IV . −Applications affines, isométries d'un plan euclidien

IV.1 . −Applications affines

Dans cette section K est un corps.

Proposition IV.1.1 *Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ des K-espaces affines (cf. III.1.1) Pour une application $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) Il existe une application linéaire (un morphisme de K-espaces vectoriels) $\overrightarrow{f} : \overrightarrow{\mathcal{E}} \to \overrightarrow{\mathcal{F}}$ telle que pour tout couple $(A, B) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}$,

$$\overrightarrow{f(A)f(B)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AB}) . \qquad 1$$

b) Pour tout point $A \in \mathcal{E}$, il existe une application linéaire $\phi_A : \overrightarrow{\mathcal{E}} \to \overrightarrow{\mathcal{F}}$ telle que

$$\forall \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{E}} , f(A + \overrightarrow{u}) = f(A) + \phi_A(\overrightarrow{u}) . \qquad 1$$

Preuve :

- Le fait que (a) implique (b) est immédiat.
- Réciproquement pour tout $A \in \mathcal{E}$ fixé et tout $B \in \mathcal{E}$, $f(B) = f(A) + \phi_A(\overrightarrow{AB})$ équivaut à

  $$\overrightarrow{f(A)f(B)} \overset{=}{\text{(cf. III.1.2,)}} \phi_A(\overrightarrow{AB}) .$$

  Pour prouver que (b) implique (a) il suffit donc de montrer que

  $$\phi_A \ \underline{\text{ne dépend pas de}}\ A .$$

  Soient A et B dans $\mathcal{E}$. Pour tout $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{E}}$, il existe un unique couple $(C, D) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}$ tel que

  $$\begin{aligned} C &:= A + \overrightarrow{u} \\ D &:= B + \overrightarrow{u} \end{aligned}$$

(cf. III.1.1.iii).†),) (cf. III.1.2.) Il s'ensuit que

$$\begin{array}{rcl} f(B)+\phi_B(\overrightarrow{u}) & \overset{=}{\text{(b)}} & f(B+\overrightarrow{u}) \\ & = & f(D) \\ & \overset{=}{\text{(cf. III.1.2.4,)}} & f(A+\overrightarrow{AD}) \\ & \overset{=}{\text{(cf. III.1.1.iii).1,)}} & f[A+(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD})] \\ & \overset{=}{\text{(cf. III.1.3.3,)}} & f[A+(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB})] \\ & \overset{=}{\text{(b)}} & f(A)+\phi_A(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{u}) \\ & \overset{=}{\text{(b)}} & f(A)+\phi_A(\overrightarrow{AB})+\phi_A(\overrightarrow{u}) \\ & \overset{=}{\text{(b)}} & f(A)+\overrightarrow{f(A)f(B)}+\phi_A(\overrightarrow{u}) \\ & \overset{=}{\text{(cf. III.1.2.4,)}} & f(B)+\phi_A(\overrightarrow{u})\,. \end{array}$$

La réciproque de l'application $\overrightarrow{f(B)\bullet} : \mathcal{F} \to \overrightarrow{\mathcal{F}}$ étant bijective, elle est en particulier injective, ce qui implique que

$$\phi_A(\overrightarrow{u}) \;=\; \phi_B(\overrightarrow{u})\,.$$

Définition IV.1.1 On dira qu'une application f d'un K-espace affine $\mathcal{E}$ dans un K-espace affine $\mathcal{F}$ est une *application affine* si elle vérifie l'une des conditions équivalentes de la proposition IV.1.1.

L'application $\overrightarrow{f}$ est *l'application linéaire associée (ou sous-jacente) à* f .

Lemme IV.1.2 *Étant donnés deux K-espaces affines $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$, des points $A \in \mathcal{E}$ et $B \in \mathcal{F}$ et une application linéaire $\phi : \overrightarrow{\mathcal{E}} \to \overrightarrow{\mathcal{F}}$, il existe une unique application affine*

$$f : \mathcal{E} \to \mathcal{F} \text{ telle que } f(A) = B \text{ et } \forall (M,N)\in\mathcal{E}\times\mathcal{E},\ \overrightarrow{f(M)f(N)} = \phi(\overrightarrow{MN})\,.$$

Exemple IV.1.3 Pour tout $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{E}}$, on définit une application

$$\begin{array}{rccc} T_{\overrightarrow{u}} : & \mathcal{E} & \to & \mathcal{E} \\ & A & \overset{\mapsto}{\text{(cf. III.1.2,)}} & A+\overrightarrow{u}\,, \end{array}$$

appelée *translation de vecteur* $\overrightarrow{u}$ qui est, de manière assez immédiate, une application affine d'application linéaire associée $\mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{E}}}$ (cf. III.1.3.3.)

Par ailleurs l'identité III.1.2.2 montre que l'ensemble des translations est un groupe pour la loi de composition des applications; et que l'application $\overrightarrow{u} \mapsto T_{\overrightarrow{u}}$ est un isomorphisme de groupe de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ dans le groupe des translations.

Proposition IV.1.4 *Pour tout*

$$f \; : \; \mathcal{E} \; \to \; \mathcal{F} \; , \; g \; : \; \mathcal{F} \; \to \; \mathcal{G} \text{ des applications affines,}$$

la composée $g \circ f : \mathcal{E} \to \mathcal{G}$ est une application affine d'application linéaire associée

$$\overrightarrow{g \circ f} \; = \; \overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f} \; . \qquad \textit{IV.1.4.1}$$

Preuve : La démonstration de cette proposition est tout à fait élémentaire et laissée en exercice.

Proposition IV.1.1 *Pour une application affine $f \; : \; \mathcal{E} \; \to \; \mathcal{F}$ l'image $\mathrm{Im}\, f$ de f est un sous-espace affine de $\mathcal{F}$ de direction*

$$\overrightarrow{\mathrm{Im}\, f} \; = \; \mathrm{Im}\, \overrightarrow{f} \; \subset \; \overrightarrow{\mathcal{F}} \; . \qquad \textit{IV.1.1.1}$$

Preuve : Il s'agit encore d'un résultat dont la démonstration ne pose aucun problème.

Proposition IV.1.1 *Pour toute application affine $f \; : \; \mathcal{E} \; \to \; \mathcal{F}$ et tout système*

$$S \; := \; \{(A_i, \lambda_i)_{1 \, \leq \, i \, \leq \, r}\}$$

de points pondérés de $\mathcal{E}$ de masse totale non nulle (cf. III.3.1,) l'image $f(\mathrm{bar}(S))$ par f du barycentre $\mathrm{bar}(S)$ de S est le barycentre du système

$$f(S) \; := \; \{(f(A_i), \lambda_i)_{1 \, \leq \, i \, \leq \, r}\} \; .$$

IV.2 . −Homothéties-translations

Dans toute cette section, $\mathcal{E}$ est un K-espace affine (cf. III.1.1,) où K est un corps.

