}\right\} \\
\Leftrightarrow \ &\left\{\begin{array}{rcl} a^2 + c^2 & = & 1 \\ b^2 + d^2 & = & 1 \\ ab + cd & = & 0 \\ ad - bc & = & 1 \end{array}\right\} \\
\Rightarrow \ &\left\{\begin{array}{rcl} a^2 + c^2 & = & 1 \\ b^2 + d^2 & = & 1 \\ ab^2 + bcd & = & 0 \\ abd + cd^2 & = & 0 \\ ad - bc & = & 1 \end{array}\right\} \\
\Rightarrow \ &\left\{\begin{array}{rcl} a^2 + c^2 & = & 1 \\ b^2 + d^2 & = & 1 \\ ab^2 + ad^2 - d & = & 0 \\ cb^2 + b + cd^2 & = & 0 \end{array}\right\} \\
\Rightarrow \ &\left\{\begin{array}{rcl} a & = & d \\ b & = & -c\,. \end{array}\right\}
\end{aligned} \tag{1}$$

Il s'ensuit que la matrice $M_B(\rho)$ dans la base B est

$$M_B(\rho) \ = \ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} ,$$

c'est-à-dire que

$$\rho \ = \ a\mathrm{Id}_E + b\rho_B \ .$$

Par ailleurs $\det(\rho) = 1$ équivaut à $a^2 + b^2 = 1$.

Remarque II.2.5 On pourrait bien évidemment donner une preuve de II.2.1.iii)
en utilisant l'écriture matricielle dans la base orthonormée B (cf. II.2.1.2) et la caractérisation II.1.2.e) des endomorphismes ϕ-orthogonaux en termes de matrices.

Corollaire II.2.6 *i) Pour tout* $\rho \in \mathcal{SO}_\phi(E)$,

$$\rho_B^{-1} \circ \rho \circ \rho_B = \rho .$$

ii) Pour tout $\rho \in \mathcal{SO}_\phi(E)$,

$$\rho^{-1} \circ \rho_B \circ \rho = \rho_B .$$

iii) Pour tout couple (ρ, ρ') *d'éléments de* $\mathcal{SO}_\phi(E)$,

$$\rho^{-1} \circ \rho' \circ \rho = \rho' .$$

iv) Pour tout élément $\sigma \in \mathcal{O}_{\phi,-}(E)$ *(cf. II.1.3)*

$$\sigma^{-1} \circ \rho_B \circ \sigma = -\rho_B = \rho_B^{-1} = \phi^{-1} \circ \check{\rho}_B \circ \phi = \rho_B^*.$$

v) Pour tout $\rho \in \mathcal{SO}_\phi(E)$ *et tout* $\sigma \in \mathcal{O}_{\phi,-}(E)$,

$$\sigma^{-1} \circ \rho \circ \sigma = \phi^{-1} \circ \check{\rho} \circ \phi = \rho^{-1} = \rho_B^* .$$

vi) Pour toute base orthonormée directe B^+ *(cf. II.1.8.iii)) (resp. rétrograde* B^-,)

$$\rho_{B^+} = \rho_B \text{ (resp. } \rho_{B^-} = \phi^{-1} \circ \check{\rho}_B \circ \phi = \rho_B^{-1} = \rho_B^*.$$

Preuve :

i) Pour tout $\rho \in \mathcal{SO}_\phi(E)$, il existe un unique couple $(a, b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ tel que $\rho = a\mathrm{Id}_E + b\rho_B$ (cf. II.2.1.vi).) Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
\rho_B^{-1} \circ \rho \circ \rho_B &= \rho_B^{-1} \circ (a\mathrm{Id}_E + b\rho_B) \circ \rho_B \\
&= a\mathrm{Id}_E + b\rho_B^{-1}\rho_B^2 \\
&= a\mathrm{Id}_E + b\rho_B \\
&= \rho .
\end{aligned}$$

ii) est une conséquence immédiate de (i).

iii) Pour tout couple (ρ, ρ') d'éléments de $\mathcal{SO}_\phi(E)$, il existe un unique couple $(a', b') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tel que $\rho' = a'\mathrm{Id}_E + b'\rho_B$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \rho^{-1} \circ \rho' \circ \rho &= \rho^{-1} \circ (a'\mathrm{Id}_E + b'\rho_B) \circ \rho \\ &= a'\mathrm{Id}_E + b'(\rho^{-1} \circ \rho_B \circ \rho) \\ &\underset{\text{ii}}{=} a'\mathrm{Id}_E + b'\rho_B \\ &= \rho' \; . \end{aligned}$$

iv) Pour $\sigma \in \mathcal{O}_{\phi,-}(E)$, posons

$$\begin{aligned} u &:= \sigma(e_1) \\ v &:= \sigma(e_2) \; . \end{aligned}$$

La base (u, v) est rétrograde dans l'orientation donnée par B (cf. II.1.10.i).) *i.e.*

$$\det()B(u,v) \underset{\text{(cf. II.0.10,)}}{=} \det(\sigma) = -1 \; .$$

Il en résulte que

$$\det()B(u,-v) \underset{\text{(cf. II.0.1.1,)}}{=} -\det()B(u,v) = 1 \; .$$

Posons alors γ l'unique élément de $\mathcal{SO}_\phi(E)$ tel que

$$\begin{aligned} \gamma(e_1) &= u \\ \gamma(e_2) &= -v \; . \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} [\sigma^{-1} \circ \rho_B][\sigma(e_1)] &= [\sigma^{-1} \circ \rho_B]\gamma(e_1) \\ &\underset{\text{iii}}{=} \sigma^{-1}[\gamma \circ \rho_B](e_1) \\ &= \sigma^{-1}[\gamma(e_2)] \\ &= \sigma^{-1}(-v) \\ &= -\sigma^{-1}(v) \\ &= -e_2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} [\sigma^{-1} \circ \rho_B][\sigma(e_2)] &= -[\sigma^{-1} \circ \rho_B][\gamma(e_2)] \\ &\underset{\text{iii}}{=} -\sigma^{-1}[(\gamma \circ \rho_B)(e_2)] \\ &= -\sigma^{-1}[-\gamma(e_1)] \\ &= \sigma^{-1}(u) \\ &= e_1 \; . \end{aligned}$$

Ceci prouve que

$$\sigma^{-1} \circ \rho_B \circ \sigma \;=\; -\rho_B \;.$$

Le reste des égalités résulte de II.2.1.v).

v) Pour tous

$$\rho \;=\; a\mathrm{Id}_E + b\rho_B \;\in\; \mathcal{SO}_\phi(E) \text{ et } \sigma \;\in\; \mathcal{O}_{\phi,-}(E),$$

$$\begin{array}{rcl}
\sigma^{-1} \circ \rho \circ \sigma & = & \sigma^{-1} \circ (a\mathrm{Id}_E + b\rho_B) \circ \sigma \\
 & = & a\mathrm{Id}_E + b\sigma^{-1} \circ \rho_B \circ \sigma \\
 & \underset{\text{iv}}{=} & a\mathrm{Id}_E + b\phi^{-1} \circ \check{\rho_B} \circ \phi \\
 & = & \phi^{-1}(a\check{\mathrm{Id}_E} + b\check{\rho_B})\phi \\
 & \underset{\text{(cf. I.0.2.iv),)}}{=} & \phi^{-1} \circ \check{\rho} \circ \phi \\
 & \underset{\text{(cf. I.1.3.i),)}}{=} & \rho^{-1} \;.
\end{array}$$

vi) Est une conséquence facile de ce qui précède.

Théorème II.2.7 *Étant donné un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien (E, ϕ) de dimension 2, le groupe spécial orthogonal $\mathcal{SO}_\phi(E)$ est abélien (commutatif.)*

Preuve : C'est le point II.2.6.iii).

Théorème II.2.1 *Étant donné un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien (E, ϕ) de dimension 2, pour tout élément $\rho \;\in\; \mathcal{SO}_\phi(E)$, et tout élément $\sigma \;\in\; \mathcal{O}_{\phi,-}(E)$,*

$$\sigma^{-1} \;\circ\; \rho \;\circ\; \sigma \;=\; \rho^{-1} \;=\; \rho^* \;.$$

Preuve : Ce résultat, dégagé du reste par l'importance qu'il a dans toute la suite, n'est, en fait, que le point II.2.6.v).

Proposition II.2.1 *Étant donné un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien <u>orienté</u> (E, ϕ, B) de dimension 2, (cf. II.1.8.ii),) pour tout élément $\rho \in \mathcal{SO}_\phi(E)$, il existe un unique couple $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tel que la matrice $M_{B^+}(\rho)$ (resp. $M_{B^-}(\phi)$,) dans toute base directe B^+ (resp. rétrograde B^- ,) est de la forme*

$$M_{B^+}(\rho) \;=\; \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ (resp. } M_{B^-}(\rho) \;=\; \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \text{ .)}$$

Preuve : On dispose sur E d'une base ϕ-orthonormée B à laquelle on associe un élément $\rho_B \in \mathcal{SO}_\phi(E)$ (cf. II.2.1.1.) D'après la proposition II.2.1.vi), il existe un unique couple

$$(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ tel que } \rho \;=\; a\mathrm{Id}_E + b\rho_B \ .$$

Pour toute base B^+ (resp. B^-) directe (resp. rétrograde,) il existe une unique isométrie positive γ (resp. négative σ ,) telle que

$$\gamma(B) \;=\; B^+ \text{ (resp. } \sigma(B) \;=\; B^- \text{ .)}$$

On a alors

$$\begin{array}{rcl} \rho & \overset{=}{\text{(cf. II.2.7,)}} & \gamma^{-1}\rho\gamma \\ \Leftrightarrow\ M_B(\rho) & = & M_B(\gamma^{-1}\rho\gamma) \\ \Leftrightarrow\ M_B(\rho) & = & M_B(\gamma)^{-1}M_B(\rho)M_B(\gamma) \\ \Rightarrow\ M_B(\rho) & = & M_{B^+}(\rho)\ , \end{array}$$

(resp.

$$\begin{array}{rcl} \rho^* & \overset{=}{\text{(cf. II.2.1,)}} & \sigma^{-1}\rho\sigma \\ \Leftrightarrow \qquad M_B(\rho^*) & = & M_B(\sigma^{-1}\rho\sigma) \\ \overset{\Leftrightarrow}{\text{(cf. I.1.12.1,)}}\ {}^t[M_B(\rho)] & = & M_B(\sigma)^{-1}M_B(\rho)M_B(\sigma) \\ \Leftrightarrow \qquad {}^t[M_B(\rho)] & = & M_{B^-}(\rho)\ .) \end{array}$$

Or il est clair que, dans la base B, la matrice $M_B(\rho)$ est

$$M_B(\rho) \;=\; \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

ce qui achève la preuve.

Théorème II.2.1 *Étant donné un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien <u>orienté</u> (E, ϕ, B) de dimension 2, (cf. II.1.8.ii),) pour toute isométrie positive $\rho \in \mathcal{SO}_\phi(E)$, il existe un unique couple $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, tel que $a^2 + b^2 = 1$ et que la matrice de ρ dans toute base orthonormée <u>directe</u> est*

$$M \;=\; \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} .$$

Preuve : C'est une conséquence de la proposition II.2.1.

Proposition II.2.1 *Notons U l'ensemble des nombres complexes de module 1 .*
Étant donné un $\mathbb{R}$-espace euclidien (E, ϕ),

i) l'application $c_B : \mathcal{SO}_\phi(E) \to U$ associée à toute base ϕ-orthonormée B par

$$c_B(a\mathrm{Id}_E + b\rho_B) \ := \ a + ib$$

(où i est un nombre complexe tel que $i^2 = -1$, a et b sont définis grâce à la proposition II.2.1.vi),) est un isomorphisme de groupes.

ii) On a défini ci-dessus une application de l'ensemble $\mathbb{B}$ dans l'ensemble des isomorphismes de groupes $\mathcal{SO}_\phi(E) \to U$ qui à toute base orthonormée B associe c_B. Cette application est constante sur les classes d'équivalence sous la relation $\sim$ (cf. II.1.6.2,) et prend deux valeurs qui satisfont à la relation, pour tout couple (B, B') d'éléments de $\mathbb{B}$,

$$c_B \ = \ c_{B'} \text{ si } B \ \sim \ B' \ , \ c_B \ = \ \overline{c_{B'}} \textit{ sinon} \ .$$

iii) Pour toute base ϕ-orthonormée B, la composée de l'isomorphisme c_B avec l'isomorphisme de groupes $\arg : U \to \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ donne un isomorphisme

$$\begin{array}{rccl} \theta_B : & \mathcal{SO}_\phi(E) & \cong & \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \\ & \rho & \mapsto & \arg[c_B(\rho)] \ . \end{array}$$

L'application ainsi définie de $\mathbb{B}$ dans les isomorphismes de groupes $\mathcal{SO}_\phi(E) \cong \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, est constante sur les classes modulo $\sim$ et satisfait la relation, pour tout couple (B, B') d'éléments de $\mathbb{B}$:

$$\theta_B \ = \ \theta_{B'} \text{ si } B \ \sim \ B' \ , \ \theta_B \ = \ -\theta_{B'} \textit{ sinon} \ .$$

Par ailleurs, pour tout $\rho \ := \ a\mathrm{Id}_E + b\rho_B$,

$$\begin{array}{rcl} a & = & \cos\theta_B(\rho) \\ b & = & \sin\theta_B(\rho) \ . \end{array} \tag{1}$$

Preuve :

i) La condition $a^2 + b^2 = 1$ dans la proposition II.2.1.vi) assure bien que c_B est à valeurs dans U .

