III . –Espaces affines

III.0 . –Introduction

III.0.1 . –Équations différentielles linéaires

Dans l'ensemble des fonctions C_∞ de la variable réelle à valeurs réelles considérons, pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et f une fonction fixés, le problème d'inconnue y :

$$\mathcal{E} \ : \ y' - \lambda y \ = \ f \ .$$

Si y_0 est une solution de $\mathcal{E}$, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de $\mathcal{E}$ est non vide. L'ensemble

$$\overrightarrow{\mathcal{S}} \ := \ \{y_1 - y_2 \ ; \ y_1 \in \ \mathcal{S} \ , \ y_2 \in \mathcal{S}\}$$

est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 1 engendré par la fonction $e_\lambda \ := \ x \mapsto e^{\lambda x}$.

$$\mathcal{S} \ = \ \{y_0 + k e_\lambda \ ; \ k \ \in \ \mathbb{R}\} \ = \ y_0 + \overrightarrow{\mathcal{S}} \ . \qquad \text{III.0.1.1}$$

III.0.2 . –Suites récurrentes

Un problème très similaire à celui envisagé en III.0.1 est la recherche des solutions, dans l'ensemble des suites à valeurs réelles, de l'équation

$$\mathcal{E} \ : \ u_{n+1} - \lambda u_n \ = \ a_n \ ,$$

(où $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $a_{n \ , \ n \ \in \ \mathbb{N}}$ sont fixés.) S'il existe une solution $(u_0) := u_{0,n \ , \ n \ \in \ \mathbb{N}}$ à l'équation $\mathcal{E}$ l'ensemble $\mathcal{S}$ de ses solutions est non vide et

$$\overrightarrow{\mathcal{S}} \ := \ \{(u_1) - (u_2) \ ; \ (u_1) \in \mathcal{S} \ , \ (u_2) \in \mathcal{S}\}$$

est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 1 engendré par $n \mapsto \lambda^n$.

$$\mathcal{S} \ = \ \{(u_0) + k(\lambda^n) \ ; \ k \ \in \ \mathbb{R}\} \ = \ (u_0) + \overrightarrow{\mathcal{S}} \ . \qquad \text{III.0.2.1}$$

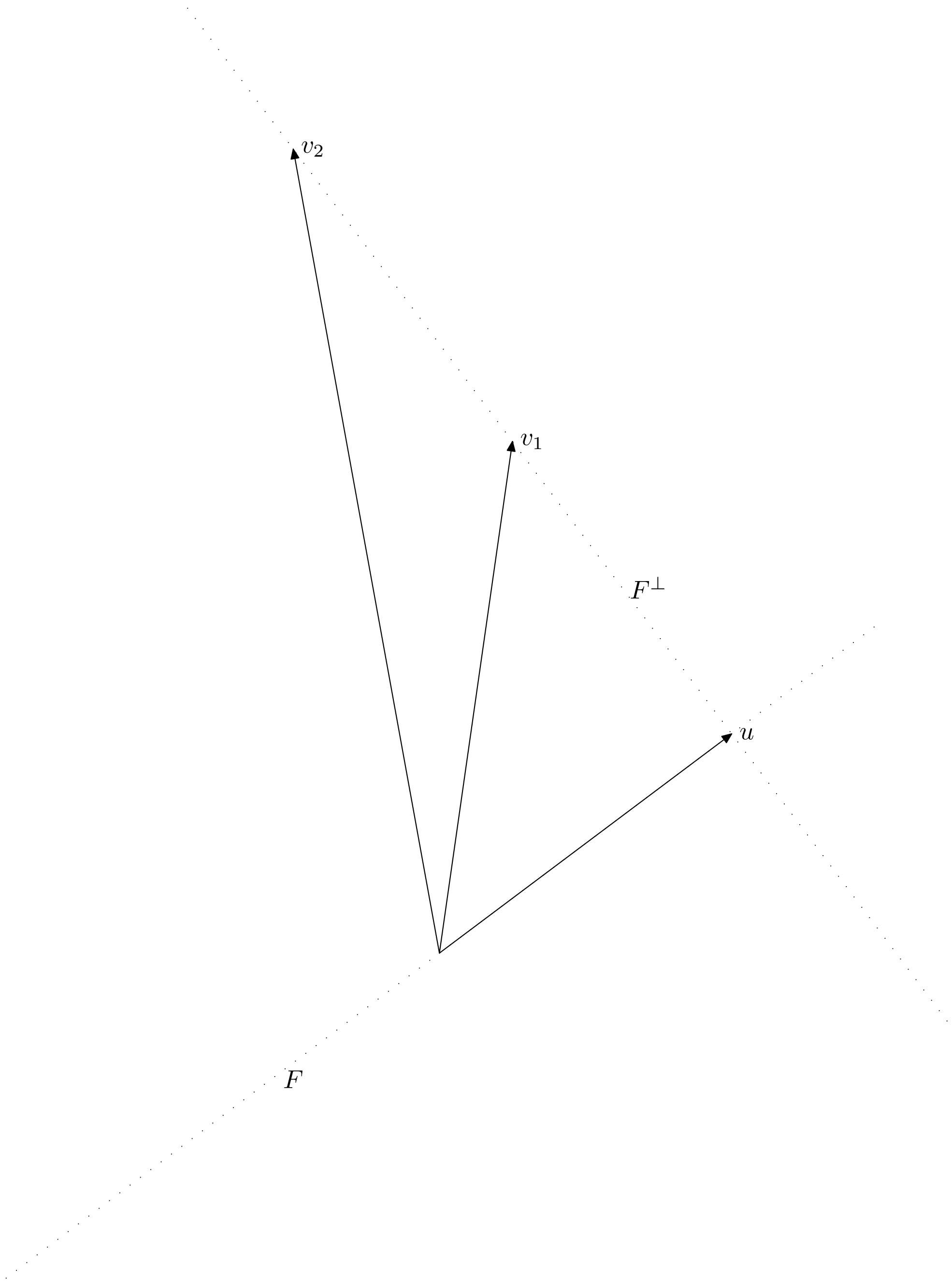
III.0.3 . –Fibre d'une projection orthogonale

Étant donné un espace vectoriel euclidien I.2.3.ii) (E, ϕ) , $F \subset E$ un sous-espace vectoriel et $u \ \in \ F$, on cherche à déterminer

$$p_{F^{-1}}(\{u\}) \ := \ \{v \ \in \ E \ \mid \ p_F(v) = u\} \ ,$$

(où $p_F : E \to F$ est la projection orthogonale sur F .) On constate :

$$p_{F^{-1}}(\{u\}) \;=\; u + F^{\perp} \;=\; \{u+v\;;\; v \;\in\; F^{\perp}\}\,. \qquad \text{III.0.3.1}$$



III.0.4 . –Alignement dans un espace euclidien

Considérons l'ensemble $\mathbb{R}^3$ muni de l'application

$$\begin{array}{rcl} \delta : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^+ \\ (A,B) & \mapsto & \delta(A,B) \end{array}$$

où pour tout $A := (x_A, y_A, z_A)$ et $B := (x_B, y_B, z_B)$ des éléments de $\mathbb{R}^3$,

$$\delta(A,B) \;:=\; \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}\;.$$

Si l'on note $O := (0,0,0)$ et

$$\overrightarrow{OA} \;:=\; \begin{pmatrix} x_A - 0 \\ y_A - 0 \\ z_A - 0 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} \;\in\; \overrightarrow{\mathbb{R}^3}\;,$$

pour tout *point* $A \in \mathbb{R}^3$, on remarque que pour tout $(A,B) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$,

$$\delta(A,B) \;=\; d(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$$

où d est la distance euclidienne sur l'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathbb{R}^3}$ muni du produit scalaire usuel (cf. I.2.6.ii).)

On tire immédiatement de l'inégalité triangulaire pour la distance euclidienne d (cf. I.2.7.vi)) que pour tout triplet (A,B,C) d'éléments de $\mathbb{R}^3$,

$$\begin{array}{rcl} \delta(A,C) & \leq & \delta(A,B) + \delta(B,C) \\ \delta(B,A) & \leq & \delta(B,C) + \delta(C,A) \\ \delta(C,B) & \leq & \delta(C,A) + \delta(A,B)\;. \end{array} \qquad \text{III.0.4.1}$$

Étudions le cas d'égalité dans l'une des inégalités précédentes :

$$\begin{array}{crcl} & \delta(A,C) & = & \delta(A,B) + \delta(B,C) \\ \Leftrightarrow & d(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) & = & d(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) + d(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) \\ \Leftrightarrow & ||\overrightarrow{AC}|| & = & ||\overrightarrow{AB}|| + ||\overrightarrow{BC}|| \\ \Leftrightarrow & ||\overrightarrow{AC}||^2 & = & ||\overrightarrow{AB}||^2 + ||\overrightarrow{BC}||^2 + 2||\overrightarrow{AB}||.||\overrightarrow{BC}|| \\ \Leftrightarrow & \langle \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \rangle & = & ||\overrightarrow{AB}||^2 + ||\overrightarrow{BC}||^2 + 2||\overrightarrow{AB}||.||\overrightarrow{BC}|| \\ \Leftrightarrow & \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC} \rangle & = & ||\overrightarrow{AB}||.||\overrightarrow{BC}||\;. \end{array} \qquad \text{III.0.4.2}$$

On constate qu'on est alors dans un cas d'égalité pour l'inégalité de Cauchy-Schwarz (cf. I.2.7.ii).) Supposons que $\overrightarrow{AC} \neq 0_{\overrightarrow{\mathbb{R}^3}}$. Il existe alors $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\overrightarrow{AB} \;=\; \lambda \overrightarrow{AC}\;.$$