Définition IV.2.1 Pour tout vecteur $v \in \overrightarrow{\mathcal{E}}$, on appelle *translation de vecteur* $\overrightarrow{v}$ et on note $T_{\overrightarrow{v}}$ l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \to & \mathcal{E} \\ A & \text{(cf. III.1.2,)} \overset{\mapsto}{} & A + \overrightarrow{v} \end{array} ,$$

(cf. IV.1.3.)

Proposition IV.2.2 *i) L'ensemble des translations de $\mathcal{E}$ muni de la loi de composition des applications $\circ$ est un groupe abélien noté $\mathcal{T}(\mathcal{E})$.*

ii) L'application $\tau : (\overrightarrow{\mathcal{E}}, +) \to (\mathcal{T}(\mathcal{E}), \circ)$ définie par $\overrightarrow{v} \mapsto T_{\overrightarrow{v}}$ est un isomorphisme de groupes abéliens.

iii) Une translation est une application affine d'application linéaire associée $\mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{E}}}$ (cf. IV.1.1.)

Définition IV.2.3 Étant donné un point $\Omega \in \mathcal{E}$ et $k \in K^{\times}$ on appellera *homothétie de centre Ω et de rapport k* l'application :

$$\begin{array}{rccc} H_{\Omega,k} : & \mathcal{E} & \to & \mathcal{E} \\ & A & \mapsto & \Omega + k\overrightarrow{\Omega A} . \end{array}$$

Le point Ω et le scalaire k sont appelés les *éléments caractéristiques* de $H_{\Omega,k}$.

Proposition IV.2.4 *Une homothétie $H_{\Omega,k}$, $\Omega \in \mathcal{E}$, $k \in K^{\times}$ est une application affine (cf. IV.1.1) d'application vectorielle associée $\vec{H}_k$ qui est une homothétie vectorielle i.e. une application*

$$\begin{array}{rccc} \vec{H}_k : & \overrightarrow{\mathcal{E}} & \to & \overrightarrow{\mathcal{E}} \\ & \overrightarrow{u} & \mapsto & k\overrightarrow{u} . \end{array}$$

Preuve : Soit $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{E}}$ et $(A, B) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}$ un bipoint représentant $\overrightarrow{u}$ (cf. III.1.2,) *i.e.* tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{H_{\Omega,k}(A)H_{\Omega,k}(B)} &= \overrightarrow{\Omega H_{\Omega,k}(B)} - \overrightarrow{\Omega H_{\Omega,k}(A)} \\ &= k\overrightarrow{\Omega B} - k\overrightarrow{\Omega A} \\ &= k\overrightarrow{AB} \\ &= k\overrightarrow{u} . \end{aligned}$$

Proposition IV.2.1 *Soit f une application affine telle que l'application vectorielle associée $\overrightarrow{f}$ est une homothétie vectorielle $\overrightarrow{H}_k$. Alors,*

i) si $k \neq 1$, f est une homothétie de rapport k ;

ii) sinon f est une translation.

Preuve : Cherchons à déterminer si f possède un *point fixe i.e.* s'il existe un point $\Omega \in \mathcal{E}$ tel que $f(\Omega) = \Omega$.

$$\begin{array}{lrcl} & f(\Omega) & = & \Omega \\ \overset{\Leftrightarrow}{(\text{cf. III.1.1.iii).}\dagger),)} \ \forall A \in \mathcal{E} & \overrightarrow{Af(\Omega)} & = & \overrightarrow{A\Omega} \\ \Leftrightarrow & \overrightarrow{Af(A)} + \overrightarrow{f(A)f(\Omega)} & = & \overrightarrow{A\Omega} \\ \overset{\Leftrightarrow}{(\text{cf. IV.1.1,})} & \overrightarrow{Af(A)} + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{A\Omega}) & = & \overrightarrow{A\Omega} \\ \Leftrightarrow & \overrightarrow{Af(A)} + k\overrightarrow{A\Omega} & = & \overrightarrow{A\Omega} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{E}, \ (1-k)\overrightarrow{A\Omega} = \overrightarrow{Af(A)} . \qquad \text{IV.2.1}$$

Fixons $A_0 \in \mathcal{E}$.

ii) Si $k \neq 1$, l'équation IV.2.1 prise en A_0 a une unique solution $\Omega = A_0 + \frac{1}{1-k}\overrightarrow{A_0 f(A_0)}$. Pour tout $B \in \mathcal{E}$,

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{\Omega f(B)} & = & \overrightarrow{f(\Omega)f(B)} \\ & = & \overrightarrow{f}(\overrightarrow{\Omega B}) \\ & = & k\overrightarrow{\Omega B} \ ; \end{array}$$

c'est-à-dire que f est bien l'homothétie $H_{\Omega,k}$ de centre Ω et de rapport k .

iii) Si $k = 1$, pour tout $B \in \mathcal{E}$,

$$\begin{array}{lrcl} & \overrightarrow{f}(\overrightarrow{A_0 B}) & = & \overrightarrow{A_0 B} \\ \Leftrightarrow & \overrightarrow{f(A_0)f(B)} & = & \overrightarrow{A_0 B} \\ \overset{\Leftrightarrow}{(\text{cf. III.1.3.3,})} & \overrightarrow{Bf(B)} & = & \overrightarrow{A_0 f(A_0)} , \end{array}$$

c'est-à-dire que f est la translation de vecteur $\overrightarrow{A_0 f(A_0)}$.

Proposition IV.2.4 *i) L'ensemble $\mathcal{HT}(\mathcal{E})$ dont les éléments sont les homothéties (cf. IV.2.3,) et les translations (cf. IV.2.1,) de $\mathcal{E}$, muni de la loi $\circ$ de composition des applications est un groupe.*

ii) L'application naturelle

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{HT}(\mathcal{E}) & \to & \mathrm{GL}(\overrightarrow{\mathcal{E}}) \\ f & \mapsto & \overrightarrow{f} \end{array}$$

est un morphisme de groupes.

iii) Le noyau du morphisme ci-dessus est $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ et son image est le groupe des homothéties vectorielles de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ canoniquement isomorphe à $(K^\times, *)$.

iv) Il s'ensuit que $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ est un sous-groupe distingué de $\mathcal{HT}(\mathcal{E})$ et que l'application $f \mapsto \overrightarrow{f}$ induit un isomorphisme canonique

$$\mathcal{HT}(\mathcal{E})/\mathcal{T}(\mathcal{E}) \cong K^\times . \qquad 1$$

Preuve :

i Soient $(f, g) \in \mathcal{HT}(\mathcal{E}) \times \mathcal{HT}(\mathcal{E})$, alors $f \circ g$ est une application affine (cf. IV.1.4) d'application vectorielle associée $\mathrm{Vect}\{f \circ g\} = \overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{g}$. Il s'ensuit que $\mathrm{Vect}\{f \circ g\}$ est une homothétie vectorielle d'après les propositions IV.2.2.iii) et IV.2.4 ; (en remarquant que $\mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{E}}}$ est un cas particulier d'homothétie vectorielle.)