Par ailleurs, pour tout

$$\rho \ := \ a\mathrm{Id}_E + b\rho_B \ , \ \rho' \ := \ a'\mathrm{Id}_E + b'\rho_B \ ,$$

(où ρ_B est déterminé à partir de l'orientation (cf. II.2.1.1,))

$$\begin{array}{rcl}
c_B(\rho \circ \rho') & = & c_B[(a\mathrm{Id}_E + b\rho_B) \circ (a'\mathrm{Id}_E + b'\rho_B)] \\
& = & c_B(aa'\mathrm{Id}_E + ba'\rho_B + ab'\rho_B + bb'\rho_B^2) \\
& \overset{=}{\text{(cf. II.2.1.iv),)}} & c_B[(aa' - bb')\mathrm{Id}_E + (ab' + ba')\rho_B] \\
& = & aa' - bb' + i(ab' + ba') \\
& = & (a + ib) * (a' + ib') \\
& = & c_B(\rho) * c_B(\rho') \ ,
\end{array}$$

c'est-à-dire que c_B est un morphisme de groupes.

Enfin, pour tout $a + ib \in U$,

$$\check{(a\mathrm{Id}_E + b\rho_B)} \circ \phi \circ (a\mathrm{Id}_E + b\rho_B)$$

$$\begin{array}{rl}
\overset{=}{\text{(cf. I.0.2.iv),)}} & a^2\phi + b^2(\check{\rho}_B \circ \phi \circ \rho_B) + ab(\check{\rho}_B \circ \phi + \phi \circ \rho_B) \\
\overset{=}{\text{(cf. I.1.4,)}} & (a^2 + b^2)\phi + ab\phi \circ (\rho_B^* + \rho_B) \\
\overset{=}{\text{(cf. II.2.1.v),)}} & \phi \ ,
\end{array}$$

c'est-à-dire que

$$a\mathrm{Id}_E + b\rho_B \ \in \ \mathcal{O}_\phi(E) \ .$$

Par ailleurs,

$$\begin{array}{rcl}
\det(a\mathrm{Id}_E + b\rho_B) & = & \det(\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}) \\
& = & a^2 + b^2 \\
& = & 1 \ ,
\end{array}$$

c'est-à-dire que

$$a\mathrm{Id}_E + b\rho_B \ \in \ \mathcal{SO}_\phi(E) \ ,$$

c'est-à-dire que c_B est surjective.

L'injectivité de c_B étant, pour ainsi dire, évidente, l'application c_B est donc bijective. Comme c_B est un morphisme de groupes, c'est un isomorphisme.

ii) Supposons que (B, B') est un couple d'éléments de $\mathbb{B}$.

$*$) Si $B \sim B'$, d'après le corollaire II.2.6.vi) $\rho_B = \rho_{B'}$. D'après l'unicité de la décomposition dans la proposition II.2.1.vi), $c_B = c_{B'}$.

†) Si B et B' n'appartiennent pas à la même classe modulo $\sim$, toujours d'après le corollaire II.2.6.vi), $\rho_B \;=\; -\rho_{B'}$ et par conséquent, si un élément ρ s'écrit $a\mathrm{Id}_E + b\rho_B$, il s'écrira, toujours par unicité de la décomposition, $a\mathrm{Id}_E - b\rho_{B'}$ et par conséquent

$$c_B(\rho) \;=\; a+ib \;=\; \overline{a-ib} \;=\; \overline{c_{B'}(\rho)}\,.$$

iii) Est une conséquence immédiate de (ii) et du fait bien connu que pour un nombre complexe $z \neq 0$, $\arg(z) \;=\; -\arg\overline{z}$.

Théorème II.2.4 *Étant donné un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien orienté (E, ϕ, B) de dimension 2, pour toute isométrie positive $\rho \in \mathcal{SO}_\phi(E)$, il existe un unique nombre réel $\theta \in]-\pi, \pi]$ tel que la matrice de ρ dans toute base orthonormée directe soit*

$$M(\theta) \;=\; \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Preuve : C'est une conséquence de la proposition II.2.1.

Définition II.2.1 Étant donné une $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien orienté (E, ϕ, B) de dimension 2, on appellera *rotation d'angle* $\theta \in]-\pi, \pi]$, toute isométrie positive $\rho \in \mathcal{SO}_\phi(E)$ où θ est défini comme dans le théorème II.2.4.

II.3 . $-$Étude des isométrie négatives en dimension 2

**Dans cette section, on établit quelques propriétés fondamentales des isométries négatives
(cf. II.1.4) pour un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien (cf. I.2.3.ii)) (E, ϕ) de dimension 2.**

On a en vue d'établir qu'en dimension 2, les seules isométries négatives sont les symétries orthogonales (voir le théorème II.3.8 .)

Proposition II.3.1 *Soit (E, ϕ) un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien (cf. I.2.3) de dimension 2 . Soit $B := (e_1, e_2)$ une base orthonormée (cf. I.2.8) de E.*

On définit l'endomorphisme σ_B de E par

$$\begin{array}{rcl} \sigma_B(e_1) & := & e_1 \\ \sigma_B(e_2) & := & -e_2 \ ; \end{array} \qquad \textit{II.3.1.1}$$

c'est-à-dire que la matrice de σ_B dans la base B est

$$M_B(\sigma_B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \qquad \textit{II.3.1.2}$$

iii) L'endomorphisme σ_B appartient à $\mathcal{O}_{\phi,-}(E)$.

iv) Pour tout $\sigma \in \mathcal{O}_{\phi,-}(E)$, il existe un unique $\rho \in \mathcal{SO}_\phi(E)$ tel que

$$\sigma = \rho \circ \sigma_B .$$

v) Pour tout $\sigma \in \mathcal{O}_{\phi,-}(E)$, il existe un unique $\rho \in \mathcal{SO}_\phi(E)$ tel que

$$\sigma = \sigma_B \circ \rho .$$

vi) Tout endomorphisme $\sigma \in \mathcal{O}_{\phi,-}(E)$ est ϕ-auto-adjoint (cf. I.1.1) i.e. pour toute base ϕ-orthonormée β ,

$$M_\beta(\sigma) = {}^tM_\beta(\sigma) .$$

vii) Tout endomorphisme $\sigma \in \mathcal{O}_{\phi,-}(E)$ vérifie

$$\sigma^2 = \mathrm{Id}_e .$$

viii) Tout endomorphisme

$\sigma \in \mathcal{O}_{\phi,-}(E)$ admet une base ϕ-orthonormée de vecteurs propres

associés respectivement aux valeurs propres 1 et -1 .

Preuve :

i) Est clair.

ii) Pour tout $\sigma \in \mathcal{O}_{\phi,-}(E)$,

$$\det(\sigma \circ \sigma_B^{-1}) = (-1)^2 = 1 ;$$

i.e.

$$\rho := \sigma \circ \sigma_B^{-1} \in \mathcal{SO}_\phi(E) .$$

iii) La démonstration de (iii) est identique à celle de (ii).

iv) Il n'est pas difficile de voir que σ_B est ϕ-auto-adjoint *i.e.*

$$\phi^{-1} \circ \check{\sigma_B} \circ \phi = \sigma_B .$$

Pour tout $\sigma \in \mathcal{O}_{\phi,-}(E)$, il existe un unique $\rho \in \mathcal{SO}_\phi(E)$ tel que $\sigma = \rho \circ \sigma_B$ (cf. (ii).) Il s'ensuit que

$$\begin{array}{rcl}
\phi^{-1} \circ \check{\sigma} \circ \phi & \overset{=}{\text{(cf. I.0.2.ii),)}} & \phi^{-1} \circ \check{\sigma_B} \circ \check{\rho} \circ \phi \\
& = & \phi^{-1} \circ \check{\sigma_B} \circ \phi \circ \phi^{-1} \circ \check{\rho} \circ \phi \\
& = & \sigma_B \circ \phi^{-1} \circ \check{\rho} \circ \phi \\
& \overset{=}{\text{(cf. II.2.1,)}} & \sigma_B \circ \sigma_B^{-1} \circ \rho \circ \sigma_B \\
& = & \rho \circ \sigma_B \\
& = & \sigma .
\end{array}$$

v) On remarque immédiatement que

$$\sigma_B^2 = \mathrm{Id}_E .$$

Pour tout $\sigma \in \mathcal{O}_{\phi,-}(E)$, il existe un unique $\rho \in \mathcal{SO}_\phi(E)$ tel que $\sigma = \rho \circ \sigma_B$. Dès lors

$$\begin{array}{rcl}
\sigma^2 & = & \rho \circ \sigma_B \circ \rho \circ \sigma_B \\
& = & \rho \circ \sigma_B^{-1} \circ \rho \circ \sigma_B \\
& \overset{=}{\text{(cf. II.2.1,)}} & \rho \circ \phi^{-1} \circ \check{\rho} \circ \phi \\
& \overset{=}{\text{(cf. I.1.3.i),)}} & \mathrm{Id}_E .
\end{array}$$

vi) Vérifier que le polynôme minimal d'un endomorphisme $\sigma \in \mathcal{O}_{\phi,-}(E)$ est $X^2 - 1$ et appliquer les résultats connus d'algèbre linéaire. On peut aussi appliquer les résultats connus sur la diagonalisation des endomorphismes auto-adjoints.

Définition II.3.7 Étant donné un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 2 (E, ϕ), le point
(cf. II.3.1.viii)) conduit à appeler *symétrie orthogonale* ou *réflexion orthogonale* un élément $\sigma \in \mathcal{O}_{\phi,-}(E)$.

Théorème II.3.8 *Étant donné un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien (E, ϕ) de dimension 2, une isométrie négative de de E (un élément de $\mathcal{O}_{\phi,-}(E)$,) est une symétrie orthogonale par rapport à une droite vectorielle c'est-à-dire un endomorphisme diagonalisable dans une base orthonormée possédant 1 et -1 comme valeurs propres.*

Preuve : Ce théorème découle de la proposition (cf. II.3.1) qui établit le sens directe du théorème.

Le sens réciproque est clair et résulte, apr exemple du critère II.1.2.c).

Théorème II.3.1 (Classification des isométries vectorielles) *Étant donné un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien (E, ϕ) de dimension 2, pour tout élément $\gamma \in \mathcal{O}_\phi(E)$, seules les situations suivantes sont possibles :*

i) Soit $\gamma \in \mathcal{SO}_\phi(E)$ i.e. $\det(\gamma) = 1$ ou, de manière équivalente, une orientation étant fixée (cf. II.1.8.ii),) l'image de toute base ϕ-orthonormée <u>directe</u> par γ est une base ϕ-orthonormée <u>directe</u>.

Dans ce cas, γ est une rotation dont l'angle θ (cf. II.2.1) est uniquement déterminé par l'orientation et la matrice de γ dans toute base orthonormée directe est

$$M(\gamma) := \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

ii) Soit $\gamma \in \mathcal{O}_{\phi,-}(E)$ i.e. $\det(\gamma) = -1$ ou, de manière équivalente, une orientation étant fixée, l'image de toute base ϕ-orthonormée <u>directe</u> par γ est une base ϕ-orthonormée <u>rétrograde</u>.