En réécrivant la dernière égalité de III.0.4.2 il vient alors

$$\begin{array}{rccc} & \lambda(1-\lambda)\langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AC}\rangle & \overset{=}{\text{(cf. I.2.7.i),)}} & \mid\lambda(1-\lambda)\mid.\|\overrightarrow{AC}\|^2 \\ \Leftrightarrow & \lambda(1-\lambda) & = & \mid\lambda(1-\lambda)\mid \\ \Leftrightarrow & 0 & \leq\lambda\leq & 1\,. \end{array} \qquad \text{III.0.4.3}$$

Supposons A et C fixés distincts et cherchons à déterminer l'ensemble des B tels que l'une des trois inégalités de III.0.4.1 soit une égalité. Ceci équivaut à

$$\exists\ell\in[0;1],\quad \left\{\begin{array}{rcl} \overrightarrow{AB} & = & \ell\overrightarrow{AC} \\ \text{ou }\overrightarrow{BC} & = & \ell\overrightarrow{BA} \\ \text{ou }\overrightarrow{CA} & = & \ell\overrightarrow{CB} \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{rlcl} & \exists\ell\in[0;1], & \overrightarrow{AB} = & \ell\overrightarrow{AC} \\ \text{ou} & \exists\ell\in[1;+\infty[, & \overrightarrow{AB} = & \ell\overrightarrow{AC} \\ \text{ou} & \exists\ell\in]-\infty;0], & \overrightarrow{AB} = & \ell\overrightarrow{AC} \end{array}\right\}. \qquad \text{III.0.4.4}$$

(c'est-à-dire que B est entre A et C ou C est entre A et B ou A est entre B et C .)

Supposons, A et C étant fixés distincts, que B et B' soient deux solutions du problème ; il est clair que

$$\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AB'} - \overrightarrow{AB} \in \overrightarrow{\mathbb{R}^3}$$

est colinéaire à $\overrightarrow{AC}$. Il est également clair que tout point $B\in\mathbb{R}^3$ tel qu'il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que

$$\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AC}$$

i.e.

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{AC} \qquad \text{III.0.4.5}$$

est solution du problème.

On écrira parfois l'égalité III.0.4.5

$$B = A + \overrightarrow{AB}$$

ce qui, moyennant de donner un sens précis à cette écriture, la rapproche des écritures III.0.1.1, III.0.2.1, et III.0.3.1.

Cependant le problème est “plus riche” ici, eu égard à la distinction sur les intervalles contenant λ .

III.1 . −Généralités

Dans cette section, K désigne un corps que l'on pourra supposer être $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ sauf mention exceptionnelle du contraire.

Définition III.1.1 Un K-*espace affine* est un triplet $(\mathcal{E}, \overrightarrow{\mathcal{E}}, \overrightarrow{\bullet\bullet})$ simplement noté $\mathcal{E}$ si aucune confusion ne peut en résulter, où :

i) $\mathcal{E}$ est un ensemble non vide dont les éléments sont appelés *points.*

ii) $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ est un K-espace vectoriel appelé *espace vectoriel sous-jacent* ou *direction vectorielle.* Les éléments $\overrightarrow{v}$ de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ sont usuellement appelés *vecteurs.*

iii) $\overrightarrow{\bullet\bullet} : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to \overrightarrow{\mathcal{E}}$ est une application vérifiant :
pour tout triplet (A, B, C) d'éléments de $\mathcal{E}$,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} , \tag{1}$$

(relation de *Chasles* ;)

†) pour tout point $O \in \mathcal{E}$ l'application $\overrightarrow{O\bullet} : \mathcal{E} \to \overrightarrow{\mathcal{E}}$ est bijective.

iv) On appelle *dimension de l'espace affine* $\mathcal{E}$ la dimension de l'espace vectoriel sous-jacent.

Exemple III.1.2 a) Le <u>groupe abélien</u> $\mathcal{P} := (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +)$, (resp. $\mathcal{E} := (\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, +)$,) muni de l'application

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\bullet\bullet} : \mathcal{P} \times \mathcal{P} &\to \operatorname{Vect}\{\mathbb{R}^2\} := (\mathbb{R}^2, +, \cdot) \\ ((x, y), (x', y')) &\mapsto \begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

(resp.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\bullet\bullet} : \mathcal{E} \times \mathcal{E} &\mapsto \operatorname{Vect}\{\mathbb{R}^3\} := (\mathbb{R}^3, +, \cdot) \\ ((x, y, z), (x', y', z')) &\mapsto \begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \\ z' - z \end{pmatrix}) \end{aligned}$$

est un $\mathbb{R}$-espace affine d'espace vectoriel sous-jacent $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$, (resp. $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$,) et de dimension 2 , (resp. 3 ,) appelé *plan affine,* (resp *espace affine de dimension* 3 .)

b) Il faut bien évidemment reconsidérer les ensembles définis en III.0.1.1, III.0.2.1, III.0.3.1 et III.0.4.5 à la lumière de la définition III.1.1.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $c \in \mathcal{S}_n$ un cycle de longueur p avec p premier. Si on note S le support du cycle c , on définit l'application

$$\overrightarrow{\bullet\bullet} : S \times S \to \mathbb{F}_p$$

de la manière suivante : Pour tout couple (a, b) d'éléments de S , il existe $\lambda \in \mathbb{Z}$ tel que $b = c^\lambda(a)$. On posera

$$\overrightarrow{ab} := \overline{\lambda}$$

(où $\overline{\lambda}$ est la classe de λ modulo p .) Le triplet $(S, \overrightarrow{\bullet\bullet}, \mathbb{F}_p)$ est alors un $\mathbb{F}_p$-espace affine de dimension 1 .

Proposition III.1.3 *Dans la définition III.1.1 le point III.1.1.iii).†) est équivalent à*

$*$) *Il existe un point $O \in \mathcal{E}$, tel que l'application*

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{O\bullet} : \mathcal{E} & \to & \overrightarrow{\mathcal{E}} \\ A & \mapsto & \overrightarrow{OA} \end{array}$$

est bijective.

Plus précisément les deux assertions III.1.1.iii).1 et III.1.1.iii).†) de la définition III.1.1.iii) sont équivalentes aux assertions III.1.1.iii).1 et $*$).

Preuve : Le sens direct est clair.

Réciproquement, supposons que $O \in \mathcal{E}$ soit un point tel que

$$\overrightarrow{O\bullet} : \mathcal{E} \to \overrightarrow{\mathcal{E}}$$

est bijective. Soit $O' \in \mathcal{E}$. L'application

$$\overrightarrow{O'\bullet} : \mathcal{E} \to \overrightarrow{\mathcal{E}}$$

est bijective si et seulement si pour tout $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{E}}$, l'équation d'inconnue A

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{u} \qquad \text{III.1.1}$$

possède une unique solution. Or III.1.1 équivaut, d'après III.1.1.iii).1, à :

$$\begin{array}{rrcl} & \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OA} & = & \overrightarrow{u} \\ \Leftrightarrow & \overrightarrow{OA} & = & \overrightarrow{u} - \overrightarrow{O'O}\ ; \end{array}$$

cette dernière équation ayant une unique solution grâce à l'hypothèse III.1.3.$*$).

Proposition III.1.2 (Vectorialisation d'un espace affine) *Étant donné un espace affine*

$$(\mathcal{E}, \overrightarrow{\mathcal{E}}, \overrightarrow{\bullet\bullet}) \text{ et un point } O \in \mathcal{E} \,,$$

il existe une unique application

$$\begin{array}{rccc} + : & \overrightarrow{\mathcal{E}} & \to & \mathcal{E} \\ & \overrightarrow{v} & \mapsto & O + \overrightarrow{v} \,; \end{array} \qquad \text{III.1.2.1}$$

où $O + \overrightarrow{v}$ *est l'unique point* A *de* $\mathcal{E}$ *tel que*

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{v} \,.$$

De plus, $+$ *satisfait les propriétés suivantes :*

$$\forall (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in \overrightarrow{\mathcal{E}} \times \overrightarrow{\mathcal{E}} \,, O + (\overrightarrow{u} +_{\overrightarrow{\mathcal{E}}} \overrightarrow{v}) = (O + \overrightarrow{u}) + \overrightarrow{v} \,; \qquad \text{III.1.2.2}$$

$$\forall O' \in \mathcal{E} \text{ et } \forall \overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\mathcal{E}} \,, \overrightarrow{O'(O + \overrightarrow{v})} = \overrightarrow{O'O} +_{\overrightarrow{\mathcal{E}}} \overrightarrow{v} \,; \qquad \text{III.1.2.3}$$

$$\forall A \in \mathcal{E} \,, O + \overrightarrow{OA} = A \,. \qquad \text{III.1.2.4}$$

Preuve : La démonstration de cette proposition est un exercice sur la définition d'un espace affine (cf. III.1.1.)

Définition III.1.1 Étant donné un K-espace affine $(\mathcal{E}, \overrightarrow{\mathcal{E}}, \overrightarrow{\bullet\bullet})$, lorsqu'on fixe un point O qui détermine une application $+ : \overrightarrow{\mathcal{E}} \to \mathcal{E}$, on dit qu'on a *choisi une origine* dans $\mathcal{E}$.

Remarque III.1.2 i) Étant donnés un K-espace affine $(\mathcal{E}, \overrightarrow{\mathcal{E}}, \overrightarrow{\bullet\bullet})$ et le choix d'une origine O , on a :

$$\mathcal{E} = \left\{ O + \overrightarrow{u} \,;\, \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{E}} \right\} = O + \overrightarrow{\mathcal{E}} \,, \qquad 1$$

d'après III.1.1.iii).†); puisque $O + \overrightarrow{v}$ est l'<u>unique</u> antécédent de $\overrightarrow{v}$ par l'application $\overrightarrow{O\bullet}$: $\mathcal{E} \to \overrightarrow{\mathcal{E}}$.