Il s'ensuit que $f \circ g$ est soit une homothétie soit une translation d'après la proposition IV.2.1.

Il est immédiat de constater que l'identité $\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$ de $\mathcal{E}$ peut être considérée, soit comme la translation $T_{\overrightarrow{0}}$ de vecteur $\mathrm{Vect}\{0\}$, soit comme n'importe quelle homothétie $H_{\Omega,1}$ pour tout point $\Omega \in \mathcal{E}$.

Il est également clair que, pour tout vecteur $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{E}}$, $T_{\overrightarrow{-u}}$ est l'inverse de $T_{\overrightarrow{u}}$. Par ailleurs, toute homothétie $H_{\Omega,k}$, $\Omega \in \mathcal{E}$, $k \in K^\times$ admet pour inverse $H_{\Omega,k^{-1}}$, (cf. IV.2.2.4.ii).)

ii Ce point est simplement une conséquence de la proposition IV.1.4.

iii et iv Sont faciles et laissés en exercice.

Définition IV.2.1 i) On appellera le groupe $\mathcal{HT}(\mathcal{E})$ *le groupe des homothéties-translations de* $\mathcal{E}$.

ii) On appellera *homothétie-translation* un élément de $\mathcal{HT}(\mathcal{E})$.

iii) Pour tout $\eta \in \mathcal{HT}(\mathcal{E})$, on appellera *rapport de* η l'image de la classe de η modulo $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ par l'isomorphisme IV.2.4.iv).1 autrement dit, si η est une translation, le rapport de η est égal à 1 , si η est une homothétie le rapport de η est le rapport de l'homothétie.

iv) Pour une homothétie-translation f son rapport k , son centre Ω (s'il existe,) son vecteur de translation $\overrightarrow{u}$ (s'il existe,) sont appelés les *éléments caractéristiques de* f .

IV.2.2 . −Détermination des éléments caractéristiques de la composée de deux homothéties

Étant données deux homothéties H_{Ω_1,k_1} et H_{Ω_2,k_2} , on cherche à déterminer la composée $H_{\Omega_1,k_1} \circ H_{\Omega_2,k_2}$. D'après les propositions IV.1.4 et IV.2.4, il est clair que l'application linéaire associée $\mathrm{Vect}\{H_{\Omega_1,k_1} \circ H_{\Omega_2,k_2} .\}$ est une homothétie vectorielle de rapport k_1k_2 .

Si $k_1k_2 \neq 1$ la composée $H_{\Omega_1,k_1} \circ H_{\Omega_2,k_2}$ est une homothétie d'après la proposition IV.2.1.i). On cherche à déterminer son centre Ω (en fonction des éléments caractéristiques respectifs de H_{Ω_1,k_1} et H_{Ω_2,k_2} ,) c'est-à-dire le point Ω vérifiant :

$$\begin{array}{rrcl}
 & H_{\Omega_1,k_1} \circ H_{\Omega_2,k_2}(\Omega) & = & \Omega \\
\Leftrightarrow & \Omega_1 + k_1\overrightarrow{\Omega_1 H_{\Omega_2,k_2}(\Omega)} & = & \Omega \\
\Leftrightarrow & \Omega_1 + k_1\overrightarrow{\Omega_1(\Omega_2 + k_2\overrightarrow{\Omega_2\Omega})} & = & \Omega \\
\Leftrightarrow & \Omega_1 + k_1(\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2} +_{\overrightarrow{\mathcal{E}}} k_2\overrightarrow{\Omega_2\Omega}) & = & \Omega \\
\Leftrightarrow & \overrightarrow{\Omega_1[\Omega_1 + k_1(\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2} +_{\overrightarrow{\mathcal{E}}} k_2\overrightarrow{\Omega_2\Omega})]} & = & \overrightarrow{\Omega_1\Omega} \\
\Leftrightarrow & k_1\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2} +_{\overrightarrow{\mathcal{E}}} k_1k_2\overrightarrow{\Omega_2\Omega} & = & \overrightarrow{\Omega_1\Omega} \\
\Leftrightarrow & k_1\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2} -_{\overrightarrow{\mathcal{E}}} k_1k_2\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2} +_{\overrightarrow{\mathcal{E}}} k_1k_2\overrightarrow{\Omega_1\Omega} & = & \overrightarrow{\Omega_1\Omega} \\
\Leftrightarrow & (1-k_1k_2)\overrightarrow{\Omega_1\Omega} & = & k_1(1-k_2)\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2} \\
\Leftrightarrow & \overrightarrow{\Omega_1\Omega} & = & \frac{k_1(1-k_2)}{1-k_1k_2}\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2} \\
\Leftrightarrow & \Omega & = & \Omega_1 + \frac{k_1(1-k_2)}{1-k_1k_2}\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2} \, ;
\end{array} \qquad \text{IV.2.2.1}$$

ce qui détermine un unique point Ω fixe pour la composée $H_{\Omega_1,k_1} \circ H_{\Omega_2,k_2}$ qui est l'*homothétie* H_{Ω,k_1k_2} de centre Ω défini par IV.2.2.1 et de rapport k_1k_2 .

Remarque IV.2.2.2 L'identité IV.2.2.1 équivaut à :

$$\begin{array}{rrcl}
 & \Omega & = & \Omega_1 + \frac{k_1(1-k_2)}{1-k_1k_2}\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2} \\
\Leftrightarrow & (1-k_1k_2)\overrightarrow{\Omega_1\Omega} & = & k_1(1-k_2)[\overrightarrow{\Omega\Omega_2} - \overrightarrow{\Omega\Omega_1}] \\
\Leftrightarrow & (1-k_1)\overrightarrow{\Omega\Omega_1} + (k_1 - k_1k_2)\overrightarrow{\Omega\Omega_2} & = & \mathrm{Vect}\{0\} \, .
\end{array}$$

Autrement dit, on peut voir Ω comme le barycentre (cf. III.3.1) du système

$$\{(\Omega_1, (1-k_1))\ ;\ (\Omega_2, (k_1 - k_1k_2))\}$$

puisque la masse totale $1 - k_1k_2$ est non nulle.