Dans ce cas γ est une <u>symétrie orthogonale</u> (cf. II.3.7) et il existe une base ϕ-orthonormée dans laquelle la matrice de γ est

$$M(\gamma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pour toute base ϕ-orthonormée B, il existe un couple $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ <u>dépendant de B</u>, vérifiant $a^2 + b^2 = 1$ et tel que la matrice de γ dans B est

$$M_B(\gamma) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix},$$

ou encore, il existe un unique $\theta \in]-\pi, \pi]$ tel que

$$M_B(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Preuve : L'étude du groupe $\mathcal{SO}_\phi(E)$ a été menée dans la section II.2 et celle des isométries négatives dans la section II.3.

i est une conséquence de II.2.1.iii) et de II.2.1.

ii est une conséquence de la proposition II.3.1. L'écriture matricielle résulte plus particulièrement de (i) et de II.3.1.iv).

Remarque II.3.1 Étant donnés un $\mathbb{R}$-espace euclidien (E, ϕ) de dimension 2 et $B := (e_1, e_2)$ une base de E, on note Γ_B l'unique application linéaire définie par :

$$\begin{array}{rccc} \Gamma_B : & E & \to & \mathbb{C} \\ & e_1 & \mapsto & 1 \\ & e_2 & \mapsto & i \end{array}$$

où $\mathbb{C}$ est vu comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 à travers la base $(1, i)$.

i) Pour des raisons évidentes de dimension, Γ_B est un isomorphisme.

ii) La base B définissant une orientation sur E (cf. II.1.8,) on peut définir un isomorphisme de groupes c_B : $\mathcal{SO}_\phi(E) \cong U$ (cf. II.2.1.)

Alors, pour tout $\rho \in \mathcal{SO}_\phi(E)$ et tout $x \in E$,

$$\Gamma_B(\rho(x)) = c_B(\rho) *_{\mathbb{C}} \Gamma_B(x) . \qquad 1$$

En effet, pour tout $\rho \in \mathcal{SO}_\phi(E)$, il existe un unique couple $(a, b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ tel que $M_B(\rho) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ (cf. II.2.1.vi).) Pour tout $x \in E$, il existe un unique couple $(x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tel que $x = x_1e_1 + x_2e_2$. Il s'ensuit que

$$\begin{array}{rcl} \Gamma_B[\rho(x)] & = & \Gamma_B[\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}] \\ & = & \Gamma_B[(ax_1 - bx_2)e_1 + (bx_1 + ax_2)e_2] \\ & = & ax_1 - bx_2 + i(bx_1 + ax_2) \\ & = & (a + ib) * (x_1 + ix_2) \\ & \underset{\text{(cf. II.2.1.i),)}}{=} & c_B(\rho) * \Gamma_B(x) . \end{array}$$

Remarquons que tout élément $c_B(\rho) \in U$ s'écrit $e^{i\theta}$ pour un unique $\theta \in]-\pi, \pi]$ où θ est l'unique représentant dans $]-\pi, \pi]$ de $\arg[c_B(\rho)]$ et que par conséquent

$$\Gamma_B[\rho(x)] = e^{i\theta}(x_1 + ix_2) . \qquad 2$$

iii) Si l'on note σ_B la symétrie orthogonale définie comme en II.3.1.1, il est immédiat de constater que pour tout $x \in E$,

$$\Gamma_B[\sigma_B(x)] = \overline{\Gamma_B(x)} . \qquad 1$$

Il en résulte, grâce à II.3.1.iv), que pour tout $\sigma \in \mathcal{O}_{\phi,-}(E)$, il existe un unique

$$\theta := \arg[c_B(\sigma \circ \sigma_B)] \in]-\pi, \pi]$$

tel que pour tout $x := x_1e_1 + x_2e_2 \in E$,

$$\Gamma_B[\sigma(x)] = e^{i\theta}(x_1 - ix_2) . \qquad 2$$

II.4 . −Quelques propriétés du groupe orthogonal en dimension 2

Dans cette section, (E, ϕ) **est un espace vectoriel euclidien de dimension** 2, **(cf. I.2.3.)**

On notera $\langle \bullet, \bullet \rangle$ **l'accouplement de dualité (cf. I.0.5.1,) ou produit scalaire (cf. I.2.3.iii),) et** $|| \bullet ||$ **la norme euclidienne (cf. I.2.6.)**

Définition II.4.1 On appelle *vecteur unitaire* un élément $u \in E$ tel que $||u|| = \sqrt{\langle u, u \rangle} = 1$. Soit $\mathbb{A}$ l'ensemble des couples (u, v) de vecteurs unitaires de E .

Lemme II.4.2 *Un élément* $\rho \in \mathcal{SO}_\phi(E)$ *possède un vecteur propre si et seulement si* $\rho = \mathrm{Id}_E$ *ou* $\rho = -\mathrm{Id}_E$.

Preuve : Soit B une base ϕ-orthonormée de E et ρ_B la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ (cf. II.2.1,) construite comme en II.2.1.1, alors, pour tout $\rho \in \mathcal{SO}_\phi(E)$, il existe un unique couple $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, tel que $\rho = a\mathrm{Id}_E + b\rho_B$ (cf. II.2.1.vi).)

Supposons que $x \in E$ soit un vecteur propre de ρ associé à une valeur propre λ. On a alors

$$\begin{array}{llcl}
 & (a\mathrm{Id}_E + b\rho_B)(x) & = & \lambda x \\
\Leftrightarrow & b\rho_B(x) & = & (\lambda - a)x \\
\Rightarrow & b = 0 \text{ et } a = \lambda & \text{ou} & \rho_B(x) = \frac{\lambda - a}{b} x \\
a^2 + b^2 = 1 \overset{\Rightarrow}{} & a = 1 \text{ ou } a = -1 & (\text{cf. II.1.5,}) \overset{\text{ou}}{} & \frac{\lambda-a}{b} = 1 \text{ ou } \frac{\lambda-a}{b} = -1 \\
a^2 + b^2 = 1 \overset{\Rightarrow}{} & a = 1 \text{ ou } a = -1 & \text{ou} & ab = 0 \\
\Rightarrow & a = 1 \text{ ou } a = -1 & \text{ou} & a = 0 \text{ ou } b = 0 \,.
\end{array}$$

$a = 1$ ou -1 équivaut à $b = 0$ (puisque $a^2 + b^2 = 1$) et, dans ce cas, le lemme est démontré. Reste le cas $a = 0$ équivalent à $b = 1$ ou -1 c'est-à-dire que λ est une valeur propre pour ρ_B. On aurait alors $\lambda^2 + 1 = 0$ ce qui est impossible pour λ réel.

Théorème II.4.1 *Étant donné un couple* (u, v) *de vecteurs unitaires, il existe un unique élément* $\rho \in \mathcal{SO}_\phi(E)$, *(resp.* $\sigma \in \mathcal{O}_{\phi,-}(E)$, *) tel que* $v = \rho(u)$, *(resp.* $v = \sigma(u)$ *.)*

Preuve : Comme (E, ϕ) est euclidien, $u^\perp$ est un supplémentaire de $\overrightarrow{u}$ et par conséquent de dimension 1. Il existe donc au moins un vecteur unitaire $u' \in u^\perp$.

- Si $\gamma \in \mathcal{O}_\phi(E)$ vérifie $\gamma(u) = v$, nécessairement $\gamma(u') \in v^\perp$ et $||\gamma(u')|| = 1$. Or pour la même raison que précédemment, $v^\perp$ est une droite vectorielle et contient donc seulement deux vecteurs unitaires v'_1 et $v'_2 = -v'_1$. Par conséquent, nécessairement,

$$\gamma(u') = v'_1 \text{ ou } \gamma(u') = v'_2 \,.$$

- On construit donc deux endomorphismes γ_1 et γ_2 de E définis par

$$\begin{array}{rrcl} \gamma_1 : & E & \to & E \\ & u & \mapsto & v \\ & u' & \mapsto & v'_1 \\ \gamma_2 : & E & \to & E \\ & u & \mapsto & v \\ & u' & \mapsto & v'_2 \ . \end{array}$$

En effet, un endomorphisme est bien défini dès que l'image d'une base est fixée et (u, u') est une base de E , qui plus est une base ϕ-orthonormée (cf. I.2.8.)
Par ailleurs (v, v'_1) (resp. (v, v'_2)) étant également une base orthonormée, γ_1 (resp. $\gamma_2,$) est un élément de $\mathcal{O}_\phi(E)$ (cf. II.1.2.c).)
Enfin

$$\begin{array}{rcl} \det(\gamma_1) & \overset{=}{\text{(cf. II.0.10,)}} & \det_{(u,u')}(v, v'_1) \\ & \overset{=}{\text{(cf. II.0.14,)}} & -\det_{(u,u')}(v, v'_2) \\ & = & -\det(\gamma_2) \ . \end{array}$$

Par conséquent, si $\gamma_1 \in \mathcal{SO}_\phi(E)$, $\gamma_2 \in \mathcal{O}_{\phi,-}(E)$ et réciproquement.
On a, par conséquent, prouvé l'<u>existence d'au moins</u> un élément $\rho \in \mathcal{SO}_\phi(E)$ (resp. $\sigma \in \mathcal{O}_{\phi,-}(E)$) tel que

$$\rho(u) = v \text{ (resp. } \sigma(u) = v \text{ .)} \qquad \text{II.4.1}$$

- Supposons qu'il existe deux éléments

$$\rho \text{ et } \rho' \text{ dans } \mathcal{SO}_\phi(E) \text{ (resp. } \sigma \text{ et } \sigma' \text{ dans } \mathcal{O}_{\phi,-}(E) \text{ ,)}$$

satisfaisant la condition II.4.1. Alors

$$\rho^{-1}[\rho'(u)] = u \text{ (resp. } \sigma^{-1}[\sigma'(u)] = u \ .$$

Par conséquent, u est un vecteur propre associé à la valeur propre 1 pour $\rho^{-1}\rho'$ (resp. $\sigma^{-1}\sigma'$) qui appartient à $\mathcal{SO}_\phi(E)$. Par conséquent, d'après le lemme II.4.2 $\rho = \rho'$ (resp. $\sigma = \sigma'$) ce qui permet de conclure à l'<u>unicité</u>.

Proposition II.4.2 *Soit u un vecteur unitaire de E et $\rho \in \mathcal{SO}_\phi(E)$. Pour tout $u' \in E$ tel que (u, u') est une base orthonormée de E (cf. I.2.8,)*

$$\det_{(u,u')}(u, \rho(u)) = \langle \rho(u), u' \rangle .$$

Lemme II.4.3 *Soit $\rho \in \mathcal{SO}_\phi(E)$, $\rho^2 = \mathrm{Id}_E$ si et seulement si*

$$\rho = \mathrm{Id}_E \text{ ou } -\mathrm{Id}_E .$$

Preuve : Soit u un vecteur unitaire ($||u|| = 1$) de E et $\rho \in \mathcal{SO}_\phi(E)$ est tel que $\rho^2 = \mathrm{Id}_E$.

- Si $(u, \rho(u))$ est lié, alors nécessairement

$$\rho(u) = u \text{ ou } \rho(u) = -u$$

car $||\rho(u)|| = ||u||$; ce qui permet de conclure grâce à la proposition II.4.1.

- Si $(u, \rho(u))$ est un système libre, c'est une base car $\dim E = 2$. On a alors

$$\begin{array}{rcl} 1 & = & \det(\rho) \\ & \underset{\text{(cf. II.0.11.i),)}}{=} & \det_{(u,\rho(u))}(\rho(u), \rho^2(u)) \\ & = & \det_{(u,\rho(u))}(\rho(u), u) \\ & = & -1 \end{array}$$

ce qui est absurde. Par conséquent, nécessairement u et $\rho(u)$ sont colinéaires.

Proposition II.4.1 *Pour tout élément $\rho \in \mathcal{SO}_\phi(E) \setminus \{-\mathrm{Id}_E\}$,*

i) il existe un unique $\rho' \in \mathcal{SO}_\phi(E)$ tel que :

$$\rho'^2 = \rho \text{ et } \langle u, \rho'(u) \rangle > 0 ,$$

pour tout u non nul de E ;

ii) les éléments ρ' et

$$\rho' \circ -\mathrm{Id}_E = -\mathrm{Id}_E \circ \rho' = -\rho'$$

sont les seules solutions de l'équation d'inconnue $\gamma \in \mathcal{SO}_\phi(E)$:

$$\gamma^2 = \rho .$$

Preuve :

i) Fixons un élément $\rho \in \mathcal{SO}_\phi(E)\backslash\{-\mathrm{Id}_E\}$. Soit $u \in E$ un vecteur unitaire, *i.e.* $||u|| = 1$ et $v := \rho(u)$. Il existe un unique $\sigma \in \mathcal{O}_{\phi,-}(E)$ (c'est-à-dire une symétrie orthogonale par rapport à une droite vectorielle D (cf. figure ci-dessous)) tel que $\sigma(u) = v$ (cf. II.4.1.)