Voir les exemples III.1.2.b).

ii) Pour tout point $O \in \mathcal{E}$, on définit une opération $+ : \overrightarrow{\mathcal{E}} \to E$, (cf. III.1.2,) ce qui permet de définir une loi encore notée

$$\begin{array}{rccc} + : & \mathcal{E} \times \overrightarrow{\mathcal{E}} & \to & \mathcal{E} \\ & (A, \overrightarrow{v}) & \mapsto & A + \overrightarrow{v} \,. \end{array} \qquad 1$$

Proposition III.1.3 (Propriétés des espaces affines) *Soit* $(\mathcal{E}, \overrightarrow{\mathcal{E}}, \overrightarrow{\bullet\bullet})$ *un* K*-espace affine.*

Étant donnés quatre points A, B, C, D *de* $\mathcal{E}$ *, on a les propriétés suivantes :*

$$\overrightarrow{AA} \;=\; \mathrm{Vect}\{0\} \;:=\; 0_{\overrightarrow{\mathcal{E}}} \;; \qquad \textit{III.1.3.1}$$

$$\overrightarrow{AB} \;=\; -\overrightarrow{BA} \;; \qquad \textit{III.1.3.2}$$

$$\overrightarrow{AB} \;=\; \overrightarrow{CD} \text{ si et seulement si } \overrightarrow{AC} \;=\; \overrightarrow{BD} \,. \qquad \textit{III.1.3.3}$$

Preuve : Ces identités découlent directement de la relation de Chasles (cf. III.1.1.iii).1.)

Définition III.1.1 Pour quatre points A, B, C, D d'un K-espace affine $\mathcal{E}$, si l'une des égalités de III.1.3.3 est satisfaite et $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ (par exemple) sont indépendants, on dit que $ABDC$ est un *parallélogramme*.

Proposition III.1.2 *Étant donné un* K*-espace affine* $\mathcal{E}$ *, la relation binaire* $\sim$ *définie sur* $\mathcal{E}\times\mathcal{E}$ *par :*

$$(A, B) \sim (A', B') \;\Leftrightarrow\; \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$$

est une relation d'équivalence sur $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ *appelée relation d'équipollence entre bipoints.*

L'application $\overrightarrow{\bullet\bullet}$ *induit une* <u>*bijection*</u>

$$(\mathcal{E} \times \mathcal{E})/ \sim \to \overrightarrow{\mathcal{E}} \;.$$

Définition III.1.3 i) On dit qu'un K-espace affine $\mathcal{E}$ est *euclidien* si K est le corps $\mathbb{R}$ des réels et si la direction vectorielle $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ de $\mathcal{E}$ (cf. III.1.1.ii)) est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien (cf. I.2.3.ii).) On note usuellement $(\mathcal{E}, \langle\bullet,\bullet\rangle)$ un espace affine euclidien où $\langle\bullet,\bullet\rangle$ est l'accouplement canonique (cf. I.1.2.1) associé à une forme bilinéaire (cf. I.1.1) symétrique (cf. I.1.4) définie positive (cf. I.2.1) donnant la structure euclidienne sur $\overrightarrow{\mathcal{E}}$.

ii) On définit une application

$$\begin{array}{rccc} \delta : & \mathcal{E}\times\mathcal{E} & \to & \mathbb{R}^+ \\ & (A, B) & \mapsto & ||\overrightarrow{AB}|| \end{array}$$

(où $||\overrightarrow{u}||$ est la norme euclidienne (cf. I.2.6) d'un vecteur $\overrightarrow{u}$) appelée *distance euclidienne sur* $\mathcal{E}$.

Rappelons que la distance euclidienne δ vérifie :

$$\forall\,(A, B) \;\in\; \mathcal{E}\times\mathcal{E}\,, \delta(A, B) \;=\; \delta(B, A) \qquad 1$$

(cf. I.2.7.i)) et (cf. III.1.3.2) ;

$$\delta(A, B) \;=\; 0 \;\Leftrightarrow\; A \;=\; B \qquad 2$$

(cf. I.2.7.iii)) et (cf. III.1.3.1) ;

$$\forall (A, B, C) \;\in\; \mathcal{E} \times \mathcal{E} \times \mathcal{E} \;, \delta(A, C) \;\leq\; \delta(A, B) + \delta(B, C) \qquad 3$$

(cf. I.2.7.v)) (*inégalité triangulaire*.)

III.2 . −Sous-espaces affines

Dans cette section $\mathcal{E} := (\mathcal{E}, \overrightarrow{\mathcal{E}}, \overrightarrow{\bullet\bullet})$ est un K-espace affine (cf. III.1.1.)

Proposition III.2.1 *Étant donnée une partie $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ non vide de $\mathcal{E}$, les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) Il existe un sous-espace vectoriel $\overrightarrow{V}$ de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ tel que

$$\left\{\overrightarrow{AB}\,;\ A \in \mathcal{F}\,,\ B \in \mathcal{F}\right\} = \overrightarrow{V}\,;$$

et

il existe un point $O \in \mathcal{F}$ tel que la restriction de l'application

$$\overrightarrow{O\bullet} : \mathcal{E} \to \overrightarrow{\mathcal{E}} \text{ (cf. III.1.1.iii).†))}$$

de $\mathcal{F}$ dans $\overrightarrow{V}$ est une bijection.

Autrement dit, le triplet formé de $\mathcal{F}$, $\overrightarrow{V}$ et la restriction de $\overrightarrow{\bullet\bullet}$ est un espace affine.

b) Il existe un sous-espace vectoriel $\overrightarrow{V} \subset \overrightarrow{\mathcal{E}}$ tel que pour tout $A \in \mathcal{F}$,

$$\{\overrightarrow{AB}\,;\ B \in \mathcal{F}\} = \overrightarrow{V}\,.$$

c) Pour tout $A \in \mathcal{F}$, il existe un sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}\{V_A\} \subset \overrightarrow{\mathcal{E}}$ tel que

$$\{\overrightarrow{AB}\,;\ B \in \mathcal{F}\} = \mathrm{Vect}\{V_A\}\,.$$

d) Il existe un point $O \in \mathcal{F}$ et un sous-espace vectoriel $\overrightarrow{W} \subset \overrightarrow{\mathcal{E}}$ tel que

$$\{\overrightarrow{OA}\,;\ A \in \mathcal{F}\} = \overrightarrow{W}\,.$$

Preuve :

- Il est d'abord tout à fait immédiat de constater que (b) implique (c) implique (d) .

(a) $\Rightarrow$ (c) Supposons que (a) est vérifiée. Fixons $A \in \mathcal{F}$. Pour tout couple $(B, C) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ appartiennent à

$$\overrightarrow{V} := \left\{\overrightarrow{MN}\,;\ M \in \mathcal{F}\,, N \in \mathcal{F}\right\}\,.$$

Il s'ensuit que pour tout $(\lambda, \mu) \in K \times K$,

$$\lambda\overrightarrow{AB} +_{\overrightarrow{\mathcal{E}}} \mu\overrightarrow{AC} \in \overrightarrow{V}\,.$$

Comme $\mathcal{E}$ est un espace affine (cf. III.1.1.iii).†),) il existe un unique point $D \in \mathcal{E}$ tel que

$$\overrightarrow{AD} = \lambda\overrightarrow{AB} +_{\overrightarrow{\mathcal{E}}} \mu\overrightarrow{AC} .$$

Considérant l'"origine" O de $\mathcal{F}$, $\overrightarrow{OA} \in \overrightarrow{V}$ par hypothèse. Comme $\overrightarrow{AD} \in \overrightarrow{V}$ d'après ce qui précède,

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} +_{\overrightarrow{V}} \overrightarrow{AD} \in \overrightarrow{V}$$

par stabilité des espaces vectoriels. D'après (a) il s'ensuit que $D \in \mathcal{F}$; donc que

$$\lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} \in \mathrm{Vect}\{V_A\} := \left\{\overrightarrow{AM} \; ; \; M \in \mathcal{F}\right\} ;$$

c'est-à-dire que $\mathrm{Vect}\{V_A\}$ est une partie de $\overrightarrow{V}$ stable par combinaison linéaire. Elle est par ailleurs non vide puisqu'elle contient

$$\overrightarrow{AA} = 0_{\overrightarrow{\mathcal{E}}}$$

(cf. III.1.3.1.) Il en résulte que $\mathrm{Vect}\{V_A\}$ est un sous-K-espace vectoriel de $\overrightarrow{V}$ donc un sous-K-espace vectoriel de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$. Nous avons donc montré que (a) implique (c) .

(d) $\Rightarrow$ (a) Soient A et $\overrightarrow{W}$ tels que $\mathcal{F}, A, \overrightarrow{W}$ vérifient (d) . Il est clair que

$$\overrightarrow{W} \subset \overrightarrow{V} := \left\{\overrightarrow{MN} \; ; \; M \in \mathcal{F} \, , \, N \in \mathcal{F}\right\} .$$

Par ailleurs, pour tout $(B, C) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}$,

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$$

(cf. III.1.1.iii).1,) appartient à $\overrightarrow{W}$; c'est-à-dire que

$$\overrightarrow{V} = \overrightarrow{W} ;$$

ce qui prouve le premier point de (a).

Le deuxième point de (a) est une conséquence immédiate de (d) en prenant A comme origine. Ceci prouve que (d) implique (a) .