Remarque IV.2.2.3 On remarque que la formule IV.2.2.1 donnant Ω en fonction des éléments caractéristiques $\Omega_1, k_1, \Omega_2, k_2$ n'est pas symétrique c'est-à-dire que cette composition n'est pas commutative.

Si $k_1k_2 = 1$, $H_{\Omega_1,k_1} \circ H_{\Omega_2,k_2}$ est une translation, d'après la proposition IV.2.1.ii).
Pour tout point $A \in \mathcal{E}$, on a :

$$\begin{aligned}
H_{\Omega_1,k_1}(H_{\Omega_2,k_2}(A)) &= \Omega_1 + [k_1\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2} +_{\overrightarrow{\mathcal{E}}} k_1k_2(\overrightarrow{\Omega_1A} -_{\overrightarrow{\mathcal{E}}} \overrightarrow{\Omega_1\Omega_2})] \\
&= \Omega_1 + [k_1(1-k_2)\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2} +_{\overrightarrow{\mathcal{E}}} (k_1k_2 - 1)\overrightarrow{\Omega_1A} +_{\overrightarrow{\mathcal{E}}} \overrightarrow{\Omega_1A}] \\
&= (\Omega_1 + \overrightarrow{\Omega_1A}) + k_1(1-k_2)\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2} \\
&= A + k_1(1-k_2)\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2}\ ,
\end{aligned}$$

c'est-à-dire que $H_{\Omega_1,k_1} \circ H_{\Omega_2,k_2}$ est *la translation* de vecteur

$$k_1(1-k_2)\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2} = (k_1 - 1)\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2}\ .$$

Remarque IV.2.2.4 i) On remarque ici encore que la composée n'est pas commutative.

ii) Il se peut que le vecteur $(k_1 - 1)\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2}$ soit nul

- si $\Omega_1 = \Omega_2$; ce qui permet de caractériser l'inverse d'une homothétie affine comme une homothétie de même centre et de rapport inverse (cf. IV.2.4.i).)
- ou si $k_1 = 1$ c'est-à-dire que $k_2 = 1$ et que dans ce cas, les homothéties H_{Ω_1,k_1} et H_{Ω_2,k_2} sont l'identité de $\mathcal{E}$.
  Dans ce cas la composée est l'identité de $\mathcal{E}$ qui est bien la translation de vecteur $\mathrm{Vect}\{0\}$.

iii) Les calculs faits dans le paragraphe IV.2.2 montre que la composition $\circ$ n'est pas interne sur l'ensemble des homothéties et par conséquent on est amené à introduire l'ensemble $\mathcal{HT}(\mathcal{E})$ pour disposer d'un groupe.

iv) On remarque que le morphisme $f \mapsto \overrightarrow{f}$ de $\mathcal{HT}(\mathcal{E})$ dans $\mathrm{GL}(E)$ est tel que son noyau $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ et son image $K^\times$ sont abéliens sans pour autant que $\mathcal{HT}(\mathcal{E})$ le soit lui-même.

IV.2.3 . −Détermination des éléments caractéristiques de la composée d'une homothétie et d'une translation

Si $H_{\Omega,k}$ est l'homothétie de centre $\Omega \in \mathcal{E}$ et de rapport $k \in K^\times$; si $T_{\overrightarrow{u}}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$,

$$H_{\Omega,k} \circ T_{\overrightarrow{u}} \text{ et } T_{\overrightarrow{u}} \circ H_{\Omega,k}$$

sont des applications affines (cf. IV.1.4) d'application linéaire associée $\overrightarrow{H}_k$ *i.e.* des homothéties dans le cas où $k \neq 1$, le seul qui mérite vraiment une étude, puisque pour $k = 1$, $H_{\Omega,k} = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$.

Remarquons que, pour tout point $A \in \mathcal{E}$,

$$\begin{array}{rcl} H_{\Omega,k}(T_{\overrightarrow{u}}(A)) & = & \Omega + k\overrightarrow{\Omega T_{\overrightarrow{u}}(A)} \\ & = & \Omega + k\overrightarrow{\Omega(A+\overrightarrow{u})} \\ & = & \Omega + (k\overrightarrow{\Omega A} +_{\overrightarrow{\mathcal{E}}} k\overrightarrow{u}) \\ & = & (\Omega + k\overrightarrow{\Omega A}) + k\overrightarrow{u} \\ & = & T_{\overrightarrow{ku}}(H_{\Omega,k}(A)) \ . \end{array}$$

Il s'ensuit donc que pour tout point Ω, tout vecteur $\overrightarrow{u}$ et tout scalaire k,

$$H_{\Omega,k} \circ T_{\overrightarrow{u}} = T_{\overrightarrow{ku}} \circ H_{\Omega,k} \ . \qquad \text{IV.2.3.1}$$

On va chercher à déterminer le centre de ces composées en fonction de Ω, k, $\overrightarrow{u}$, puisque leur rapport est k (cf. IV.2.1.i).) Le centre I est <u>la solution</u> de l'équation de paramètre $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\mathcal{E}}$ et d'inconnue $I \in \mathcal{E}$:

$$\begin{array}{lrcl} & I & = & T_{\overrightarrow{v}}(H_{\Omega,k}(I)) \\ \Leftrightarrow & I & = & (\Omega + k\overrightarrow{\Omega I}) + \overrightarrow{v} \\ \Leftrightarrow & \overrightarrow{\Omega I} & = & k\overrightarrow{\Omega I} +_{\overrightarrow{\mathcal{E}}} \overrightarrow{v} \\ \Leftrightarrow & (1-k)\overrightarrow{\Omega I} & = & \overrightarrow{v} \\ \Leftrightarrow & I & = & \Omega + \frac{1}{k-1}\overrightarrow{v} \ . \end{array} \qquad \text{IV.2.3.2}$$

En faisant prendre les valeurs $\overrightarrow{u}$ ou $k\overrightarrow{u}$, on pourra, grâce à l'identité IV.2.3.1, déterminer le centre de la composée.