Posons w un vecteur propre unitaire de σ associé à la valeur propre 1 . Posons ρ' l'unique élément de $\mathcal{SO}_\phi(E)$ tel que $\rho'(u) = w$. On a alors :

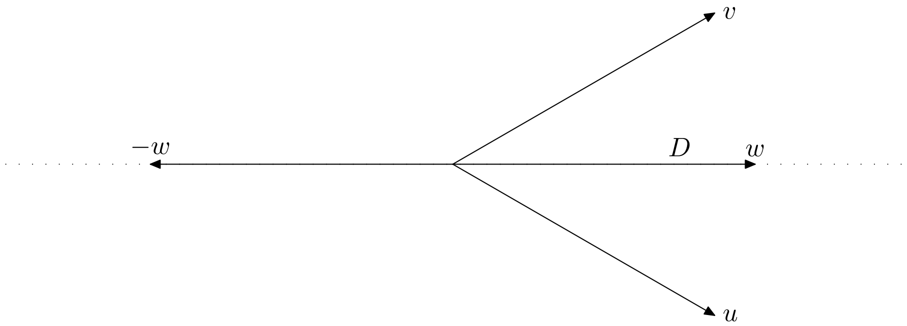
$$\begin{aligned}
\rho'^2(u) &= \rho'(w)\\
&= \rho'(\sigma(w))\\
&\overset{=}{\text{(cf. II.2.1,)}}\ \sigma(\rho'^{-1}(w))\\
&= \sigma(u)\\
&= v\\
&= \rho(u)
\end{aligned}$$

c'est-à-dire que $\rho'^2 = \rho$ (cf. II.4.1.)

i) Soit $\langle u, w\rangle > 0$, et ρ' est l'élément de $\mathcal{SO}_\phi(E)$ cherché ;

ii) soit $\langle u, w\rangle < 0$ et $\rho' \circ -\mathrm{Id}_E$ répond à la question.

iii) Remarquons que $\langle u, w\rangle = 0$ impliquerait $\rho = -\mathrm{Id}_E$ ce qui est exclu par hypothèse.



ii) Supposons que $\rho'' \in \mathcal{SO}_\phi(E)$ soit tel que $\rho''^2 = \rho$. On a alors

$$\begin{aligned}
& & \rho''^2 &= \rho'^2\\
&\Leftrightarrow & \rho''^2(\rho'^{-1})^2 &= \mathrm{Id}_E\\
&\overset{\Leftrightarrow}{\text{(cf. II.2.7,)}} & (\rho''\rho'^{-1})^2 &= \mathrm{Id}_E\\
&\overset{\Rightarrow}{\text{(cf. II.4.3,)}} & (\rho''\rho'^{-1}) &= \mathrm{Id}_e \text{ ou } -\mathrm{Id}_E\ ,
\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure.

Proposition II.4.3 *i) Étant donnée une rotation $\rho \in \mathcal{SO}_\phi(E)$, (cf. II.2.1,) il existe deux symétries orthogonales σ_1 et σ_2 (cf. II.3.7,) telles que $\rho = \sigma_2 \circ \sigma_1$.*

ii) Étant donnés une rotation $\rho \in \mathcal{SO}_\phi(E)$, σ_1, σ_2 des éléments de $\mathcal{O}_{\phi,-}(E)$ comme en (i), pour tout vecteur unitaire fixe (associé à la valeur propre 1) u_1 de σ_1 (resp. u_2 de σ_2,)

$$\rho^2_{u_1,u_2} \;=\; \rho$$

où ρ_{u_1,u_2} est l'unique rotation (cf. II.4.1) telle que $\rho_{u_1,u_2}(u_1) = u_2$.

Preuve :

i Fixons $\rho \in \mathcal{SO}_\phi(E)$. Soit $u \in E$ un vecteur unitaire et $v := \rho(u)$. Posons σ_1 la symétrie orthogonale par rapport à $D_1 := \overrightarrow{u}$. Posons σ_2 l'unique isométrie négative telle que $\sigma_2(u) = v$. Notons D_2 l'espace propre de σ_2 associé à la valeur propre 1 (cf. figure ci-dessous.) On remarque que

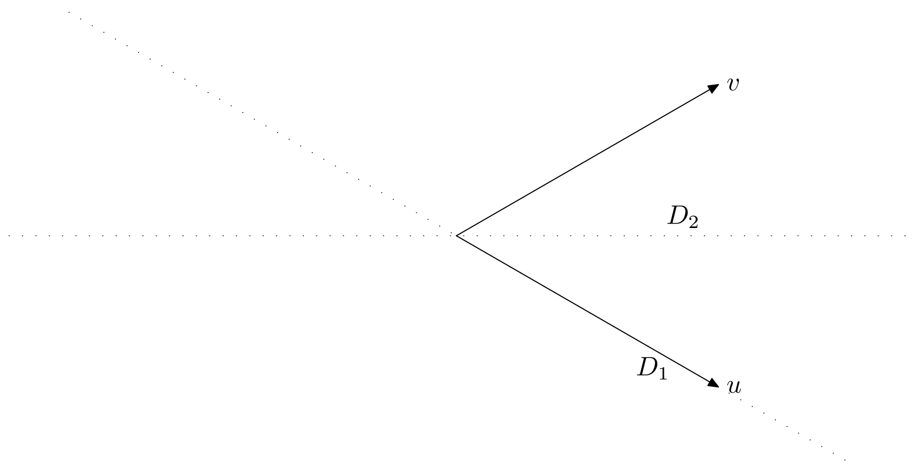
$$\det(\sigma_2 \circ \sigma_1) \;=\; \det(\sigma_2) * \det(\sigma_1) \;=\; 1$$

et par conséquent que $\sigma_2 \circ \sigma_1 \in \mathcal{SO}_\phi(E)$. Par ailleurs, comme u est un vecteur fixe pour σ_1,

$$[\sigma_2 \circ \sigma_1](u) \;=\; \sigma_2(u) \;=\; v \;=\; \rho(u) \,,$$

ce qui prouve, d'après la proposition II.4.1, que

$$\sigma_2 \;\circ\; \sigma_1 \;=\; \rho \,.$$

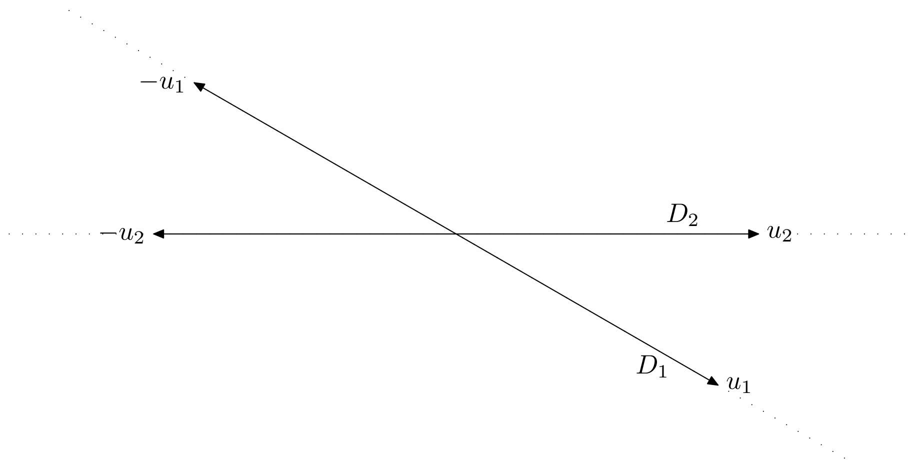


ii Supposons donnés ρ, σ_1, σ_2 comme précédemment et notons u_1 (resp. u_2) un vecteur fixe de σ_1 (resp. σ_2 .) Posons finalement ρ_{u_1,u_2} l'unique rotation telle que $\rho_{u_1,u_2}(u_1) = u_2$.

On a alors

$$\begin{aligned}
\rho^2_{u_1,u_2}(u_1) &= \rho_{u_1,u_2}(u_2) \\
&\underset{u_2 \text{ est fixe sous } \sigma_2}{=} \rho_{u_1,u_2}[\sigma_2(u_2)] \\
&\underset{\text{(cf. II.2.1,)}}{=} \sigma_2[\rho^{-1}_{u_1,u_2}(u_2)] \\
&= \sigma_2(u_1) \\
&\underset{u_1 \text{ est fixe sous } \sigma_1}{=} \sigma_2[\sigma_1(u_1)] \\
&= \rho(u_1)
\end{aligned}$$

ce qui achève la preuve, encore une fois grâce à la proposition II.4.1.

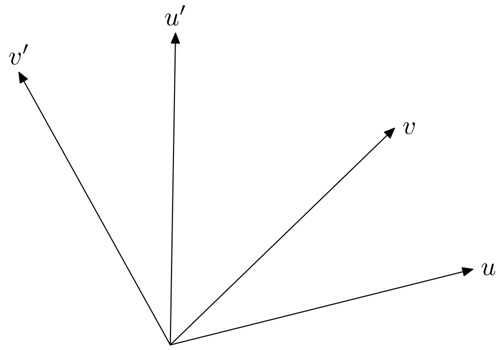


II.5 . $-$Angles dans le plan euclidien

Dans cette section, (E, ϕ) est un espace vectoriel euclidien de dimension 2, (cf. I.2.3) qu'on appellera également *plan vectoriel euclidien*.

On notera $\langle \bullet, \bullet \rangle$ l'accouplement de dualité (cf. I.0.5.1,) ou produit scalaire (cf. I.2.3.iii),) et $|| \bullet ||$ la norme euclidienne (cf. I.2.6.)

Remarque II.5.1 Pour deux éléments (u, v)et (u', v') de $\mathbb{A}$, on a intuitivement l'idée qu'ils définissent le même "angle" si l'on passe de u à v (resp. de u' à v') par une même rotation, mais aussi si les deux couples de vecteurs sont *superposables*, c'est-à-dire qu'une même rotation fait passer de u à u' (resp. de v à v'.) Pour pouvoir donner une définition cohérente et conforme à l'intuition, (cf. II.5.1,) nous allons préalablement montrer que les deux propriétés ci-dessus coïncident.



Proposition II.5.2 *Étant donnés deux éléments (u, v) et (u', v') de $\mathbb{A}$, les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

a) Il existe une rotation ρ (cf. II.2.1) i.e. un élément $\rho \in \mathcal{SO}_\phi(E)$, telle que

$$\begin{array}{rcl} \rho(u) & = & v \\ \rho(u') & = & v' \ . \end{array}$$

b) Il existe une rotation ρ telle que

$$\begin{array}{rcl} \rho(u) & = & u' \\ \rho(v) & = & v' \ . \end{array}$$

Preuve :

(a) $\Rightarrow$ (b) Supposons donnée ρ vérifiant l'assertion (a). Il existe par ailleurs une unique rotation $\gamma \in \mathcal{SO}_\phi(E)$ telle que $\gamma(u) = u'$ d'après la proposition II.4.1. On a alors

$$\begin{array}{rcl} \gamma(v) & = & \gamma[\rho(u)] \\ & \underset{\text{(cf. II.2.7,)}}{=} & \rho[\gamma(u)] \\ & = & \rho(u') \\ & = & v' , \end{array}$$

ce qui implique (b).

(b) $\Rightarrow$ (a) Supposons donnée une rotation ρ satisfaisant (b). Il existe, par ailleurs, une unique rotation $\gamma \in \mathcal{SO}_\phi(E)$ telle que $\gamma(u) = v$. On a alors

$$\begin{array}{rcl} \gamma(u') & = & \gamma[\rho(u)] \\ & = & \rho[\gamma(u)] \\ & = & \rho(v) \\ & = & v' , \end{array}$$

ce qui implique (a).

Remarque II.5.1 On utilise fortement, dans la démonstration précédente, le fait que

$\mathcal{SO}_\phi(E)$ est un groupe abélien.

Proposition II.5.2 *On définit sur $\mathbb{A}$ la relation $\sim$ par*

$$(u, v) \sim (u', v')$$

s'ils vérifient l'une des assertions équivalentes de la proposition II.5.2.

La relation $\sim$ définie ci-dessus est une relation d'équivalence.

Preuve : Cette preuve est un exercice.