(d) $\Rightarrow$ (b) Supposons donnés

$$A \text{ et } \overrightarrow{W} \text{ tels que } \mathcal{F} , \; A , \; \overrightarrow{W} \text{ vérifient (d).}$$

Pour tout $(A', B') \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}$,

$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB'} - \overrightarrow{AA'} \in \overrightarrow{W}$$

(cf. III.1.1.iii).1,) *i.e.*

$$\overrightarrow{V} := \left\{\overrightarrow{A'B'} \; ; \; A' \in \mathcal{F} \, , \; B' \in \mathcal{F}\right\} \subset \overrightarrow{W} \, .$$

Réciproquement un point A' de $\mathcal{F}$ étant fixé, pour tout $\overrightarrow{AB} \in \overrightarrow{W}$, il existe un unique point $B' \in \mathcal{E}$ tel que

$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$$

(cf. III.1.1.iii).†).) Or

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{AB'} & \underset{\text{(cf. III.1.1.iii).1,)}}{=} & \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} \\ & \underset{\text{(cf. III.1.3.3,)}}{=} & \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} \\ & \in & \overrightarrow{W} \, . \end{array}$$

D'après (d) , il existe donc $B'' \in \mathcal{F}$ tel que

$$\overrightarrow{AB''} = \overrightarrow{AB'} \, .$$

Comme $\mathcal{E}$ est un espace affine (cf. III.1.1.iii).†),) $B'' = B'$ *i.e.* $B' \in \mathcal{F}$. Il s'ensuit que

$$\overrightarrow{W} \subset \overrightarrow{V} \; ;$$

ce qui prouve finalement que

$$\overrightarrow{W} = \overrightarrow{V} \; ;$$

c'est-à-dire que (d) implique (b) .

Corollaire III.2.1 *Il résulte de la proposition III.2.1 qu'une partie $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ vérifiant l'une des quatre conditions équivalentes (a) , (b) , (c) ou (d) est un espace affine de direction vectorielle*

$$\overrightarrow{\mathcal{F}} := \left\{\overrightarrow{MN} \; ; \; M \in \mathcal{F} \, , \; N \in \mathcal{F}\right\}$$

(cf. III.1.1) où l'application

$$\overrightarrow{\bullet\bullet} : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \overrightarrow{\mathcal{F}}$$

est donnée par la restriction de l'application

$$\overrightarrow{\bullet\bullet} : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to \overrightarrow{\mathcal{E}} \, .$$

Définition III.2.2 i) On appelle *sous-espace affine de $\mathcal{E}$* une partie non-vide $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ vérifiant l'une des quatre conditions équivalentes de la proposition (cf. III.2.1.)

ii) On appelle *dimension* d'un sous-espace affine $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ sa dimension en tant qu'espace affine (cf. III.1.1.iv)) ; *i.e.* la dimension de sa direction vectorielle $\overrightarrow{\mathcal{F}}$.

Lemme III.2.3 *Étant donné un point A de $\mathcal{E}$ et un sous-espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{F}} \subset \overrightarrow{\mathcal{E}}$, il existe un unique sous-espace affine $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ tel que $A \in \mathcal{F}$ et $\mathcal{F}$ a pour direction vectorielle (cf. III.1.1.ii),) $\overrightarrow{\mathcal{F}}$.*

Preuve : Il est clair que

$$\mathcal{F}_0 \overset{:=}{\text{(cf. III.1.2,)}} A+\overrightarrow{\mathcal{F}} = \{A+\overrightarrow{v}\ ;\ \overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\mathcal{F}}\}$$

est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ contenant A et de direction $\overrightarrow{\mathcal{F}}$.

Si $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de direction $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ contenant A , pour tout $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\mathcal{F}}$, $A+\overrightarrow{v} \in \mathcal{F}$ car $\mathcal{F}$ est un espace affine (cf. III.1.1.iii).†).) Il s'ensuit que $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$.

Réciproquement, pour tout $B \in \mathcal{F}$, $\overrightarrow{AB} \in \overrightarrow{\mathcal{F}}$, par hypothèse. Il s'ensuit que

$$B \overset{=}{\text{(cf. III.1.2.4,)}} A+\overrightarrow{AB} \in \mathcal{F}_0 ,$$

c'est-à-dire que $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_0$; d'où, finalement, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0$.

Définition III.2.1 Pour $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$, et $A \in \mathcal{F}$, on dira, grâce au lemme III.2.3, que $\mathcal{F}$ est <u>le</u> *sous-espace affine* de $\mathcal{E}$ passant par A et de direction $\overrightarrow{\mathcal{F}}$; on le note

$$\mathcal{F} = A + \overrightarrow{\mathcal{F}} := \{A \overset{+}{\text{(cf. III.1.2,)}} \overrightarrow{u}\ ,\ \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{F}}\} . \qquad \text{III.2.1.1}$$

Corollaire III.2.2 *Deux sous-espaces affines $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ de $\mathcal{E}$ ayant même dimension sont égaux si et seulement si $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$.*

Exemple III.2.3 Les sous-espaces affines de dimension 0 s'identifient canoniquement aux points de $\mathcal{E}$ (cf. III.1.1.i).)

Théorème III.2.4 (Un théorème de structure pour les sous-espaces affines)

Étant donnés un espace affine $(\mathcal{E}, \overrightarrow{\mathcal{E}}, \overrightarrow{\bullet\bullet})$, deux points A et A' de $\mathcal{E}$

et deux sous-espaces vectoriels

$$\overrightarrow{\mathcal{F}} \text{ et } \overrightarrow{\mathcal{F}}' \text{ de } \overrightarrow{\mathcal{E}} ,$$

les conditions suivantes sont équivalentes :

a) Les <u>sous-ensembles (parties)</u> $A + \overrightarrow{\mathcal{F}}$ et $A' + \overrightarrow{\mathcal{F}}'$ (cf. III.2.1.1) sont égaux.

b) Les <u>*sous-espaces affines*</u> $(A + \overrightarrow{\mathcal{F}}, \overrightarrow{\mathcal{F}}, \overrightarrow{\bullet\bullet})$ *et* $(A' + \overrightarrow{\mathcal{F}}', \overrightarrow{\mathcal{F}}', \overrightarrow{\bullet\bullet})$ *sont égaux.*

c) Les sous espaces $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ *et* $\overrightarrow{\mathcal{F}}'$ *sont égaux et* $A' \in A + \overrightarrow{\mathcal{F}}$.

Preuve :
(b) $\Rightarrow$ (c) est une conséquence immédiate de la définition d'espace affine.
(c) $\Rightarrow$ (a) est une conséquence facile de la relation de Chasles (cf. III.1.1.iii).1.)
(a) $\Rightarrow$ (b) est une conséquence du corollaire III.2.1.

Définition III.2.1 On appellera *droite affine,* (resp. *plan affine*,) *de* $\mathcal{E}$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de dimension 1 , (resp. 2 .)

Définition III.2.2 On dit que deux sous-espaces affines $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ de $\mathcal{E}$ sont *parallèles* si $\overrightarrow{\mathcal{F}} \subset \overrightarrow{\mathcal{G}}$ ou $\overrightarrow{\mathcal{G}} \subset \overrightarrow{\mathcal{F}}$.

Proposition III.2.3 *Étant donnés un sous-espace affine* $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ *de* $\mathcal{E}$ *et* $A \in \mathcal{E}$ *un point de* $\mathcal{E}$ *, il existe un unique sous-espace affine* $\mathcal{G}$ *parallèle à* $\mathcal{F}$ *, contenant* A *et tel que* $\dim \mathcal{G} = \dim \mathcal{F}$ *(cf. III.1.1.iv)) ; c'est le sous-espace affine de* $\mathcal{E}$ *contenant* A *et de direction* $\overrightarrow{\mathcal{F}}$.

Preuve : Cette proposition est une conséquence immédiate du lemme III.2.3.

Proposition III.2.1 *L'intersection de deux sous-espaces affines de* $\mathcal{E}$ *est soit vide soit un sous-espace affine.*

III.3 . −Barycentres

Dans cette section, $\mathcal{E}$ est un K-espace affine (cf. III.1.1.)

Définition III.3.1 i) On appelle *point pondéré de* $\mathcal{E}$ un couple $(A, \lambda) \in \mathcal{E} \times K$. Le scalaire λ est appelé le *poids* ou la *masse.*

ii) Pour une famille

$$S \ := \ \{(A_i, \lambda_i)\,,_{\,1\,\leq\,i\,\leq\,r}\}$$

de points pondérés de $\mathcal{E}$, on appelle *masse totale du système* S le scalaire

$$|S| \ := \ |(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)| \ := \ \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \ .$$

Remarque III.3.2 Dans le cas où le corps K est le corps des réels $\mathbb{R}$ la masse totale d'un système de points pondérés peut parfaitement être négative.

Définition III.3.3 Étant donné un système

$$S \ := \ \{(A_i, \lambda_i)\,,_{\,1\,\leq\,i\,\leq\,r}\}$$

de points pondérés de $\mathcal{E}$, on appelle *fonction vectorielle de Leibniz associée au système* S l'application

$$\begin{array}{rccl} f_S : & \mathcal{E} & \to & \overrightarrow{\mathcal{E}} \\ & M & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \overrightarrow{MA_i} \ . \end{array}$$

Lemme III.3.4 *Soit f_S la fonction vectorielle de Leibniz associée à un système*

$$S \ := \ \{(A_i, \lambda_i)_{1\,\leq\,i\,\leq\,r}\}$$

de points pondérés. Si la masse totale (cf. III.3.1.ii),) est nulle, f_S est constante ; sinon f_S est bijective.