Théorème IV.2.4 (Caractérisation des homothéties-translations) *Étant donnée*

$$\text{une application } f : \mathcal{E} \to \mathcal{E} \ ,$$

les conditions suivantes sont équivalentes :

a) L'application f est une homothétie-translation.

b) Il existe $k \in K^\times$ tel que pour tout $(A, B) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}$,

$$\overrightarrow{f(A)f(B)} = k\overrightarrow{AB} .$$

c) L'application f est affine et pour tout couple $(A, B) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}$, il existe $k \in K^\times$ tel que

$$\overrightarrow{f(A)f(B)} = k\overrightarrow{AB} .$$

d) L'application f est une application affine et l'image de toute droite (sous-espace affine de dimension $1,$) de $\mathcal{E}$ par f est une droite parallèle (cf. III.2.2.)

Preuve :

(a)⇔(b) Résulte de la définition d'une homothétie-translation.

(b)⇒(c) est clair.

(c)⇒(d) est clair.

(d)⇒(c) Soit (A, B) un couple de points distincts de $\mathcal{E}$. Alors $f(A)$ et $f(B)$ sont distincts. En effet, si l'on supposait que $f(A) = f(B)$, pour tout point $M \in (AB)$, il existe $\lambda \in K$ tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB}$. On aurait alors, puisque f est supposée affine

$$\begin{aligned} f(M) &= f(A) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AM}) \\ &= f(A) + \overrightarrow{f}(\lambda\overrightarrow{AB}) \\ &= f(A) + \lambda\overrightarrow{f}(\overrightarrow{AB}) \\ &= f(A) , \end{aligned}$$

ce qui est contraire à l'hypothèse (d).
Par conséquent, il existe $k \in K^\times$, dépendant a priori du couple (A, B) tel que

$$\overrightarrow{f(A)f(B)} = k\overrightarrow{AB} .$$

(c)⇒(b) Ceci revient, avec les notations précédentes, à montrer que k est indépendant du couple (A, B).
Pour tout point $C \in (AB)$, il existe $\lambda \in K$ et $l \in K^\times$ tels que

$$\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$$

et

$$\overrightarrow{f(A)f(C)} = l\overrightarrow{AC} .$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned}
\lambda k\overrightarrow{AB} &= \lambda\overrightarrow{f(A)f(B)} \\
&= \lambda\overrightarrow{f}(\overrightarrow{AB}) \\
&= \overrightarrow{f}(\lambda\overrightarrow{AB}) \\
&= \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AC}) \\
&= \overrightarrow{f(A)f(C)} \\
&= l\overrightarrow{AC} \\
&= l\lambda\overrightarrow{AB}\,,
\end{aligned}$$

ce qui prouve que $k = l$ (le cas $\lambda = 0$ est immédiat.)
Si $C \notin (AB)$, (ce qui implique en particulier que $\mathcal{E}$ est de dimension supérieure ou égale à 2,) il suffit d'appliquer le calcul IV.2.3 à $\overrightarrow{f}$.

Remarque IV.2.1 Nous allons en fait constater que si la dimension de l'espace affine $\mathcal{E}$ est supérieure ou égale à 2, l'hypothèse que f est une application affine dans les points IV.2.4.c) et IV.2.4.d) n'est pas utile et cela grâce au lemme IV.2.2 ; ce qui conduira à l'énoncé IV.2.4.

On remarquera d'abord, que les hypothèses des points IV.2.4.c) et IV.2.4.d) sont équivalentes.

Lemme IV.2.2 *Si $\mathcal{E}$ est un K-espace affine de dimension supérieure ou égale à 2, pour une application $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, les hypothèses suivantes :*

i) l'image de toute droite par f est une droite parallèle,

ii) pour tout bipoint (A, B) de $\mathcal{E}$, il existe un élément $k \in K^\times$ tel que

$$\overrightarrow{f(A)f(B)} = k\overrightarrow{AB}\,;$$

sont équivalentes et f est affine.

Preuve :

- Il est bien clair que (ii) implique (i).
- Pour tout bipoint (A, B) de $\mathcal{E}$, $A \neq B$, les vecteurs $\overrightarrow{f(A)f(B)}$ sont colinéaires puisque $f(A)$ et $f(B)$ appartiennent à l'image de (AB) par f qui est une droite parallèle. Puisque $\overrightarrow{AB}$ est non nul, il existe $k \in K$ tel que

$$\overrightarrow{f(A)f(B)} = k\overrightarrow{AB}\,.$$

Il ne reste qu'à montrer que $k \neq 0$. L'hypothèse que la dimension de $\mathcal{E}$ est supérieure ou égale à 2 est essentielle à ce point et on laisse au lecteur le soin de construire un contre-exemple en dimension 1.

Puisque $\mathcal{E}$ est de dimension supérieure ou égale à 2, il existe au moins un vecteur $\overrightarrow{u} \in \mathcal{E}$ indépendant de $\overrightarrow{AB}$. Posons

$$\mathcal{D} := A + K\overrightarrow{u}$$

la droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$. Il existe alors au moins un point $C \in \mathcal{D}$ tel que $\overrightarrow{f(A)f(C)}$ est non nul ; sans quoi l'image de $\mathcal{D}$ serait réduite à un point ce qui est contraire à l'hypothèse (i). On a alors (AC) parallèle à $(f(A)f(C)) = (f(B)f(C))$ parallèle à (BC), c'est-à-dire que $C \in (AB)$ ce qui contredit l'hypothèse que nous avons faite sur C.

- Soient $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{E}}$ et $(A, B), (A', B')$ deux bipoints représentant $\overrightarrow{u}$ (cf. III.1.2.) Supposons que $\overrightarrow{u} \neq \mathrm{Vect}\{0\}$ et que ABA' ne sont pas alignés (cf. III.4.1.) Alors $ABB'A'$ est un parallélogramme (cf. III.1.1) et, si l'on suppose que f vérifie (i),

$$(f(A)f(B)) \text{ parallèle à } (AB) \text{ parallèle à } (A'B') \text{ parallèle à } (f(A')f(B'))$$

et

$$(f(A)f(A')) \text{ parallèle à } (AA') \text{ parallèle à } (BB') \text{ parallèle à } (f(B)f(B'))\ ;$$

c'est-à-dire d'après le critère III.4.2.b), que

$$f(A)f(B)f(B')f(A') \text{ est un parallélogramme.}$$

Si l'on suppose que ABA' sont alignés, il existe au moins un point $C \in \mathcal{E}$ n'appartenant pas à (AB) puisque $\mathcal{E}$ est de dimension supérieure ou égal à 2. Posons $D := C + \overrightarrow{u}$. Alors, d'après ce qui précède,

$$f(A)f(B)f(D)f(C) \text{ et } f(A')f(B')f(D)f(C) \text{ sont des parallélogrammes.}$$