Définition II.5.1 i) Pour tout couple $(u, v) \in \mathbb{A}$ on appellera *angle orienté des vecteurs unitaires* u et v la classe d'équivalence du couple (u, v) selon la relation $\sim$ définie en II.5.2 que l'on notera $\angle uv$. On notera $\hat{\mathbb{A}}$ l'ensemble des angles de vecteurs unitaires *i.e.* l'ensemble $\mathbb{A}/\sim$ des classes d'équivalence selon la relation $\sim$.

ii) Pour deux vecteurs quelconques non nuls x et y de E on appellera encore *angle orienté des vecteurs* x et y et on notera encore $\angle xy$ l'angle $\angle \frac{1}{||x||}x \frac{1}{||y||}y$.

Remarque II.5.2 Il est immédiat de remarquer que pour deux représentants (x, y) et (x', y') d'un même angle $\angle uv \in \hat{\mathbb{A}}$,

$$\langle x, y\rangle \;=\; \langle x', y'\rangle \;,$$

ce qui découle du fait qu'une isométrie conserve le produit scalaire.

Proposition II.5.3 *Étant donnés deux éléments (u, v) et (u', v') de $\mathbb{A}$, les angles $\angle uv$ et $\angle u'v'$ sont égaux si et seulement si les angles $\angle uu'$ et $\angle vv'$ sont égaux.*

Preuve : Ceci est une conséquence directe de la définition et de la proposition II.5.2.

Proposition II.5.1 *i) L'application qui à tout couple $(u, v) \in \mathbb{A}$ associe l'unique rotation $\rho_{u,v}$ telle que $\rho_{u,v}(u) = v$ (cf. II.4.1,) définit une application $\omega : \hat{\mathbb{A}} \to \mathcal{SO}_\phi(E)$ par passage au quotient.*

ii) L'application ω définie ci-dessus est bijective.

Preuve :

- i Ce point est tautologique si l'on considère que la relation $\sim$ est définie grâce à II.5.2.a).
- ii L'injectivité de ω est également tautologique. Finalement, pour tout $\rho \in \mathcal{SO}_\phi(E)$, il est clair qu'étant donné un vecteur unitaire $u \in E$, $(u, \rho(u))$ est antécédent pour ρ par ω.

Proposition II.5.1 *i) La loi de composition interne + définie sur $\hat{\mathbb{A}}$ par*

$$\angle uv \;+\; \angle u'v' \;:=\; \omega^{-1}[\omega(\angle uv) \circ \omega(\angle u'v')] \qquad 1$$

munit $\hat{\mathbb{A}}$ d'une structure de groupe abélien.

ii) L'application ω est alors un isomorphisme de groupes de $(\hat{\mathbb{A}}, +)$ sur $(\mathcal{SO}_\phi(E), \circ)$.

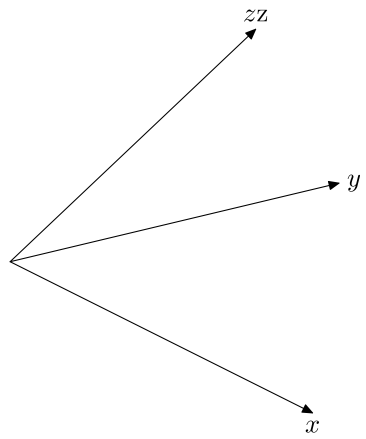
Preuve :

i) Résulte simplement du fait que $\mathcal{SO}_\phi(E)$ est un groupe abélien (cf. II.2.7.)

ii) Est tautologique.

Théorème II.5.3 (Relation de Chasles sur les angles) *Étant donnés trois vecteurs non nuls* x, y, z *de* E,

$$\angle xy \ + \ \angle yz \ = \ \angle xz \ .$$



Preuve : On montrera facilement qu'on peut se ramener au cas où les vecteurs x, y, z sont unitaires (cf. II.4.1.) Notons alors

$$\rho_{x,y} \ := \ \omega(\angle xy \ (\text{resp.}\rho_{y,z} \ := \ \omega(\angle yz) \ )$$

l'unique rotation (cf. II.4.1) telle que

$$\rho_{x,y}(x) \ = \ y \ (\text{resp.}\rho_{y,z}(y) \ = \ z \ .)$$

Il vient alors

$$\begin{array}{lrcl}
 & \rho_{y,z}[\rho_{x,y}(x)] & = & z \\
(\text{cf. } \overset{\Rightarrow}{\text{II}}.4.1,) & \rho_{y,z} \circ \rho_{x,y} & = & \rho_{x,z} \\
(\text{cf. II}.\overset{\Rightarrow}{5}.1.\text{ii}),) & \omega^{-1}(\rho_{y,z} \circ \rho_{x,y}) & = & \omega^{-1}(\rho_{x,z}) \\
\Rightarrow & \omega^{-1}[\omega(\angle yz) \circ \omega(\angle xy)] & = & \angle xz \\
(\text{cf. II}.\overset{\Rightarrow}{5}.1.\text{i}).1,) & \angle yz + \angle xy & = & \angle xz \ .
\end{array}$$

Définition II.5.1 i) Pour tout vecteur unitaire $u \ \in \ E$, $\angle uu \ = \ \omega^{-1}(\mathrm{Id}_E)$ est appelé *angle nul* et est, de manière évidente, l'élément neutre du groupe $(\hat{\mathbb{A}}, +)$.

ii) Pour tout vecteur unitaire $u \ \in \ E$, l'angle $\angle u{-}u \ = \ \omega^{-1}(-\mathrm{Id}_E)$ est appelé *angle plat* et sera noté $\hat{\pi}$.

iii) On dira qu'un angle $\angle uv$ est *droit* si $\langle u, v\rangle \ = \ 0$. La cohérence de cette définition est assurée par la remarque II.5.2.

iv) On dira que l'angle $\angle uv$ est *aigu* (resp. *obtus*) si $\langle u,v\rangle > 0$ (resp. $\langle u,v\rangle < 0$.) Comme précédemment, la cohérence de cette définition est assurée par la remarque II.5.2.

Remarque II.5.2 i) Pour tout couple $(u,v)\in\mathbb{A}$ de vecteurs unitaires de E, il est clair que

$$\angle vu \;=\; -\angle uv$$

est l'opposé de l'angle $\angle uv$ dans le groupe $(\hat{\mathbb{A}},+)$.

ii) Une conséquence immédiate de la proposition II.4.1.ii) est que pour tout élément $\hat{a}\;\in\;\hat{\mathbb{A}}$, l'équation d'inconnue $\hat{x}\;\in\;\hat{\mathbb{A}}$

$$2\hat{x} \;=\; \hat{a}$$

admet deux solutions et deux seulement $\hat{x'}$ et $\hat{x''}$ vérifiant

$$\hat{x'} \;=\; \hat{x''} \;+\; \hat{\pi}\;.$$

Proposition II.5.3 *i) Il n'y a que deux angles droits dans $\hat{\mathbb{A}}$, opposés l'un de l'autre.*

ii) Ils correspondent respectivement aux classes de bases

$$\phi - \textit{orthonormées dans } \mathbb{B} \textit{ (cf. II.1.6.2 .)}$$

iii) Si $\angle uv$ est droit alors

$$2\angle uv \;=\; \hat{\pi}\;.$$

Preuve :

i) Étant donné un vecteur unitaire $u\;\in\;E$, $u^{\perp}$ est une droite vectorielle et contient donc deux vecteurs unitaires v_+ et $v_-=-v_+$.

Si donc $(u,v)\in\mathbb{A}$ représente un angle droit, nécessairement $v=v_+$ ou $v=v_-$.

Soit ρ l'unique rotation (cf. II.4.1) telle que $\rho(v_+)=u$. Alors

$$\langle u,\rho(u)\rangle \;=\; \langle\rho(u),\rho(v_+)\rangle \;\; \overset{=}{\rho\in\mathcal{O}_\phi(E)} \;\; \langle u,v_+\rangle \;=\; 0$$

c'est-à-dire que $\rho(u)\in u^{\perp}$. On ne peut avoir $\rho(u)=v_+$ car alors on aurait

$*$) $\rho^2(v_+) \;=\; v_+$ c'est-à-dire, d'après le lemme II.4.2 $\rho^2 \;=\; \mathrm{Id}_E$ c'est-à-dire, d'après le lemme II.4.3, $\rho=\mathrm{Id}_E$ ou $\rho=-\mathrm{Id}_E$; ce qui impliquerait que u et v_+ sont colinéaires.

On a donc $\rho(u) = v_-$ c'est-à-dire

$$\begin{array}{rcl} \angle uv_- & = & \angle v_+ u \\ & \underset{\text{(cf. II.5.2.i),)}}{=} & -\angle uv_+ \,. \end{array}$$

Si $\angle u'v'$ est un angle droit, il existe une unique rotation ρ' telle que $\rho'(u') = u$ et

$$\langle u, \rho(v')\rangle \;=\; \langle \rho(u'), \rho(v')\rangle \underset{\rho \in \mathcal{O}_\phi(E)}{=} \langle u', v'\rangle \;=\; 0$$

c'est-à-dire que $\rho(v') \in u^\perp$. Il s'ensuit que $\rho(v') = v_+$ ou $\rho(v') = v_-$ c'est-à-dire que

$$\angle u'v' \;=\; \angle uv_+ \text{ ou } \angle u'v' \;=\; \angle uv_- \,.$$

ii) Le raisonnement précédent montre également que les couples $(x, y) \in \mathbb{B}$ forment tous des angles droits qui sont soit dans la classe de $\angle uv_+$ soit dans la classe de $\angle uv_-$.

iii) Supposons que $\angle uv$ soit un angle droit et notons $\rho = \omega(\angle uv)$. Il s'ensuit, d'après la proposition II.5.1.ii) que $\omega(2\angle uv) = \rho^2$. Or

$$\begin{array}{rcl} \langle \rho^2(u), v\rangle & = & \langle \rho^2(u), \rho(u)\rangle \\ & \underset{\rho \in \mathcal{O}_\phi(E)}{=} & \langle \rho(u), u\rangle \\ & = & \langle v, u\rangle \\ & = & 0 \,, \end{array}$$

c'est-à-dire que $\rho^2(u) \in v^\perp$ ce qui implique que $\rho^2(u) = u$ ou $\rho^2(u) = -u$. Pour des raisons analogues à celles données en i).$*$), on a nécessairement $\rho^2(u) = -u$ *i.e.*

$$\begin{array}{rrcl} & \omega(2\angle uv) & = & -\mathrm{Id}_E \\ \Leftrightarrow & \angle uv & = & \omega^{-1}(-\mathrm{Id}_E) \;=\; \hat{\pi} \,. \end{array}$$

Théorème II.5.4 *Deux vecteurs non nuls x et y sont colinéaires, (resp. orthogonaux) si et seulement si l'angle $\angle xy$ est plat ou nul (resp. droit .)*

Preuve : Il n'y a rien à démontrer concernant les angles droits puisqu'il s'agit de la définition même et que ce résultat n'a été mentionné ici que pour fournir synthétiquement un critère de colinéarité et d'orthogonalité.

Les vecteurs x et y sont colinéaires si et seulement si les vecteurs unitaires

$$u \;:=\; \frac{1}{||x||}x \text{ et } v \;:=\; \frac{1}{||y||}y$$

le sont. Or u et v unitaires sont colinéaires si et seulement si $u = v$ ou $u = -v$ *i.e.*

$$\angle uv \;=\; \angle uu \;=\; \hat{0} \,,$$

ou

$$\angle uv \;=\; \angle u{-}u \;=\; \hat{\pi} \,.$$

II.6 . −Angles et isométries

Dans cette section, (E, ϕ) est un espace vectoriel euclidien de dimension 2, (cf. I.2.3.)

On notera $\langle \bullet, \bullet \rangle$ l'accouplement de dualité (cf. I.0.5.1,) ou produit scalaire (cf. I.2.3.iii),) et $|| \bullet ||$ la norme euclidienne (cf. I.2.6.)

Lemme II.6.1 *Pour tout couple $(u, v) \in \mathbb{A}$ de vecteurs unitaires de E (cf. II.4.1,) et toute isométrie $\gamma \in \mathcal{O}_\phi(E)$,*

$$\angle\gamma(u)\gamma(v) \;=\; \omega^{-1}[\gamma \circ \omega(\angle uv) \circ \gamma^{-1}] \,,$$

(où ω est l'isomorphisme défini en II.5.1 .)