Preuve : Supposons que la masse totale

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i$$

est nulle. Pour deux points M et N de $\mathcal{E}$,

$$\begin{aligned} f_S(M) - f_S(N) &= \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \overrightarrow{MA_i} - \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \overrightarrow{NA_i} \\ &= \sum_{i=1}^{r} \lambda_i (\overrightarrow{MA_i} - \overrightarrow{NA_i}) \\ &= \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \overrightarrow{NM} \\ &= (\sum_{i=1}^{r} \lambda_i) \overrightarrow{NM} \\ &= \mathrm{Vect}\{0\} \ . \end{aligned}$$

Supposons maintenant que la masse totale n'est pas nulle. Soit O un point de $\mathcal{E}$ fixé. Pour tout $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{E}}$, l'équation d'inconnue M $f_S(M) = \overrightarrow{u}$ équivaut à

$$\begin{aligned} & & \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \overrightarrow{MA_i} &= \overrightarrow{u} \\ &\text{(cf. III.1.1.iii).1,)} \overset{\Leftrightarrow}{} & \sum_{i=1}^{r} \lambda_i (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA_i}) &= \overrightarrow{u} \\ &\Leftrightarrow & (\sum_{i=1}^{r} \lambda_i) \overrightarrow{OM} &= \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{u} \\ &\text{(cf. III.1.2,)} \overset{\Leftrightarrow}{} & M &= O + \frac{1}{\sum_{i=1}^{r} \lambda_i} [\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{u}] \ . \end{aligned}$$

Définition III.3.1 Étant donné un système S de points pondérés de masse totale non nulle, on appelle *barycentre du système* S l'unique antécédent $G := \mathrm{bar}(S)$ de $\mathrm{Vect}\{0\} = 0_{\overrightarrow{\mathcal{E}}}$ par la fonction vectorielle de Leibniz f_S associée au système S .

Remarque III.3.2 i) Le barycentre ne dépend pas de l'ordre des points.

ii) Si

$$S := \{(A_i, \lambda_i)_{1 \leq i \leq r}\}$$

est un système de points pondérés tel que $\lambda_r = 0$, le barycentre de S est aussi le barycentre de

$$S' := \{(A_i, \lambda_i)_{\, , \, 1 \leq i \leq r-1}\} \ .$$

Proposition III.3.3 (Propriétés du barycentre) *Soit*

$$S \ := \ \{(A_i, \lambda_i)_{1 \,\leq\, i \,\leq\, r}\}$$

un système de points pondérés, de masse totale non nulle.

i) $G_S = \text{bar}(S)$ *est le barycentre du système* S *si et seulement si pour tout point* M *de* $\mathcal{E}$ *,*

$$(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i)\overrightarrow{MG_S} \ = \ \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \overrightarrow{MA_i} \ .$$

ii) Pour tout élément $k \ \in \ K^*$ *, le barycentre de*

$$kS \ := \ \{(A_i, k\lambda_i)_{1 \,\leq\, i \,\leq\, r}\}$$

est le barycentre de S *.*

iii) Si $S = S_1 \cup S_2$ *avec* $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ *; si le barycentre* G_1 *de* S_1 *, (resp.* G_2 *de* S_2 *,) existe i.e. si la masse totale* $|S_1|$ *de* S_1 *, (resp.* $|S_2|$ *de* S_2 *,) est non nulle ; alors le barycentre* G *de* S *est le barycentre de* $\{(G_1, |S_1|) \ ; \ (G_2, |S_2|)\}$ *:*

$$\textit{bar}(S) \ = \ \textit{bar}(\{(\textit{bar}(S_1), |S_1|) \ ; (\textit{bar}(S_2), |S_2|)\}) \ .$$

Preuve : La preuve est un exercice.

Proposition III.3.1 *Supposons que* $\mathcal{E}$ *est un* $\mathbb{R}$*-espace affine. Étant donnés deux points* A *et* B *de* $\mathcal{E}$ *, pour un point* $M \ \in \ \mathcal{E}$ *il y a équivalence entre :*

a) Il existe $t \in [0, 1]$ *tel que* M *est le barycentre du système* $\{(A, t) \ ; \ (B, (1 - t))\}$ *:*

$$M \ = \ \textit{bar}(\{(A, T) \ ; \ (B, (1 - t))\}) \ ;$$

b) Il existe

$$(\alpha, \beta) \ \in \ \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \ , \ (\alpha, \beta) \ \neq \ (0, 0) \ \textit{tel que}$$

M *est le barycentre de* $\{(A, \alpha) \ ; \ (B, \beta)\}$ *:*

$$M \ = \ \textit{bar}(\{(A, \alpha) \ ; \ (B, \beta)\}) \ ;$$

Supposons que $\mathcal{E}$ ***est muni d'une structure euclidienne*** $\langle \bullet, \bullet \rangle$ ***pour laquelle on note*** δ ***la distance euclidienne (cf. III.1.3.ii).)***

c) M *vérifie*

$$\delta(A, M) + \delta(M, B) \ = \ \delta(A, B) \ .$$

Preuve : L'équivalence entre (a) et (a) résulte de III.3.3.ii).
L'équivalence entre (c) et l'une des assertions (a) ou (b) se déduit de III.0.4.

Définition III.3.1 Si $\mathcal{E}$ est un $\mathbb{R}$-espace affine, étant donnés deux points A et B de $\mathcal{E}$, on appelle *segment d'extrémités A et B* et on note $[A, B]$ l'ensemble des points $M \in \mathcal{E}$ vérifiant l'une des deux propriétés équivalentes III.3.1.a) ou III.3.1.b).

Remarque III.3.2 i) Si $(\mathcal{E}, \langle \bullet, \bullet \rangle)$ est euclidien (cf. III.1.3) le segment $[A, B]$ est aussi l'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ vérifiant III.3.1.c), cependant la notion de segment a un sens dans un $\underline{\mathbb{R}}$-espace affine, non nécessairement muni d'une structure euclidienne.

ii) Pour A et B deux points d'un espace affine $\mathcal{E}$, le segment $[A, B]$ est convexe. C'est le plus petit (au sens de l'inclusion) convexe contenant A et B encore appelé *enveloppe convexe* des points A et B .

Définition III.3.3 i) Si

$$S := \{(A_i, \lambda_i)_{1 \leq i \leq r}\}$$

est un système de points pondérés, tel que les λ_i sont égaux entre eux et non nuls, on dit que le barycentre du système S est l'*isobarycentre* des points $A_1, \ldots, A_r$.

ii) L'isobarycentre de deux points A et B est appelé *milieu des points A et B* , ou *milieu du segment* $[A, B]$ dans le cas d'un $\mathbb{R}$-espace affine.

iii) L'isobarycentre de trois points ABC est appelé *centre de gravité du triangle A, B, C* .

Remarque III.3.4 i) On remarque qu'on peut toujours parler de l'isobarycentre de deux points A et B qu'on appelle milieu ;

ii) Dans un $\mathbb{R}$-espace affine, la notion de segment ayant un sens, on parlera du milieu du segment $[A, B]$;

iii) dans le cas où $(\mathcal{E}, \langle \bullet, \bullet \rangle)$ est un espace euclidien, le milieu I du segment $[A, B]$ est l'unique point du segment $[A, B]$ tel que

$$\delta(A, I) = \delta(B, I)$$

(où δ désigne la distance euclidienne sur $\mathcal{E}$.)

Proposition III.3.5 *Étant donné un ensemble fini S de points de $\mathcal{E}$, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) Pour tout point $O \in S$ l'ensemble

$$\{\overrightarrow{OA},\ A \in S \setminus \{O\}\} \subset \overrightarrow{\mathcal{E}}$$

est un système libre de vecteurs de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$.

b) Il existe un point $O \in S$, tel que l'ensemble

$$\{\overrightarrow{OA},\ A \in S \setminus \{O\}\} \subset \overrightarrow{\mathcal{E}}$$

est un système libre de vecteurs de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$.

Preuve : L'implication (a) $\Rightarrow$ (b) étant immédiate, la réciproque seule demande une preuve.

Soit donc donné un point $O \in S$, tel que l'ensemble des $\overrightarrow{OA}$ $(A \neq O\ ,\ A \in S)$ soit un système libre de vecteurs de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$. Pour tout $\Omega \in S$, supposons qu'il existe des scalaires $\lambda_{A\ ,\ A \in S \setminus \{\Omega\}} \in K$, tels que

$$\begin{array}{llrcl}
 & & \sum_{A \in S\setminus\{\Omega\}} \lambda_A \overrightarrow{\Omega A} & = & 0_{\overrightarrow{\mathcal{E}}} \\
\overset{\Leftrightarrow}{\text{(cf. III.1.1.iii).1,)}} & & \sum_{A \in S\setminus\{\Omega\}} \lambda_A (\overrightarrow{\Omega O} + \overrightarrow{OA}) & = & \mathrm{Vect}\{0\} \\
\Leftrightarrow & & (\sum_{A \in S\setminus\{\Omega\}} \lambda_A)\overrightarrow{\Omega O} + \sum_{A \in S\setminus\{\Omega;O\}} \lambda_A \overrightarrow{OA} & = & \mathrm{Vect}\{0\} \\
\Leftrightarrow & & \sum_{A \in S\setminus\{\Omega;O\}} \lambda_A \overrightarrow{OA} - (\sum_{A \in S\setminus\{\Omega\}} \lambda_A)\overrightarrow{O\Omega} & = & \mathrm{Vect}\{0\}
\end{array}$$

Ceci implique, en utilisant l'hypothèse, que :

$$\forall\, A \neq O \text{ et } A \neq \Omega,\ \lambda_A = 0 \textit{ et } \sum_{A \in S,\ A \neq \Omega} \lambda_A = 0\,.$$

On tire de ces égalités que $\lambda_O = 0$. Il s'ensuit que pour tout $A \in S,\ A \neq \Omega,\ \lambda_A = 0$, c'est-à-dire que l'ensemble des $\overrightarrow{\Omega A}$ pour $A \in S \setminus \{\Omega\}$ forme un système libre de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$.