Ceci implique, par application élémentaire de la proposition III.4.2 et de la transitivité de la relation de parallélisme que

$$f(A)f(B)f(B')f(A') \text{ est un parallélogramme.}$$

Pour tout vecteur $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{E}}$ on peut alors poser

$$\phi(\overrightarrow{u}) := \overrightarrow{f(A)f(B)} \qquad \text{IV.2.1}$$

pour n'importe quel bipoint (AB) représentant $\overrightarrow{u}$ puisque nous venons en fait de montrer que f est "compatible" à la relation d'équipollence. La restriction que nous avons faite sur le vecteur nul est sans importance puisque pour n'importe quel point $A \in \mathcal{E}, \overrightarrow{AA} = \mathrm{Vect}\{0\}$ (cf. III.1.3.1.)
Il faut remarquer que ϕ est additive c'est-à-dire que, pour tout couple $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})\mathcal{E} \times \mathcal{E}$

$$\phi(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \phi(\overrightarrow{u}) + \phi(\overrightarrow{v}) . \qquad \text{IV.2.2}$$

Ceci découle simplement du fait que f conserve les parallélogrammes comme nous le verrons dans la preuve du lemme IV.4.2.1. Aussi nous ne redonnerons pas l'argument ici.
Enfin, étant donné un couple $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in \overrightarrow{\mathcal{E}} \times \overrightarrow{\mathcal{E}}$, de vecteurs indépendants, si l'on suppose que f vérifie (ii), il existe un triplet $(k, \ell, m) \in K^3$, tel que

$$\begin{aligned} \phi(\overrightarrow{u}) &= k\overrightarrow{u} \\ \text{et} \quad \phi(\overrightarrow{v}) &= \ell\overrightarrow{v} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} k\overrightarrow{u} + \ell\overrightarrow{v} &= \phi(\overrightarrow{u}) + \phi(\overrightarrow{v}) \\ &\underset{\text{(cf. IV.2.2,)}}{=} \phi(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \qquad \text{IV.2.3} \\ &\underset{\text{(i)}}{=} m(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) , \end{aligned}$$

ce qui prouve, par unicité de la décomposition sur un système libre, que $k = \ell = m$.
En combinant ce dernier résultat avec IV.2.2, on montre que ϕ est une homothétie vectorielle.
Il est très facile de voir finalement que ϕ est l'application linéaire sous-jacente à f ce qui prouve que f est une application affine (cf. IV.1.1) et même une homothétie-translation d'après la proposition (cf. IV.2.1.)

Proposition IV.2.4 *Supposons que $\mathcal{E}$ est un espace affine de dimension supérieure ou égale à 2. Pour toute application non supposée affine par hypothèse, $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) L'application f est une homothétie-translation.

b) Pour tout couple $(A, B) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}$, il existe $k \in K^\times$, (dépendant a priori du couple (A, B),) tel que

$$\overrightarrow{f(A)f(B)} = k\overrightarrow{AB} .$$

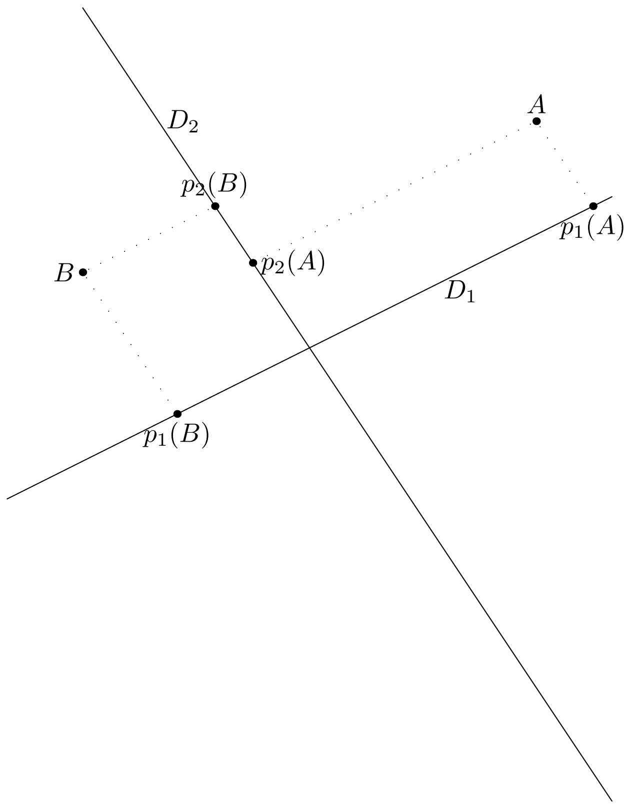
c) L'image par f de toute droite de $\mathcal{E}$ est une droite parallèle.

Preuve : Ce résultat est une conséquence du lemme IV.2.2 et du théorème IV.2.4.

IV.3 . −Projections et symétries dans le plan

Dans cette section $\mathcal{P}$ est un plan affine (cf. III.2.1,) sur un corps K .

IV.3.1. − Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites non parallèles du plan $\mathcal{P}$. À tout point $A \in \mathcal{P}$ on associe l'unique point $p_1(A)$, (resp. $p_2(A)$,) défini comme l'intersection de la parallèle à $\mathcal{D}_2$, (resp. $\mathcal{D}_1$,) passant par A (cf. III.2.3,) avec $\mathcal{D}_1$, (resp. $\mathcal{D}_2$) (cf. III.4.3.)



Définition IV.3.2 La construction ci-dessus permet de définir une application

$$p_1 : \mathcal{P} \to \mathcal{D}_1 ,$$

(resp.

$$p_2 : \mathcal{P} \to \mathcal{D}_2 ,)$$

qu'on appellera *projection de $\mathcal{P}$ sur $\mathcal{D}_1$, (resp. $\mathcal{D}_2$,) parallèlement à $\mathcal{D}_2$, (resp. $\mathcal{D}_1$.)*

Remarque IV.3.3 i) Remarquons que si $\mathcal{D}'_1$, (resp. $\mathcal{D}'_2$,) est une droite parallèle à $\mathcal{D}_1$, (resp. $\mathcal{D}_2$,) la projection $p'_1 : \mathcal{P} \to \mathcal{D}_1$ parallèlement à $\mathcal{D}'_2$, (resp. $p'_2 : \mathcal{P} \to \mathcal{D}_2$ parallèlement à $\mathcal{D}'_1$,) est p_1 , (resp. p_2 .)