Preuve : Notons ρ l'unique rotation telle que $\rho(u) = v$ (cf. II.4.1) c'est-à-dire que $\rho = \omega(\angle uv)$; notons ρ' l'unique rotation telle que $\rho'[\gamma(u)] = \gamma(v)$ c'est-à-dire que $\rho' = \omega[\angle\gamma(u)\gamma(v)]$. Il vient alors :

$$\begin{array}{lrcl}
 & [\gamma \circ \rho \circ \gamma^{-1}][\gamma(u)] & = & \gamma(v) \\
\overset{\Rightarrow}{\text{(cf. II.4.1,)}} & \gamma \circ \rho \circ \gamma^{-1} & = & \rho' \\
\overset{\Rightarrow}{\text{(cf. II.5.1.ii),)}} & \omega^{-1}[\gamma \circ \rho \circ \gamma^{-1}] & = & \omega^{-1}(\rho') \\
\Rightarrow & \omega^{-1}[\gamma \circ \omega(\angle uv) \circ \gamma^{-1}] & = & \angle\gamma(u)\gamma(v) \,.
\end{array}$$

Corollaire II.6.1 *i) On définit une application $\gamma \mapsto \hat{\gamma}$ de $\mathcal{O}_\phi(E)$ dans l'ensemble des applications de $\hat{\mathbb{A}}$ sur lui-même par*

$$\hat{\gamma}(\angle uv) \;:=\; \angle\gamma(u)\gamma(v) \;=\; \omega^{-1}[\gamma \circ \omega(\angle uv) \circ \gamma^{-1} \,.$$

ii) L'application $\gamma \mapsto \hat{\gamma}$ est en fait à valeurs dans le groupe $\mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{A}})$ des automorphismes du groupe $(\hat{\mathbb{A}}, +)$.

iii) L'application

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{O}_\phi(E) & \to & \hat{\mathbb{A}} \\
\gamma & \mapsto & \hat{\gamma}
\end{array}$$

est un morphisme de groupes dont l'image est $\{-\mathrm{Id}_{\hat{\mathbb{A}}}, \mathrm{Id}_{\hat{\mathbb{A}}}\}$ et le noyau $\mathcal{SO}_\phi(E)$.

Preuve :

i est une conséquence immédiate du lemme II.6.1.

ii Pour tout $\gamma \in \mathcal{O}_\phi(E)$, et tout couple $(\angle uv, \angle u'v') \in \hat{\mathbb{A}} \times \hat{\mathbb{A}}$,

$$\begin{array}{rcl} \hat{\gamma}(\angle uv + \angle u'v') & = & \omega^{-1}[\gamma \circ \omega(\angle uv + \angle u'v') \circ \gamma^{-1}] \\ & \underset{\text{(cf. II.5.1.ii),)}}{=} & \omega^{-1}[\gamma \circ \omega(\angle uv) \circ \omega(\angle u'v') \circ \gamma^{-1}] \\ & = & \omega^{-1}[\gamma \circ \omega(\angle uv) \circ \gamma^{-1} \circ \gamma \circ \omega(\angle u'v') \circ \gamma^{-1}] \\ & \underset{\text{(cf. II.5.1.ii),)}}{=} & \omega^{-1}[\gamma \circ \omega(\angle uv) \circ \gamma^{-1}] + \omega^{-1}[\gamma \circ \omega(\angle u'v')\gamma^{-1}] \\ & = & \hat{\gamma}(\angle uv) + \hat{\gamma}(\angle u'v') \end{array}$$

ce qui prouve que $\hat{\gamma}$ est un endomorphisme de $(\hat{\mathbb{A}}, +)$. Il est très facile de vérifier que $\widehat{\gamma^{-1}}$ est l'endomorphisme inverse de $\hat{\gamma}$. Celui-ci étant, par conséquent un automorphisme.

iii - Pour tout couple $(\gamma, \delta) \in \mathcal{O}_\phi(E) \times \mathcal{O}_\phi(E)$, et tout élément $\angle uv \in \hat{\mathbb{A}}$,

$$\begin{array}{rcl} \widehat{\gamma \circ \delta}(\angle uv) & = & \omega^{-1}[\gamma \circ \delta \circ \omega(\angle uv) \circ \delta^{-1} \circ \gamma^{-1}] \\ & = & \omega^{-1}\left[\gamma \circ \omega[\omega^{-1}(\delta \circ \omega(\angle uv) \circ \delta^{-1})] \circ \gamma^{-1}\right] \\ & = & \omega^{-1}\left[\gamma \circ \omega[\hat{\delta}(\angle uv)] \circ \gamma^{-1}\right] \\ & = & \hat{\gamma}[\hat{\delta}(\angle uv)] \ , \end{array}$$

ce qui prouve que $\gamma \mapsto \hat{\gamma}$ est un morphisme.

- Pour toute rotation (cf. II.2.1) $\rho \in \mathcal{SO}_\phi(E)$, et tout angle $\angle uv \in \hat{\mathbb{A}}$,

$$\begin{array}{rcl} \hat{\rho}(\angle uv) & = & \omega^{-1}[\rho \circ \omega(\angle uv) \circ \rho^{-1}] \\ & \underset{\text{(cf. II.2.7,)}}{=} & \omega^{-1}[\rho \circ \rho^{-1} \circ \omega(\angle uv)] \\ & = & \angle uv \ , \end{array}$$

c'est-à-dire que $\hat{\rho} = \mathrm{Id}_{\hat{\mathbb{A}}}$.

Pour toute symétrie orthogonale (cf. II.3.7) $\sigma \in \mathcal{O}_{\phi,-}(E)$, et tout angle $\angle uv \in \hat{\mathbb{A}}$,

$$\begin{array}{rcl} \hat{\sigma}(\angle uv) & = & \omega^{-1}[\sigma \circ \omega(\angle uv) \circ \sigma^{-1}] \\ & \underset{\text{(cf. II.2.1,)}}{=} & \omega^{-1}\left[[\omega(\angle uv)]^{-1}\right] \\ & \underset{\text{(cf. II.5.1.ii),)}}{=} & \omega^{-1}[\omega(-\angle uv)] \\ & = & -\angle uv \ , \end{array}$$

c'est-à-dire que $\hat{\sigma} = -\mathrm{Id}_{\hat{\mathbb{A}}}$.

Ceci achève la preuve de (iii).

Théorème II.6.1 *Dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien (E, ϕ) de dimension 2, une isométrie positive (cf. II.1.4) laisse un angle invariant ; une isométrie négative change un angle en son opposé.*

On peut exprimer ce résultat par la formule : pour tout élément $\gamma \in \mathcal{O}_\phi(E)$, et tout angle $\angle uv \in \hat{\mathbb{A}}$,

$$\hat{\gamma}(\angle uv) = \det(\gamma) \angle uv .$$

Preuve : Ce théorème est une reformulation de II.6.1.iii).

II.7 . −Mesures d'angles

Dans toute cette section, (E, ϕ, B) est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien orienté (cf. II.1.8.ii)) de dimension 2. Pour tout vecteur $x \in E$, $||x||$ désignera la norme euclidienne de x (cf. I.2.6.)

On notera $c_B : \mathcal{SO}_\phi(E) \to U$ l'isomorphisme de groupes défini en II.2.1 (où U est le groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1.)

Enfin on notera $\omega : \hat{\mathbb{A}} \to \mathcal{SO}_\phi(E)$, l'isomorphisme défini en II.5.1.

Définition II.7.1 Étant donné un élément $\angle uv \in \hat{\mathbb{A}}$, on appelle *mesure de l'angle* $\angle uv$ et l'on note $\underline{\widehat{(u,v)}}$ la classe de nombres réels modulo 2π $\arg[c_B(\omega(\angle uv))]$.

On appelle *mesure principale de l'angle* $\angle uv$ le représentant de $\arg[c_B(\omega(\angle uv))]$ dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$.

Remarque II.7.2 Dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien <u>orienté</u> (E, ϕ, B) de dimension 2, on a donc un isomorphisme de groupes du groupe des angles $(\hat{\mathbb{A}}, +)$ sur le groupe des mesures $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, +)$ qui fait qu'on confondra souvent la notation et qu'on notera $\angle uv$ en lieu et place de $\underline{\widehat{(u,v)}}$.

Théorème II.7.3 (Propriétés des mesures d'angles) *i) La mesure de l'angle nul*

$$\hat{0} \text{ est } 0[2\pi] \text{ (cf. II.5.1.i) ,)}$$

ii) La mesure de l'angle plat (cf. II.5.1.ii)) $\hat{\pi}$ *est* $\pi[2\pi]$.

iii) La mesure d'un angle droit (cf. II.5.1.iii)) est $\frac{\pi}{2}[\pi]$.

iv) Si $\theta := \underline{\widehat{(u,v)}}$ *est la mesure principale d'un angle* $\angle uv$, *la mesure d'un angle* $\angle zt$ *vérifiant* $2\angle zt = \angle uv$ *est* $\frac{\theta}{2}[\pi]$.

v) Deux vecteurs non nuls x *et* y *sont colinéaires (resp. orthogonaux) si et seulement si la mesure* $\underline{\widehat{(x,y)}}$ *de l'angle* $\angle xy$ *est* $0[\pi]$ *(resp.* $\frac{\pi}{2}[\pi]$ *.)*

Preuve :

i Est une conséquence immédiate du fait que la mesure d'un angle est un morphisme de groupes.

ii La mesure de $\hat{\pi}$ est
$$\arg[c_B(-\mathrm{Id}_E)] \;=\; \arg(-1) \;=\; \pi \;.$$

iii D'après la proposition II.5.3.ii), $\angle uv$ est un angle droit si et seulement si (u, v) est une base orthonormée directe ou (u, v) est une base orthonormée rétrograde, c'est-à-dire d'après le corollaire II.2.6.vi) $\omega(\angle uv)$ est ρ_B (cf. II.2.1.1) ou ρ_B^{-1} ce qui implique que
$$c_B[\omega(\angle uv)] \;=\; i \text{ ou } -i \;.$$

iv Est une conséquence immédiate de la proposition II.4.1 et des points précédents.

v Il suffit de traduire en termes de mesures le critère donné dans le théorème II.5.4.

II.8 . $-$Angles de droites et bissectrices

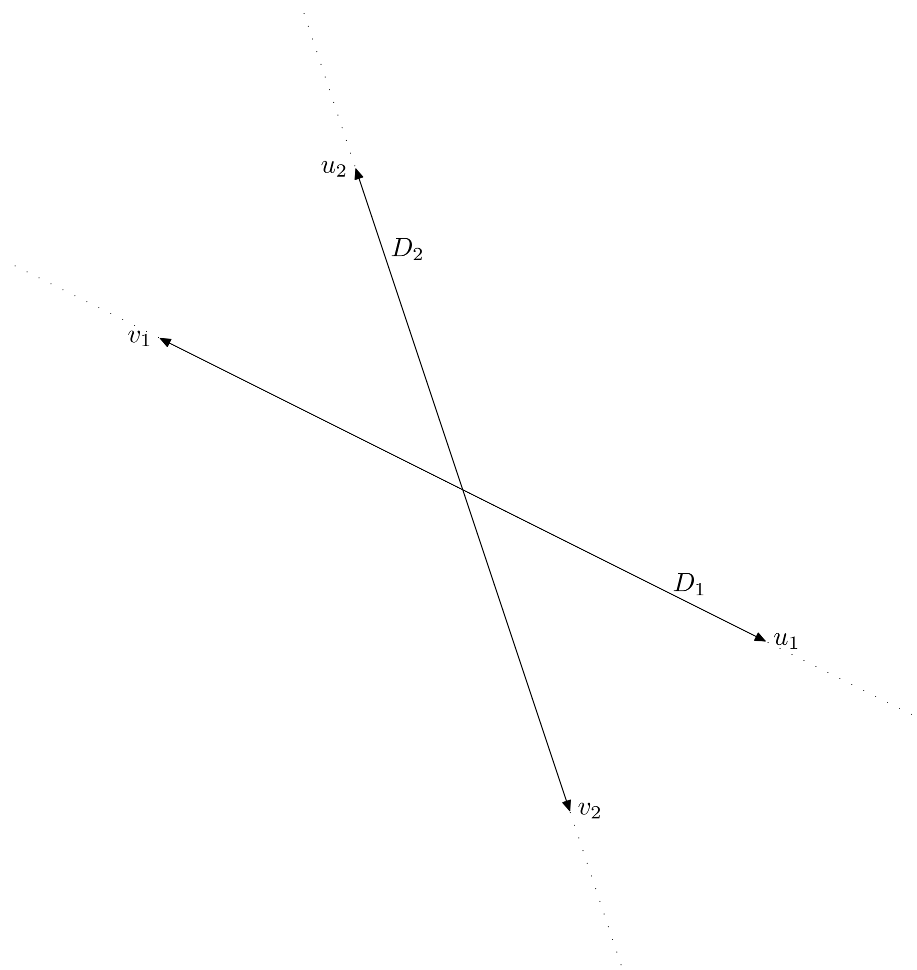
Dans toute cette section (E, ϕ) **est un plan euclidien c'est-à-dire un** $\mathbb{R}$**-espace vectoriel euclidien (cf. I.2.3.ii)) de dimension** 2. **On rappelle que** $(\hat{\mathbb{A}}, +)$ **est le groupe des angles de vecteurs unitaires de** E **(cf. II.5.1) et qu'il est canoniquement muni d'un isomorphisme de groupes** $\omega : \hat{\mathbb{A}} \cong \mathcal{SO}_\phi(E)$ **(cf. II.5.1.)**