Définition III.3.1 Étant donné un ensemble fini S de points de $\mathcal{E}$, on dit que les points de S sont *affinement indépendants* (où que le système S est *affinement indépendant,*) si l'une des deux propriétés III.3.5.a) ou III.3.5.b) est satisfaite ; sinon, on dit que les points de S sont *affinement liés* (ou que S est *affinement lié.*)

Proposition III.3.2 *Soit* $(A_0, \ldots, A_r)$ *un* $r+1$*-uplet de points de* $\mathcal{E}$ *. À tout* $r+1$*-uplet* $(\lambda_0, \ldots, \lambda_r) \in K^{r+1}$ *, tel que*

$$|(\lambda_0, \ldots, \lambda_r)| \ := \ \sum_{i=0}^{r} \lambda_i \ \neq \ 0 \ ,$$

on associe le barycentre

$$G(\lambda_0, \ldots, \lambda_r) \ := \ \mathrm{bar}(\{(A_0, \lambda_0) \ ; \ \ldots \ ; \ (A_r, \lambda_r)\})$$

du système de points pondérés

$$\{(A_i, \lambda_i) \ , _{0 \,\leq\, i \,\leq\, r}\} \ .$$

On définit alors une application

$$G \ : \ K^{r+1} \setminus \mathcal{H} \ \to \ \mathcal{E} \ ,$$

où $\mathcal{H}$ *est le sous-ensemble (hyperplan) de* K^{r+1} *défini par* $\displaystyle\sum_{i=0}^{r} \lambda_i \ = \ 0$.

i) L'image de l'application G *définie ci-dessus est un sous-espace affine de* $\mathcal{E}$ *(cf. III.2.2) noté aff*$(A_0, \ldots, A_r)$.

ii) Le sous-espace aff$(A_0, \ldots, A_r)$ *est le plus petit sous-espace affine de* $\mathcal{E}$ *contenant les points* $A_0, \ldots, A_r$ *, c'est-à-dire que tout sous-espace affine* $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ *contenant les poins* $A_i \ , _{0 \,\leq\, i \,\leq\, r}$ *contient aff*$(A_0, \ldots, A_r)$.

iii) Si les points $A_i \ , _{0 \,\leq\, i \,\leq\, r}$ *sont affinement indépendants*
(cf. III.3.1,) le sous-espace affine aff$(A_0, \ldots, A_r)$ *est de dimension* r.

iv) Pour tout sous-espace affine $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$, *de dimension* r, *et tout* $r+1$*-uplet* $A_0, \ldots, A_r$ *de points de* $\mathcal{F}$, *affinements indépendants (cf. III.3.1,)*

$$\mathcal{F} \ = \ \mathrm{aff}(A_0, \ldots, A_r) \ .$$

v) Étant donné un $r+1$*-uplet de points affinement indépendants* $(A_0, \ldots, A_r)$, *pour tout point* $M \in$ *aff*$(A_0, \ldots, A_r)$, *la fibre* $G^{-1}(M)$ *de* G *au-dessus de* M *est une droite (vectorielle) de* K^{r+1} *non contenue dans* $\mathcal{H}$. *Si l'on note* $\mathcal{H}_1$ *le sous-ensemble (hyperplan affine) de* K^{r+1} *défini par* $\displaystyle\sum_{i=0}^{r} \lambda_i \ = \ 1$, $G^{-1}(M) \cap \mathcal{H}_1$ *est un singleton* $(\lambda_0(M), \ldots, \lambda_r(M))$.

Preuve :

i) Pour tout $M \in$ aff$(A_0, \ldots, A_r) := \operatorname{Im} G$, il existe un $r+1$-uplet $(\lambda_0, \ldots, \lambda_r)$ tel que $\sum_{i=0}^{r} \lambda_i \neq 0$, et

$$\begin{array}{rrcl} & \sum_{i=0}^{r} \lambda_i \overrightarrow{A_i M} & = & 0 \\ \overset{\Leftrightarrow}{\text{(cf. III.1.1.iii).1,)}} & (\sum_{i=0}^{r} \lambda_i)\overrightarrow{A_0 M} & = & \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \overrightarrow{A_0 A_i} \\ \overset{\Leftrightarrow}{\text{(cf. III.1.2,)}} & M & = & A_0 + \frac{1}{\sum_{i=0}^{r} \lambda_i} \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \overrightarrow{A_0 A_i}\ , \end{array} \qquad 1$$

ce qui prouve que aff$(A_0, \ldots, A_r)$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ d'après le critère III.2.1.d).

ii) Est immédiat à vérifier.

iii) Les points $(A_0, \ldots, A_r)$ sont affinement indépendants si et seulement si $\overrightarrow{A_0 A_i}_{\,,\,0 \leq i \leq r}$ est un système libre. La formule i).1 permet de conclure.

iv) Étant donné un sous-espace affine $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$, de dimension r, pour tout $r+1$-uplet $(A_0, \ldots, A_r)$ de points de $\mathcal{F}$ affinement indépendants, aff$(A_0, \ldots, A_r)$ est un sous-espace affine de dimension r d'après (iii) inclus dans $\mathcal{F}$ d'après (ii). On conclut finalement grâce au corollaire III.2.2.

v) Étant donné un $r+1$ uplet $(A_0, \ldots, A_r)$ de points affinement indépendants de $\mathcal{E}$, pour tout point $M \in$ aff$(A_0, \ldots, A_r)$, notons $L := (\lambda_0, \ldots, \lambda_r)$ un antécédent de M par G. D'après la proposition III.3.3.ii), pour tout $k \in K$, $kL \in G^{-1}(M)$. Ceci permet de conclure que $G^{-1}(M)$ est un cône dans K^{r+1}, c'est-à-dire une réunion de droites. Le fait que ce cône soit réduit à une seule droite résulte du lemme III.3.6 qu'il est intéressant de dégager.

Lemme III.3.6 *Étant donné un $r+1$-uplet $(A_0, \ldots, A_r)$ de points affinement indépendants (cf. III.3.1,) de $\mathcal{E}$, s'il existe deux $r+1$-uplets*

$$(\lambda_0, \ldots, \lambda_r) \text{ et } (\lambda'_0, \ldots, \lambda'_r)\ , \ \textit{tels que}$$

$$G := \textit{bar}(\{(A_0, \lambda_0)\ ;\ \ldots\ ;\ (A_r, \lambda_r)\}) = \textit{bar}(\{(A_0, \lambda'_0)\ ;\ \ldots\ ;\ (A_r, \lambda'_r)\})$$

alors il existe un élément $k \in K^\times$ tel que pour tout $0 \leq i \leq r$, $\lambda'_i = k\lambda_i$.

Preuve : Sous les hypothèses de l'énoncé, on a :

$$\overrightarrow{A_0G} = \frac{1}{\sum_{i=0}^{r} \lambda_i} \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \overrightarrow{A_0A_i} = \frac{1}{\sum_{i=0}^{r} \lambda'_i} \sum_{i=1}^{r} \lambda'_i \overrightarrow{A_0A_i} .$$

Or les points $A_0, \ldots, A_r$ étant supposés affinement indépendants, le système $\overrightarrow{A_0A_i}\,_{,\, 1 \leq i \leq r}$ est libre. Par conséquent la décomposition de $\overrightarrow{A_0G}$ dans ce système est unique. Il s'ensuit que pour tout $1 \leq i \leq r$,

$$\lambda'_i = \frac{\sum_{i=0}^{r} \lambda'_i}{\sum_{i=0}^{r} \lambda_i} \lambda_i . \qquad \text{III.3.1}$$

Pour établir la même relation sur λ'_0 et λ_0 il suffit de prendre un autre point que A_0 comme origine.

Définition III.3.2 i) Étant donné un $r+1$-uplet $(A_0, \ldots, A_r)$ de points de $\mathcal{E}$, le sous-espace affine aff$(A_0, \ldots, A_r)$ (cf. III.3.2.i)) est appelé *sous-espace affine de $\mathcal{E}$ engendré par les points $A_i\,_{,\, 0 \leq i \leq r}$* .

ii) Étant donné un $r+1$-uplet $(A_0, \ldots, A_r)$ de points affinement indépendants (cf. III.3.1,) de $\mathcal{E}$, pour tout point $M \in$ aff$(A_0, \ldots, A_r)$, l'unique $\overline{r + 1\text{-uplet}}$ $(\lambda_0(M), \ldots, \lambda_r(M))$ tel que

M soit le barycentre du système
$\{(A_0, \lambda_0(M)),\ \ldots,\ (A_r, \lambda_r(M))\}$ (cf. III.3.2.v) ,)
et $|(\lambda_0(M)), \ldots, \lambda_r(M))| = 1$

est appelé *système de coordonnées barycentriques de M dans le repère affine* $(A_0, \ldots, A_r)$.

III.4 . −Droites du plan

Dans cette section $\mathcal{E}$ est un K-espace affine de dimension supérieure ou égale à 1 (cf. III.1.1.iv).)

Définition III.4.1 On dit que trois points A, B, C de $\mathcal{E}$ sont *alignés* si le système $S := \{A; B; C\}$ est affinement lié (cf. III.3.1.)