On pourra donc parler de p_1 , (resp. p_2 ,) comme de *la projection sur $\mathcal{D}_1$ parallèlement à la direction vectorielle $\overrightarrow{\mathcal{D}}_2$* , (resp. *la projection sur $\mathcal{D}_2$ parallèlement à la direction vectorielle $\overrightarrow{\mathcal{D}}_1$* .)

ii) Pour $i = 1$ ou 2 et pour $A \in \mathcal{P}$, on a :

$$p_i(A) = A \Leftrightarrow A \in \mathcal{D}_i \ .$$

Proposition IV.3.4 *Avec les notations de IV.3.1 :*

i) Les applications $p_i : \mathcal{P} \to \mathcal{D}_i$ sont des applications affines (cf. IV.1.1.)

ii)

$$\mathrm{Vect}\{p_i\} \circ \mathrm{Vect}\{p_i\} = \mathrm{Vect}\{p_i\} \ .$$

iii)

$$\overrightarrow{\mathcal{P}} = \mathrm{Ker}\,\overrightarrow{p_i} \oplus \mathrm{Im}\,\overrightarrow{p_i} \text{ et } \overrightarrow{p_i}_{|\mathrm{Im}\,\overrightarrow{p_i}} = \mathrm{Id}_{\mathrm{Im}\,\overrightarrow{p_i}} \ .$$

iv)

$$\mathrm{Vect}\{p_1\} + \mathrm{Vect}\{p_2\} = \mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{P}}} \ .$$

Preuve :

i En reprenant les notations de IV.3.1, notons $\mathrm{Vect}\{u_1\}$ (resp. $\mathrm{Vect}\{u_2\}$) une base de $\overrightarrow{\mathcal{D}}_1$, (resp. $\overrightarrow{\mathcal{D}}_2$.)

Comme $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ ne sont pas parallèles $(\mathrm{Vect}\{u_1\}, \mathrm{Vect}\{u_2\})$ est une base de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.

Pour tout couple (A, B) de points de $\mathcal{P}$, il existe donc un unique couple (x_1, x_2) dans K^2 , tel que :

$$\overrightarrow{AB} = x_1\mathrm{Vect}\{u_1\} +_{\overrightarrow{\mathcal{P}}} x_2\mathrm{Vect}\{u_2\} \ .$$

Notons $\{O\} := \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$. Remarquons que pour $i = 1$ ou 2 ,

$$p_i(O) = O \ . \tag{IV.3.1}$$

Par ailleurs pour tout point $M \in \mathcal{P}$, le quadrilatère $Op_1(M)Mp_2(M)$ est un parallélogramme (cf. III.1.1) (cf. III.4.2,) ce qui implique :

$$\overrightarrow{Op_1(M)} = \overrightarrow{p_2(M)M} \text{ et } \overrightarrow{Op_2(M)} = \overrightarrow{p_1(M)M} \ ;$$

et encore :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Op_1(M)} + \overrightarrow{Op_2(M)} \ . \tag{IV.3.2}$$

Pour tout couple (A, B) de points de $\mathcal{P}$, la relation de Chasles (cf. III.1.1.iii).1,) donne :

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{AB} & = & \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \\ & \underset{\text{(cf. IV.3.2,)}}{=} & \overrightarrow{Op_1(B)} + \overrightarrow{Op_2(B)} - \overrightarrow{Op_1(A)} - \overrightarrow{Op_2(A)} \\ & = & \overrightarrow{p_1(A)p_1(B)} + \overrightarrow{p_2(A)p_2(B)} \, . \end{array}$$

On conclut grâce à l'unicité de la décomposition sur les sous-espaces supplémentaires $\overrightarrow{\mathcal{D}}_1$ et $\overrightarrow{\mathcal{D}}_2$ que pour $i = 1$ ou 2 :

$$\overrightarrow{p_i(A)p_i(B)} \;=\; x_i \mathrm{Vect}\{u_i\} \qquad \text{IV.3.3}$$

Cette dernière identité suffit à prouver que $\overrightarrow{p_i(A)p_i(B)}$ ne dépend pas du bipoint $(A, B) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}$ mais uniquement du vecteur $\overrightarrow{AB}$. On déduit facilement l'existence d'une application linéaire associée.

ii,iii,iv Sont laissés en exercice.

Remarque IV.3.4 i) Remarquons que les points (ii,iii,iv) de la proposition IV.3.4 caractérisent de manière équivalente un projecteur.

ii) Notons également que l'identité de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ et l'application nulle de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ sont des projecteurs au sens de cette définition.

Nous exclurons ces deux cas dans la suite et notamment dans la proposition IV.3.1.

Définition IV.3.5 Si $p \,:\, \mathcal{P} \;\to\; \mathcal{D}$ est une projection de $\mathcal{P}$ sur une droite $\mathcal{D}$ dans une direction $\Delta \subset \overrightarrow{\mathcal{P}}$, supplémentaire de $\overrightarrow{\mathcal{D}}$, $\mathcal{D}$ et Δ sont appelés *les éléments caractéristiques de* p .

Lemme IV.3.6 *Soit* $\overrightarrow{u} \;\in\; \overrightarrow{\mathcal{P}}$ *et* $p \,:\, \mathcal{P} \;\to\; \mathcal{D}$ *une projection de* $\mathcal{P}$ *sur une droite* $\mathcal{D}$ *parallèlement à une direction* Δ *, on a :*

$$p \circ T_{\overrightarrow{u}} \;=\; T_{\overrightarrow{u}} \circ p \;\Leftrightarrow\; \overrightarrow{p}(\overrightarrow{u}) \;=\; \overrightarrow{u} \;\Leftrightarrow\; \overrightarrow{u} \;\in\; \overrightarrow{\mathcal{D}} \, .$$

Preuve : La démonstration de ce lemme est très facile.