On adoptera parfois dans cette section une notation condensée. Pour deux vecteurs unitaires u **et** v **de** E, $\omega(\angle uv)$ **est une rotation** ***i.e.*** **un élément de** $\mathcal{SO}_\phi(E)$ **que l'on peut, par conséquent, appliquer à n'importe quel vecteur** $x \in E$. **On notera alors simplement**

$$\angle uv(x) \ := \ [\omega(\angle uv)](x) \ . \qquad \textbf{II.8.1}$$

Proposition II.8.2 *Étant données deux droites* D_1 *et* D_2 *(c'est-à-dire deux sous-espaces vectoriels de dimension* 1 *de* E, *) pour tout couple* (u_1, v_1) *(resp.* (u_2, v_2) *,) de vecteurs directeurs unitaires de* D_1 *(resp.* D_2*,)*

$$\angle u_1 u_2 - \angle v_1 v_2 \ = \ \hat{0} \text{ ou } \hat{\pi} \ .$$



Preuve : Plusieurs démonstrations de ce fait peuvent être proposées, l'une d'entre elles utilisant les propriétés de la décomposition d'une rotation (cf. II.2.1) en un produit de deux symétries orthogonales (cf. II.3.7) dans la proposition II.4.3.

En effet, si σ_1 (resp. σ_2) est la symétrie orthogonale par rapport à D_1 (resp. $D_2,$) *i.e.* l'unique élément de $\mathcal{O}_{\phi,-}(E)$ tel que u_1 (resp. u_2) est fixe par σ_1 (resp. $\sigma_2,$) et si l'on note $\rho \;:=\; \sigma_2 \circ \sigma_1$, il vient, d'après la proposition II.4.3.ii),

$$\begin{array}{lrcl}
 & \rho = \omega(\angle u_1 u_2)^2 & = & \omega(\angle v_1 v_2)^2 \\
\overset{\Rightarrow}{\text{(cf. II.5.1.ii),)}} & \omega(2\angle u_1 u_2 - 2\angle v_1 v_2) & = & \mathrm{Id}_E \\
\overset{\Rightarrow}{\text{(cf. II.2.7,)}} & \omega[2(\angle u_1 u_2 - \angle v_1 v_2)] & = & \mathrm{Id}_E \\
\overset{\Rightarrow}{\text{(cf. II.5.1.ii),)}} & \omega(\angle u_1 u_2 - \angle v_1 v_2)^2 & = & \mathrm{Id}_E \\
\overset{\Rightarrow}{\text{(cf. II.4.3,)}} & \omega(\angle u_1 u_2 - \angle v_1 v_2) & = & \mathrm{Id}_E \text{ ou } -\mathrm{Id}_E \\
\overset{\Rightarrow}{\text{(cf. II.5.1,)}} & \angle u_1 u_2 - \angle v_1 v_2 & = & \hat{0} \text{ ou } \hat{\pi}\ .
\end{array}$$

Remarque II.8.1 On aurait envie d'appeler "angle entre les droites D_1 et D_2" l'un des deux angles orientés de vecteurs unitaires (cf. II.5.1) $\angle u_1u_2$ ou $\angle v_1v_2$ ou plutôt la classe définie par l'un de ces deux angles dans une relation d'équivalence "bien choisie." Pour donner à cette définition un minimum de cohérence il est raisonnable de penser que deux couples de droites "superposables" (cf. II.5.1) définissent le même "angle de droites". C'est l'objet de la proposition suivante :

Proposition II.8.2 *Étant donnés deux couples (D_1, D_2) et (D'_1, D'_2) de droites vectorielles de E, les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) Pour tout quadruplet

$$(u_1, u_2, u'_1, u'_2) \in D_1 \times D_2 \times D'_1 \times D'_2 ,$$

de vecteurs unitaires,

$$\angle u_1u_2 - \angle u'_1u'_2 = \hat{0} \text{ ou } \hat{\pi} .$$

b) Il existe une rotation $\rho \in \mathcal{SO}_\phi(E)$ (cf. II.2.1) telle que

$$\rho(D_1) = D'_1 \text{ et } \rho(D_2) = D'_2 .$$

c) Il existe une rotation $\rho \in \mathcal{SO}_\phi(E)$ telle que

$$\rho(D_1) = D_2 \text{ et } \rho(D'_1) = D'_2 .$$

Preuve :

$*$) Remarquons tout d'abord que pour tout $\gamma \in \mathcal{O}_\phi(E)$, et tout couple (D, D') de droites vectorielles de E, il suffit, pour montrer que $\gamma(D) = D'$ de montrer que pour u un vecteur non nul de D, $\gamma(u) \in D'$, puisque γ est un isomorphisme.

i) Fixons un quadruplet (u_1, u_2, u'_1, u'_2) comme dans II.8.2.a) et notons ρ l'unique rotation telle que $\rho(u_1) = u'_1$. D'après $*$), il est clair que $\rho(D_1) = D'_1$. Par ailleurs

$$\begin{aligned}
\rho(u_2) &= \rho[\angle u_1u_2(u_1)] \\
&\underset{\text{(cf. II.2.7,)}}{=} \angle u_1u_2[\rho(u_1)] \\
&= \angle u_1u_2(u'_1) \\
&\underset{\text{(a)}}{=} \angle u'_1u'_2(u'_1) \text{ ou } -\angle u'_1u'_2(u'_1) \\
&= u'_2 \text{ ou } -u'_2 \\
&\in D'_2
\end{aligned}$$

ce qui prouve, grâce à $*$) que $\rho(D_2) = D'_2$.

ii) Supposons donnée une rotation ρ satisfaisant (b). Soit u_1 (resp. u_2,) un vecteur unitaire de D_1 (resp. D_2 .) L'image $u_1' := \rho(u_1)$ de u_1 par ρ est, d'après (b), un vecteur unitaire de D_1'. Par ailleurs,

$$\begin{array}{rcl} \angle u_1u_2(u_1') & = & \angle u_1u_2[\rho(u_1)] \\ & \underset{\text{(cf. II.2.7,)}}{=} & \rho[\angle u_1u_2(u_1)] \\ & = & \rho(u_2) \\ & \underset{\text{(b)}}{\in} & D_2' , \end{array}$$

ce qui prouve que $\angle u_1u_2(D_1') = D_2'$. Par conséquent, $\angle u_1u_2$ est une rotation satisfaisant (c).

iii) Supposons donnée ρ vérifiant (c). Pour tout quadruplet de vecteurs unitaires

$$(u_1, u_2, u_1', u_2') \in D_1 \times D_2 \times D_1' \times D_2' ,$$

$$\rho(u_1) = u_2 \text{ ou } -u_2 \text{ et } \rho(u_1') = u_2' \text{ ou } -u_2' ,$$

ce qui prouve (a).

Corollaire II.8.4 *Notons $\mathbb{D}$ l'ensemble des couples de droites de E.*

i) On définit une relation δ sur $\mathbb{D}$ par $(D_1, D_2)\ \delta\ (D_1', D_2')$ s'il existe une rotation

$$\rho \in \mathcal{SO}_\phi(E) \text{ telle que } \rho(D_1) = D_1' \text{ et } \rho(D_2) = D_2' \qquad 1$$

ou s'il existe une rotation

$$\gamma \in \mathcal{SO}_\phi(E) \text{ telle que } \gamma(D_1) = D_2 \text{ et } \gamma(D_1') = D_2' . \qquad 2$$

La relation δ est une relation d'équivalence ; on note $\hat{\mathbb{D}}$ le quotient $\mathbb{D}/\delta$ et pour tout couple $(D_1, D_2) \in \mathbb{D}$ $\angle D_1D_2$ sa classe modulo δ.

ii) Sur le groupe des angles $\hat{\mathbb{A}}$ (cf. II.5.1,) on définit une relation † par

$$\angle uv \dagger \angle u'v' \text{ si } \angle uv - \angle u'v' = \hat{0} \text{ ou } \hat{\pi} . \qquad 1$$

La relation † est une relation d'équivalence compatible à la loi $+$ sur $\hat{\mathbb{A}}$ puisque c'est en fait la relation d'équivalence définie par le sous-groupe

$$\{\hat{0}, \hat{\pi}\} \cong \mathbb{Z}/2 \subset \hat{\mathbb{A}} .$$

iii) L'application qui à tout couple $(D_1, D_2) \in \mathbb{D}$ *associe la classe de* $\angle u_1 u_2$ *modulo* $\dagger$ *pour* $u_1 \in D_1$ *(resp.* $u_2 \in D_2$*) un vecteur unitaire, définit une bijection*

$$\alpha \ : \ \hat{\mathbb{D}} \ = \ \mathbb{D}/\delta \ \cong \ \hat{\mathbb{A}}/\dagger \ \cong \ \hat{\mathbb{A}}/\{\hat{0}, \hat{\pi}\} \ .$$

La bijection α *munit* $\hat{\mathbb{D}}$ *d'une structure de groupe par le procédé :*

$$\angle D_1 D_2 \ +_{\hat{\mathbb{D}}} \ \angle D_1' D_2' \ := \ \alpha^{-1}[\alpha(\angle D_1 D_2) \ +_{\hat{\mathbb{A}}/\dagger} \ \alpha(\angle D_1' D_2')] \qquad 1$$

qui fait de α *un isomorphisme de groupes.*

iv) L'isomorphisme ω *(cf. II.5.1) définit un isomorphisme de groupes encore noté* ω *:*

$$\begin{array}{ccc} (\hat{\mathbb{A}}, +) & \stackrel{\omega}{\cong} & (\mathcal{SO}_\phi(E), \circ) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\hat{\mathbb{A}}/\dagger, +) & \stackrel{\omega}{\cong} & (\mathcal{SO}_\phi(E)/\{-\mathrm{Id}_E, \mathrm{Id}_E\}, \circ) \ ; \end{array} \qquad 1$$

La composée $\alpha \circ \omega$ *donne donc un isomorphisme de groupes*

$$(\hat{\mathbb{D}}, +) \ \cong \ (\mathcal{SO}_\phi(E)/\{-\mathrm{Id}_E, \mathrm{Id}_E\}, \circ) \ . \qquad 2$$

Preuve :

i) Le fait que les deux définitions, a priori différentes, de δ coïncident résulte de l'équivalence entre II.8.2.b) et II.8.2.c) ce qui fait que δ est bien définie. Le fait que δ est une relation d'équivalence est juste une conséquence du fait que $\mathcal{SO}_\phi(E)$ est un groupe. Le fait qu'il soit abélien n'est plus utilisé ici et n'a servi qu'à établir l'équivalence mentionnée ci-dessus, comme dans la proposition II.5.2.

ii) La vérification est sans réelle difficulté car il suffit de vérifier que δ satisfait les axiomes des relations d'équivalence (réflexivité, symétrie et transitivité) et que, pour deux couples d'angles

$$(\hat{x}, \hat{y}) \text{ et } (\hat{x'}, \hat{y'}) \ \text{ tels que } \ :$$

$$\begin{array}{ccc} \hat{x} & \delta & \hat{x'} \\ \hat{y} & \delta & \hat{y'} \ , \end{array}$$

$$\hat{x} \ + \ \hat{y} \, \delta \, \hat{x'} \ + \ \hat{y'} \ .$$

Tous ces faits résultent, ce dont on s'apercevra en menant tranquillement les calculs, de ce que

$$\begin{array}{rcl} 2\hat{\pi} & \stackrel{(\text{cf. II.5.1.ii}),)}{=} & 2\omega^{-1}(-\mathrm{Id}_E) \\ & \stackrel{(\text{cf. II.5.1.ii}),)}{=} & \omega^{-1}[(-\mathrm{Id}_E)^2] \\ & = & \omega^{-1}(\mathrm{Id}_E) \\ & \stackrel{(\text{cf. II.5.1.i}),)}{=} & \hat{0} \ . \end{array}$$

iii) Le fait que α soit bien définie résulte de la proposition II.8.2 qui permet de voir que pour deux choix différents de vecteurs unitaires on peut éventuellement trouver deux angles différant de $\hat{\pi}$ qui définissent, par conséquent, la même classe dans $\hat{\mathbb{A}}/\dagger$. Pour montrer qu'ensuite cette construction ne dépend pas de la classe modulo δ, il faut utiliser l'une des équivalences II.8.2.a) ⇔ II.8.2.b) ou II.8.2.a) ⇔ II.8.2.c).