Proposition III.4.2 *Étant donné un sous-ensemble $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}$ de $\mathcal{E}$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) $\mathcal{D}$ est une droite affine de $\mathcal{E}$ (cf. III.2.1.)

b) $\mathcal{D}$ est non vide et pour tout couple $(A, B) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D}$, $A \neq B$, $\mathcal{D}$ est l'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ tels que A, B, M soient alignés.

c) Il existe un couple de points $(A, B) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}$, $A \neq B$ tel que $\mathcal{D}$ soit l'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ tels que A, B, M sont alignés.

d) $\mathcal{D}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de dimension supérieure ou égale à 1 (cf. III.2.2) et pour tout triplet $(A, B, C) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D} \times \mathcal{D}$, les points A, B, C sont alignés.

e) L'ensemble $\mathcal{D}$ est non vide et pour tout couple $(A, B) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D}$, $A \neq B$, $\mathcal{D}$ est l'ensemble des barycentres de systèmes de points pondérés $\{(A, \alpha) \; ; \; (B, \beta)\}$ pour $(\alpha, \beta) \in K \times K$, $\alpha + \beta \neq 0$ (cf. III.3.1.)

f) Il existe deux points distincts A et B de $\mathcal{E}$ tels que $\mathcal{D}$ est l'ensemble des barycentres des systèmes de points pondérés $\{(A, \alpha) \; ; \; (B, \beta)\}$ (cf. III.3.1,) pour $(\alpha, \beta) \in K \times K$ et $\alpha + \beta \neq 0$.
Si $\mathcal{E}$ est euclidien (cf. III.1.3.)

g) $\mathcal{D}$ est un sous-espace affine de dimension supérieure ou égale à 1 de $\mathcal{E}$ et pour tout triplet $(A, B, C) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D} \times \mathcal{D}$,

$$\begin{array}{rcll} \delta(A,B)+\delta(B,C) & = & \delta(A,C) & \text{ou} \\ \delta(B,C)+\delta(C,A) & = & \delta(B,A) & \text{ou} \\ \delta(C,A)+\delta(A,B) & = & \delta(C,B) & \end{array} \qquad 1$$

h) Il existe deux points distincts A et B dans $\mathcal{E}$ tels que $\mathcal{D}$ soit l'ensemble des points C de $\mathcal{E}$ vérifiant g).1.

Preuve :

(a) $\Rightarrow$ (b) Si $\mathcal{D}$ est une droite de $\mathcal{E}$, pour tout point A de $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}$ est la (cf. III.2.1,) droite affine passant par A et de direction $\overrightarrow{\mathcal{D}}$. Pour tout $B \in \mathcal{D}$, $B \neq A$, $\overrightarrow{AB} \neq \mathrm{Vect}\{0\}$, *i.e.* $\overrightarrow{AB}$ est une base de $\overrightarrow{\mathcal{D}}$ puisque $\mathcal{D}$ est une droite. Pour tout M dans $\mathcal{D}$, il existe $\lambda \in K$ tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB}$. *i.e.* A, B, M sont alignés.

Réciproquement si A, B, M sont alignés, comme $\overrightarrow{AB} \neq \mathrm{Vect}\{0\}$, il existe $\lambda \in K$ tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB}$; *i.e.*

$$\overrightarrow{AM} \in \overrightarrow{\mathcal{D}} \overset{\text{(cf. III.2.1.d),)}}{=} \{\overrightarrow{AP} \; ; \; P \in \mathcal{D}\} \; ;$$

d'où $M \in \mathcal{D}$.

(b) $\Rightarrow$ (c) Est évident.

(c) $\Rightarrow$ (d) Soient A et B dans $\mathcal{D}$ tels que la condition (c) soit vérifiée. Il est facile de voir que, comme $\overrightarrow{AB} \neq \mathrm{Vect}\{0\}$,

$$\{\overrightarrow{AM} \; ; \; M \in \mathcal{D}\} = K\overrightarrow{AB} \, ,$$

i.e. d'après III.2.1.d), $\mathcal{D}$ est un sous-espace affine de dimension 1 de $\mathcal{E}$. Par ailleurs, il n'est pas difficile de vérifier que tout triplet (P, Q, R) de points de $\mathcal{D}$ est constitué de points alignés.

(d) $\Rightarrow$ (a) Il ne reste qu'à vérifier que $\mathcal{D}$ est de dimension 1 . En prenant deux points distincts A et B de $\mathcal{D}$ –ce qui est possible puisque $\mathcal{D}$ est un sous-espace affine de dimension non nulle de $\mathcal{E}$,– tout point M de $\mathcal{D}$ est tel que A, B, M sont alignés. Il s'ensuit que

$$\overrightarrow{\mathcal{D}} \overset{\text{(cf. III.2.1.d),)}}{=} \{\overrightarrow{AM} \; ; \; M \in \mathcal{D}\} = K\overrightarrow{AB} \, .$$

- L'équivalence entre (e) , (resp. (f) ,) et l'une des trois assertions (a) , (b) ou (d) est laissée en exercice : c'est un cas particulier de la proposition III.3.2.
- Pour montrer que (g) et (h) sont équivalentes à (a) , (b) ou (d) dans le cas où $\mathcal{E}$ est euclidien, se reporter à III.0.4.

Corollaire III.4.1 *Étant donnés deux points A et B de $\mathcal{E}$ distincts, il existe une unique droite $\mathcal{D}$ de $\mathcal{E}$ contenant A et B .*

Preuve : Ce n'est qu'une reformulation de III.4.2.a) $\Leftrightarrow$ III.4.2.b).

Définition III.4.1 Étant donnée une droite $\mathcal{D}$, pour tout couple (A, B) de points distincts de $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}$ étant l'unique droite de $\mathcal{E}$ contenant A et B (cf. III.4.1,) on dit que $\mathcal{D}$ est *la droite passant par les points A et B* et on note

$$(AB) := \mathcal{D} . \qquad \text{III.4.1.1}$$

Définition III.4.2 Pour une droite $\mathcal{D}$ donnée, tout élément $\overrightarrow{u}$ non nul de $\overrightarrow{\mathcal{D}}$ *i.e.* toute base de $\overrightarrow{\mathcal{D}}$ est appelé *vecteur directeur de $\mathcal{D}$* .

Remarque III.4.3 i) Pour une droite $\mathcal{D}$ donnée, et pour tout couple $(A, B) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D}$, $A \neq B$, $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ (cf. III.2.1.a).)

ii) Pour deux points distincts A et B de $\mathcal{E}$, si $\mathcal{D} := (AB)$, $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

iii) Deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles (cf. III.2.2,) si et seulement si un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}'$, si et seulement si tout vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}'$.

Remarque III.4.4 i) Étant donnés deux points distincts A et B d'un $\mathbb{R}$-espace affine $\mathcal{E}$, on remarque que le segment $[A, B]$ (cf. III.3.1,) est un sous-ensemble de la droite (AB) .
Attention : Ce n'est pas un sous-espace affine de (AB) non plus que de $\mathcal{E}$.

ii) Si $(\mathcal{E}, \langle\bullet, \bullet\rangle)$ est un espace affine euclidien (cf. III.1.3,) on peut donner plusieurs définitions équivalentes du milieu I d'un segment $[A, B]$ (cf. III.3.3.ii)) :

[α] I est l'unique point de la droite (AB) tel que

$$\delta(A, I) = \delta(B, I) ,$$

(où δ désigne la distance euclidienne sur $\mathcal{E}$ (cf. III.1.3.ii)) ;)

[β] I est l'unique point tel que A, I, B soient alignés et

$$\delta(A, I) = \delta(B, I) .$$

Définition III.4.5 Deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont *sécantes* si elles possèdent un unique point commun.

Remarque III.4.6 On peut donner, dans un espace affine de dimension supérieure ou égale à 3, des exemples de droites non parallèles (cf. III.2.2) mais non sécantes. Le cas de la dimension 2 est particulier (cf. III.4.3.) On pourra chercher à généraliser ces résultats en étudiant la position relative de deux sous-espaces affines $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ de $\mathcal{E}$ en comparant notamment $\dim \mathcal{F} + \dim \mathcal{F}'$ et $\dim \mathcal{E}$. Néanmoins la proposition suivante reste vraie quelle que soit la dimension $d \geq 1$ de $\mathcal{E}$.

Proposition III.4.7 *i) Étant donnés une droite $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}$ et $\mathcal{E}$ et $A \in \mathcal{E}$ un point de $\mathcal{E}$, il existe une unique droite passant par A et parallèle à $\mathcal{D}$.*

ii) Étant données deux droites parallèles $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, toute droite parallèle à $\mathcal{D}$ est parallèle à $\mathcal{D}'$.

Ceci revient à dire que la relation de parallélisme est une relation d'équivalence.

Preuve : Cette proposition n'est qu'un cas particulier de la proposition III.2.3.

Dans la suite, $\mathcal{P}$ est un plan affine (cf. III.2.1) ; *i.e.* un K-espace affine de dimension 2 .

Définition III.4.1 i) Si la direction $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ de $\mathcal{P}$ (cf. III.1.1.ii),) est munie d'une structure euclidienne (cf. I.2.3,) on dit que $\mathcal{P}$ est un *plan affine euclidien.*

ii) Si de plus, la direction $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ de $\mathcal{P}$ est munie d'une orientation (cf. II.1.8,) on dit que $\mathcal{P}$ est un *plan affine euclidien orienté.*

Exemple III.4.2 L'ensemble $\mathbb{R}^2$ des couples de nombres réels, est un espace affine d'espace vectoriel sous-jacent $\mathrm{Vect}\{\mathbb{R}^2\} := (\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ qui est de dimension 2 . Or $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ possède une base dite canonique formée des vecteurs $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. Cette base définit une structure euclidienne canonique (cf. I.2.2,) qui est l'unique structure euclidienne sur $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ telle que la base $(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix})$ soit orthonormée (cf. I.2.2.) De plus la base canonique donne une orientation à $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ (cf. II.1.9.)

Lorsqu'on parlera de $\mathbb{R}^2$ *euclidien,* il sera implicitement muni des structures rappelées ci-dessus. On dira souvent même *le plan affine euclidien.*

Proposition III.4.3 *Deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ d'un* <u>plan</u> affine *$\mathcal{P}$ sont :*
- *soit parallèles et disjointes ;*
- *soit confondues (ce qui est un cas particulier de parallélisme) ;*
- *soit sécantes.*

Preuve : Supposons donné O , (resp. O' ,) un point de $\mathcal{D}$, (resp. $\mathcal{D}'$,) et $\overrightarrow{u}$, (resp. $\mathrm{Vect}\{u'\}$,) un vecteur directeur de $\mathcal{D}$, (resp. $\mathcal{D}'$.)

Il existe un point M appartenant à $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}'$ si et seulement si il existe un couple (k, k') d' éléments de K tel que :

$$\begin{array}{rl} \exists (k,k') \mid & \left\{\begin{array}{lcl} M & = & O + k\overrightarrow{u} \\ M & = & O' + k'\mathrm{Vect}\{u'\} \end{array}\right\} \\ \Leftrightarrow \ \exists (k,k') \mid & \left\{\begin{array}{lcl} \overrightarrow{OM} & = & k\overrightarrow{u} \\ \overrightarrow{O'M} & = & k'\mathrm{Vect}\{u'\} \end{array}\right\} \\ \Leftrightarrow \ \exists (k,k') \mid & \left\{\begin{array}{lcl} \overrightarrow{OM} & = & k\overrightarrow{u} \\ \overrightarrow{OO'} & = & k\overrightarrow{u} - k'\mathrm{Vect}\{u'\} \end{array}\right\} . \end{array}$$

Or, si les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas parallèles, $(\overrightarrow{u}, \mathrm{Vect}\{u'\})$ est un système libre de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$. Il se trouve qu'il est aussi générateur puisque $\dim \mathcal{P} = 2$. Par conséquent il existe un unique couple $(k, k') \in K \times K$, tel que

$$\overrightarrow{OO'} \ = \ k\overrightarrow{u} - k'\mathrm{Vect}\{u'\} \ .$$

L'intersection $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}'$ est donc le singleton

$$\{O + k\overrightarrow{u}\} \ = \ \{O' + k'\mathrm{Vect}\{u'\}\} \ .$$

Définition III.4.1 Si $(\mathcal{P}, \langle \bullet, \bullet \rangle)$ est un plan affine euclidien, on dit que deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont *perpendiculaires* si

$$\overrightarrow{\mathcal{D}} \ = \ \mathrm{Vect}\{D'\}^{\perp} \ .$$

Remarque III.4.2 i) La proposition III.4.3 a pour conséquence que deux droites perpendiculaires sont sécantes.

ii) Dans un plan affine euclidien $(\mathcal{P}, \langle \bullet, \bullet \rangle)$ il existe une unique perpendiculaire à une droite $\mathcal{D}$ donnée passant par un point $A \in \mathcal{P}$ (cf. III.2.1) ; on parlera de *la perpendiculaire à* $\mathcal{D}$ *passant par* A .

Définition III.4.3 Dans un plan affine euclidien $(\mathcal{P}, \langle \bullet, \bullet \rangle)$ on appellera *médiatrice de deux points distincts* A *et* B ou *médiatrice du segment* $[A, B]$ (cf. III.3.1,) l'ensemble des points M de $\mathcal{P}$ tels que

$$\delta(A, M) \ = \ \delta(B, M) \ ,$$

(où δ désigne la distance euclidienne sur $\mathcal{P}$ (cf. III.1.3.ii).))

Proposition III.4.4 *Dans un plan affine euclidien* $(\mathcal{P}, \langle \bullet, \bullet \rangle)$ *, la médiatrice de deux points distincts* A *et* B *est la perpendiculaire à* (AB) *passant par le milieu* I *de* $[A, B]$.

Preuve : Pour tout $M \in \mathcal{P}$,

$$\begin{aligned} \delta(A, M)^2 - \delta(B, M)^2 \ &= \ \langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM} \rangle - \langle \overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BM} \rangle \\ &= \ \langle \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} \rangle \\ &= \ \langle \overrightarrow{AB}, 2\overrightarrow{MI} \rangle \end{aligned}$$

ce qui prouve l'équivalence.

Théorème III.4.1 (Théorème de Thalès) *Soient trois points distincts alignés O, A, B (cf. III.4.1,) et deux points A', B' tels que O, A', B' soient alignés et A, O, A' ne soient pas alignés.*

Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :

a) Il existe $k \in K$ tel que

$$\left\{\begin{array}{rcl} \overrightarrow{OB} & = & k\overrightarrow{OA} \\ \overrightarrow{OB'} & = & k\overrightarrow{OA'} \\ \overrightarrow{BB'} & = & k\overrightarrow{AA'} \end{array}\right\} . \tag{1}$$

b) Les droites (AA') et (BB') sont parallèles (cf. III.2.2.)

Preuve : Le fait que (a) implique (b) résulte de la troisième égalité de III.4.1.a).1 (qui est une conséquence des deux premières.)

Réciproquement si (AA') et (BB') sont parallèles (cf. III.2.2) ces deux droites ont même espace vectoriel sous-jacent (même direction.) Ce dernier étant une droite, $\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{BB'}$ sont liés. Puisque A, O, A' ne sont pas alignés $\overrightarrow{AA'} \neq 0$. Il s'ensuit qu'il existe $k \in K$ tel que

$$\overrightarrow{BB'} = k\overrightarrow{AA'} .$$

Par ailleurs, O, A, B , (resp. O, A', B' ,) étant alignés, il existe $l \in K$, (resp. $l' \in K$,) tel que :

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{OB} & = & l\overrightarrow{OA} \\ \overrightarrow{OB'} & = & l'\overrightarrow{OA'} , \end{array}$$

(on a en effet également $\overrightarrow{OA} \neq \mathrm{Vect}\{0\}$ et $\overrightarrow{OA'} \neq \mathrm{Vect}\{0\}$.)

Il en résulte que

$$\begin{array}{rcl} k\overrightarrow{OA'} - k\overrightarrow{OA} & = & k\overrightarrow{AA'} \\ & = & \overrightarrow{BB'} \\ & = & \overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OB} \\ & = & l'\overrightarrow{OA'} - l\overrightarrow{OA} . \end{array}$$

Or A, O, A' n'étant pas alignés, $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'})$ est une base de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$. La décomposition du vecteur $\overrightarrow{BB'}$ dans cette base étant unique, il en résulte que

$$l = k = l' .$$

Remarque III.4.1 On pourrait chercher à donner une preuve de la réciproque du théorème de Thalès en utilisant les propositions III.4.7 et III.4.3.

On confrontera ces arguments à la preuve des propositions III.4.2 et IV.2.4.

Proposition III.4.2 *Étant donnés quatre points A, B, C, D, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) A, B, D, C forment un parallélogramme (cf. III.1.1.)

b) Trois des quatre points A, B, C, D sont non alignés (cf. III.4.1) et les droites (AB) et (CD) , (resp. (AC) et (BD) ,) sont parallèles (cf. III.2.2.)

c) Trois des quatre points A, B, C, D sont non alignés et les segments (cf. III.3.1) $[A, D]$ et $[B, C]$ ont même milieu (cf. III.3.3.ii).)

Preuve :

(a) $\Rightarrow$ (b) est immédiat.

(a) $\Leftrightarrow$ (c) est une application facile de la relation de Chasles (cf. III.1.1.iii).1.)

(b) $\Rightarrow$ (a) Posons D' l'unique point de $\mathcal{P}$ tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD'}$ (cf. III.1.1.iii).†).) Par conséquent, (AB) et (CD') sont parallèles (cf. III.2.2) ; Par ailleurs, d'après III.1.1, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD'}$; il s'ensuit donc que (AC) et (BD') sont parallèles. Il résulte de la proposition III.4.7.i) que $(BD') = (BD)$. Or, par hypothèse, les points A, B, C ne sont pas alignés, c'est-à-dire que les droites (AB) et (AC) ne sont pas parallèles. Il s'ensuit, d'après la proposition III.4.7.ii), que les droites $(BD) = (BD')$ et (CD) ne sont pas parallèles, et donc qu'elles sont sécantes d'après la proposition III.4.3. Or

$$D' \in (BD') \cap (CD) = (BD) \cap (CD)$$

et $D \in (BD) \cap (CD) = (BD') \cap (CD)$ d'où $D = D'$.

Remarque III.4.1 On remarque qu'on aurait pu donner une preuve du point (b) $\Rightarrow$ (a) de la démonstration de la proposition III.4.2 analogue à celle de la réciproque du théorème de Thalès (cf. III.4.1.) sans utiliser la proposition III.4.3.

Il faut remarquer que l'argument principal de la preuve de la proposition III.4.3 et de la réciproque du théorème de Thalès, telle qu'elle est donnée ici est l'unicité de la décomposition d'un vecteur dans une base.

Proposition III.4.2 *Supposons que $\mathcal{P}$ est un plan* <u>*euclidien*</u> *(cf. III.4.2.) Étant donnés deux points distincts A et B de $\mathcal{P}$,*

$$(AB) = \{M \in \mathcal{P} \mid \angle\overrightarrow{MA}\overrightarrow{MB} = \hat{\pi} \text{ ou } \hat{0}\} ,$$

(resp.

$$[A, B] = \{M \in \mathcal{P} \mid \angle\overrightarrow{MA}\overrightarrow{MB} = \hat{\pi} \;)$$

(cf. II.5.1.ii).)