Toute classe c dans $\hat{\mathbb{A}}/\dagger$ a un représentant $\angle uv \in \hat{\mathbb{A}}$ lequel a un représentant $(u, v) \in \mathbb{A}$ (cf. II.4.1.) Il s'ensuit que $\angle \overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v}$ est un antécédent de c par α c'est-à-dire que α est surjective.

La preuve de l'injectivité de α est un jeu sur les notations et la manipulation des définitions qui est laissé en exercice.

Le fait qu'α définisse un isomorphisme est tautologique puisque la structure de groupe sur $\hat{\mathbb{D}}$ est précisément induite par α.

iv) est une affaire d'écriture.

Définition II.8.5 Pour tout couple de droites $(D_1, D_2) \in \mathbb{D}$, on appellera *angle des droites* D_1 *et* D_2 la classe $\angle D_1D_2$ de (D_1, D_2) dans $\hat{\mathbb{D}}$.

Proposition II.8.6 *Étant données* D_1, D_2, D'_1, D'_2 *des droites de* E,

$$\angle D_1D_2 \;=\; \angle D'_1D'_2 \;\Leftrightarrow\; \angle D_1D'_1 \;=\; \angle D_2D'_2\ .$$

Preuve : Cette proposition résulte immédiatement des deux définitions possibles de la relation d'équivalence δ (cf. II.8.4.i).2) et (cf. II.8.4.i).1) et est à rapprocher de la proposition II.5.3.

Remarque II.8.1 On remarquera que, contrairement aux angles de vecteurs unitaires, si deux couples de droites définissent le même angle de droites, ils sont certes superposables, mais non de manière unique. Il existe deux rotations permettant de les superposer, différant de $-\mathrm{Id}_E$. Cette remarque peut être complétée par la proposition suivante :

Proposition II.8.2 *Étant donné un couple de droites* $(D_1, D_2) \in \mathbb{D}$, *on note*

$$\textit{is}(D_1, D_2) \;:=\; \{\gamma \in \mathcal{O}_\phi(E) \mid \gamma(D_1) = D_2\} \;\subset\; \mathcal{O}_\phi(E)\ ,$$

(resp. is$^+(D_1, D_2) \;:=\; \textit{is}(D_1, D_2) \cap \mathcal{SO}_\phi(E)$,) *(resp. is*$^-(D_1, D_2) \;:=\; \textit{is}(D_1, D_2) \cap \mathcal{O}_{\phi,-}(E)$.)

Pour une droite $D \subset E$, *on notera également* $\sigma_D^\perp$ *la symétrie orthogonale par rapport à* D *c'est-à-dire l'unique isométrie négative telle que l'espace propre associé à la valeur propre* 1 *soit* D.

i) Étant donnée une droite $D \subset E$,

$$\textit{is}(D, D) \;=\; \{\mathrm{Id}_E, -\mathrm{Id}_E, \sigma_D^\perp, -\sigma_D^\perp\}$$

est un groupe isomorphe à $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$.

ii) Étant donné maintenant un couple $(D_1, D_2) \in \mathbb{D}$, *et* u_1 *(resp.* u_2*) un vecteur unitaire de* D_1 *(resp.* $D_2,$*) on note* σ *l'unique isométrie négative telle que* $\sigma(u_1) = u_2$ *(cf. II.4.1.)*

Alors

$$\text{is}(D_1, D_2) = \{\sigma \circ \gamma\ ,\ \gamma \in \text{is}(D_1, D_1)\}\ .$$

On en déduit que is$^+(D_1, D_2)$ *est formé des deux rotations*

$$\omega(\angle u_1 u_2) \text{ et } -\omega(\angle u_1 u_2) = \omega(\angle u_1 u_2) \circ -\mathrm{Id}_E\ ; \qquad 1$$

l'ensemble

$$\text{is}^-(D_1, D_2) = \{\sigma, -\sigma\}\ ; \qquad 2$$

pour tout vecteur v *fixe par* σ *i.e. associé à la valeur propre* 1,

$$2\angle u_1 v = \angle u_1 u_2\ . \qquad 3$$

iii) Étant donnés deux couples de droites $(D_1, D_2) \in \mathbb{D}$ *et* $(D_1', D_2') \in \mathbb{D}$,

$$\angle D_1 D_2 = \angle D_1' D_2'$$

si et seulement si

$$\text{is}^+(D_1, D_2) = \text{is}^+(D_1', D_2')\ .$$

Preuve :

i) Étant donnée une droite $D \subset E$, et u un vecteur unitaire de D, une isométrie $\gamma \in \mathcal{O}_\phi(E)$, vérifie $\gamma(D) = D$ si et seulement si $\gamma(u) \in D$ (cf. $*$).) De plus, $\gamma(u)$ est unitaire.

Or D ne contient que deux vecteurs unitaires u et $-u$. On a donc nécessairement

$$\gamma(u) = u \text{ ou } \gamma(u) = -u\ .$$

Or, d'après le théorème II.4.1

a) si γ est une isométrie positive *i.e.* $\gamma \in \mathcal{SO}_\phi(E)$, $\gamma(u) = u$ (resp. $\gamma(u) = -u$) si et seulement si $\gamma = \mathrm{Id}_E$ (resp. $\gamma = -\mathrm{Id}_E$.)

b) Si γ est une isométrie négative, *i.e.* $\gamma \in \mathcal{O}_{\phi,-}(E)$, $\gamma(u) = u$ (resp. $\gamma(u) = -u$ si et seulement si u est un vecteur propre associé à la valeur propre 1 (resp. -1 .) En combinant le théorème II.4.1 et la proposition II.3.1 on montre que γ est $\sigma_D^\perp$ (resp. $-\sigma_D^\perp$.)

Il est élémentaire de montrer qu'alors is(D, D) est un groupe isomorphe à $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$.

ii) Étant donné un couple $(D_1, D_2) \in \mathbb{D}$, et σ comme dans l'énoncé de la proposition, il est clair que pour tout $\gamma \in \mathrm{is}({}_1D, D_1)$, $\sigma \circ \gamma \in \mathrm{is}(D_1, D_2)$.

On définit ainsi une appliction

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{is}(D_1, D_1) & \to & \mathrm{is}(D_1, D_2) \\ \gamma & \mapsto & \sigma \circ \gamma\,. \end{array}$$

Il suffit de remarquer que l'application

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{is}(D_1, D_2) & \to & \mathrm{is}(D_1, D_1) \\ \eta & \mapsto & \sigma \circ \eta \end{array}$$

est la réciproque de la précédente.

iii) est laissé en exercice.

Définition II.8.4 Les axes des deux isométries négatives constituant l'ensemble $\mathrm{is}^-(D_1, D_2)$ pour deux droites D_1 et D_2 sont appelées *bissectrices* de l'angle de droites $\angle D_1D_2$.

Remarque II.8.5 La définition II.8.5 trouve son intérêt dans la réalisation géométrique suivante :

Théorème II.8.6 (Relation de Chasles) *Étant données trois droites D_1, D_2 et D_3 de E,*

$$\angle D_1D_2 +_{\hat{\mathbb{D}}} \angle D_2D_3 = \angle D_1D_3\,.$$

Preuve : La preuve est un exercice.

Définition II.8.1 Si l'on choisit une orientation (cf. II.1.8) B sur E, on dispose d'un isomorphisme $c_B : \mathcal{SO}_\phi(E) \cong U$ (cf. II.2.1); lequel définit, par passage au quotient, un isomorphisme encore noté $c_B : \mathcal{SO}_\phi(E)/\{-\mathrm{Id}_E, \mathrm{Id}_E\} \cong U/\{-1, 1\}$. On obtient, en composant ce dernier avec $\omega \circ \alpha$ (cf. II.8.4.iv).2,) un isomorphisme $\hat{\mathbb{D}} \cong U/\{-1, 1\}$.

En composant encore cet isomorphisme avec $\arg$ on obtient un isomorphisme

$$\hat{\mathbb{D}} \cong \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}\,. \qquad \text{II.8.1.1}$$

On appellera *mesure de l'angle de droites* $\angle D_1D_2$ et l'on notera $\widehat{(D_1, D_2)}$ ou simplement $\angle D_1D_2$ s'il n'y a pas d'ambiguïté concernant l'orientation, la classe de nombres réels modulo π correspondant à l'angle de droites $\angle D_1D_2$ par l'isomorphisme II.8.1.1.

Remarque II.8.2 On peut résumer les diverses constructions de quotients données dans cette section par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
\{\hat{0},\hat{\pi}\} & \xrightarrow{\omega} & \{\mathrm{Id}_E, -\mathrm{Id}_E\} & \xrightarrow{c_B} & \{1,-1\} & \xrightarrow{\arg} & \{0,\pi\} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\hat{\mathbb{A}} & \xrightarrow{\omega} & \mathcal{SO}_\phi(E) & \xrightarrow{c_B} & U & \xrightarrow{\arg} & \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\hat{\mathbb{D}} & \xrightarrow{\omega} & \mathcal{SO}_\phi(E)/\{\mathrm{Id}_E, -\mathrm{Id}_E\} & \xrightarrow{c_B} & U/\{1,-1\} & \xrightarrow{\arg} & \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}
\end{array}$$

Théorème II.8.3 *Étant données deux droites D_1 et D_2de E :*

i) Les droites D_1 et D_2 sont égales si et seulement si $\angle D_1D_2 = 0_{\hat{\mathbb{D}}}$; si et seulement si $\mathrm{mod}\,(\widehat{D_1, D_2})\pi 0$; si et seulement si pour tout vecteur unitaire $u_1 \in D_1$ (resp. $u_2 \in D_2,$) l'angle $\angle u_1u_2$ est plat (cf. II.5.1.ii)) ou nul (cf. II.5.1.i).)

On dira, dans ce cas, que l'angle $\angle D_1D_2$ est nul mais on pourrait aussi bien dire qu'il est plat.

ii) Les droites D_1 et D_2 sont orthogonales si et seulement si $(\widehat{D_1, D_2}) = \frac{\pi}{2}[\pi]$; si et seulement si pour tout vecteur unitaire $u_1 \in D_1$ (resp. $u_2 \in D_2,$) l'angle $\angle u_1u_2$ est droit (cf. II.5.1.iii).)

On dira, dans ce cas, que l'angle $\angle D_1D_2$ est droit.

Preuve : Sans difficulté est laissé en exercice.

Proposition II.8.1 *i) Étant donné un angle de droites $\angle D_1D_2 \in \hat{\mathbb{D}}$, pour toute isométrie $\gamma \in \mathcal{O}_\phi(E)$, l'angle de droites $\angle\gamma(\Delta_1)\gamma(\Delta_2)$ est indépendant du représentant $(\Delta_1, \Delta_2) \in \mathbb{D}$ de $\angle D_1D_2$.*

ii) Toute isométrie $\gamma \in \mathcal{O}_\phi(E)$, définit donc une application

$$\hat{\gamma} : \hat{\mathbb{D}} \to \hat{\mathbb{D}}$$

qui est en fait un automorphisme du groupe $(\hat{\mathbb{D}}, +)$.

On a les formules :

$$\hat{\gamma}(\angle D_1D_2) = \det(\gamma)\angle D_1D_2 = \omega^{-1}[\gamma \circ \omega(\angle D_1D_2) \circ \gamma^{-1}] . \qquad 1$$

iii) L'application $\gamma \mapsto \hat{\gamma}$ est un morphisme de groupes de $\mathcal{O}_\phi(E)$ dans dans le groupe des automorphismes de $(\hat{\mathbb{D}}, +)$ dont l'image est le sous-groupe $\{\mathrm{Id}_, -\mathrm{Id}_\}$ isomorphe à $\mathbb{Z}/2$, et le noyau le groupe spécial orthogonal $\mathcal{SO}_\phi(E)$.

Preuve : La démonstration de cette proposition est très analogue à celle du corollaire II.6.1.

Théorème II.8.1 *Une isométrie positive conserve les angles de droites tandis qu'une isométrie négative transforme un angle de droites en son opposé.*

Preuve : Ce théorème n'est qu'une reformulation de la proposition II.8.1.