Proposition IV.3.1 *Soit $q : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ une application affine (cf. IV.1.1) telle que l'application linéaire associée $\overrightarrow{q}$ est un projecteur de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ sur une droite vectorielle $\Delta_1 \subset \overrightarrow{\mathcal{P}}$ parallèlement à une droite $\Delta_2 \subset \overrightarrow{\mathcal{P}}$ c'est-à-dire que $\mathrm{Im}\,\overrightarrow{q} = \Delta_1$ et $\mathrm{Ker}\,\overrightarrow{q} = \Delta_2$.*

Alors il existe un unique triplet $(\overrightarrow{u}, p, \mathcal{D})$ tel que :

i $\overrightarrow{u} \in \Delta_1$,

ii *$\mathcal{D}$ est une droite de direction vectorielle sous-jacente Δ_1 ,*

iii *p est la projection sur $\mathcal{D}$ parallèlement à Δ_2 ,*

iv

$$q = T_{\overrightarrow{u}} \circ p = p \circ T_{\overrightarrow{u}} .$$

Preuve : Étant donnés un couple $(A, B) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}$ tel que $\overrightarrow{q}(\overrightarrow{AB}) \neq \mathrm{Vect}\{0\}$ *i.e.* tel que $\overrightarrow{AB} \notin \Delta_2 = \mathrm{Ker}\,\overrightarrow{q}$,

$$\begin{aligned} q(B) &= q(A) + \overrightarrow{q(A)q(B)} \\ &= q(A) + \overrightarrow{q}(\overrightarrow{AB}) \\ &\in q(A) + \mathrm{Im}\,\overrightarrow{q} \\ &= q(A) + \Delta_1 . \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\mathrm{Im}\, q = q(A) + \Delta_1 , \qquad \text{IV.3.1}$$

(l'inclusion réciproque étant immédiate.)

α Si l'on suppose qu'il existe un triplet $(\overrightarrow{u}, p, \mathcal{D})$, vérifiant (i,ii,iii,iv) , (iv) implique en particulier que pour tout $A \in \mathcal{P}$, nécessairement

$$\begin{aligned} p(A) &= q(A) + \overrightarrow{q(A)p(A)}) \\ &= q(A) + \overrightarrow{u} \\ &\underset{\text{(i)}}{\in} q(A) + \Delta_1 ; \end{aligned}$$

c'est-à-dire que

$$\mathcal{D} \underset{\text{(iii)}}{=} \mathrm{Im}\, p = q(A) + \Delta_1 \ \underset{\text{(cf. IV.3.1,)}}{=} \mathrm{Im}\, q ; \qquad \text{IV.3.2}$$

ce qui prouve l'unicité de $\mathcal{D}$.

β L'unicité de p en découle, si l'on suppose (iii) vérifiée, puisqu'il existe une unique projection p ayant $\mathcal{D}$ et Δ_2 pour éléments caractéristiques, par construction même.

γ Fixons donc un point $A \in \mathcal{P}$ et posons $\mathcal{D} := q(A) + \Delta_1$ et p la projection sur $\mathcal{D}$ parallèlement à Δ_2 . On a donc montré l'existence de $\mathcal{D}$ et p satisfaisant (ii) et (iii) .

δ Si $\overrightarrow{u}$ existe, (iv) implique que pour $A \in \mathcal{P}$ fixé, $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{p(A)q(A)}$. L'unicité de $\overrightarrow{u}$ en découle.

ϵ Or (iii) implique que

$$\overrightarrow{p} = \overrightarrow{q} \; ; \qquad \text{IV.3.3}$$

d'où il suit que A étant fixé comme en δ , pour tout $B \in \mathcal{P}$,

$$\begin{array}{rcl} q(B) & = & p(A) + \overrightarrow{p(A)q(B)} \\ & = & p(A) + \overrightarrow{p(A)q(A)} + \overrightarrow{q(A)q(B)} \\ & = & p(A) + \overrightarrow{p(A)q(A)} + \overrightarrow{q}(\overrightarrow{AB}) \\ & \underset{\text{(cf. IV.3.3,)}}{=} & p(A) + \overrightarrow{p(A)q(A)} + \overrightarrow{p}(\overrightarrow{AB}) \\ & = & p(A) + \overrightarrow{p(A)q(A)} + \overrightarrow{p(A)p(B)} \\ & = & p(B) + \overrightarrow{p(A)q(A)} \; . \end{array}$$

En posant $\overrightarrow{u} := \overrightarrow{p(A)q(A)} \in \Delta_1$, on a prouvé l'existence d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ vérifiant (i) et $T_{\overrightarrow{u}} \circ p = q$.

ζ Le fait que $\overrightarrow{u}$ vérifie également $q = p \circ T_{\overrightarrow{u}}$ résulte de ce que $\overrightarrow{u}$ vérifie (i) et du lemme IV.3.6.

Théorème IV.3.4 *Soit $q : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ une application affine.*

i) Si l'application vectorielle sous-jacente $\overrightarrow{q}$ est un projecteur non égal à l'identité ou à l'application nulle (cf. IV.3.4.ii)) et si l'on suppose de plus qu'il existe un point $O \in \mathcal{P}$ tel que $q(O) = O$, alors q est la projection sur $O + \mathrm{Im}\,\overrightarrow{q}$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\,\overrightarrow{q}$.

ii) Si $q \circ q = q$ et $\mathrm{Im}\, q$ est une droite, q est la projection sur $\mathrm{Im}\, q$, dans la direction de $\mathrm{Ker}\,\overrightarrow{q}$.

Preuve :

i)] Ce théorème n'est qu'un cas particulier (mais cependant très utilisé) de la proposition IV.3.1.

ii)] est une conséquence de (i) .

Proposition IV.3.3 *Si p et p' sont deux projections ayant la même application vectorielle associée, alors il existe un unique vecteur $\overrightarrow{v} \in \operatorname{Ker} \overrightarrow{p} = \operatorname{Ker} \overrightarrow{p'}$ tel que :*

$$p' \;=\; T_{\overrightarrow{v}} \circ p.$$

Preuve : Notons d'abord que la remarque IV.3.3.i) et la proposition IV.3.4 montrent que si p et p' ons même application vectorielle associée, elles ont même direction égale au noyau de $\overrightarrow{p}$ et leurs images respectives $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont deux droites parallèles de direction $\operatorname{Im} \overrightarrow{p}$.

Pour tout point $A \in \mathcal{P}$,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{p}(\overrightarrow{p(A)p'(A)}) &= \overrightarrow{p(p(A))p(p'(A))} \\ &\underset{\text{(cf. IV.3.3.ii),)}}{=} \overrightarrow{p(A)p(p'(A))} \,. \end{aligned}$$

Les droites $(Ap(A))$, $(Ap'(A))$ et $(p(A)p(p'(A)))$ ont même direction égale à $\operatorname{Ker} \overrightarrow{p}$. Il s'ensuit, d'après le lemme III.2.3 que $p(A) = p(p'(A))$ c'est-à-dire que $\overrightarrow{p(A)p(p'(A))} = \operatorname{Vect}\{0\}$ ou encore, d'après ce qui précède, que $\overrightarrow{p(A)p'(A)} \in \operatorname{Ker} \overrightarrow{p}$.

Pour tout point $B \in \mathcal{P}$,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{p(A)p(B)} &= \overrightarrow{p}(\overrightarrow{AB}) \\ &= \operatorname{Vect}\{p'\}(\overrightarrow{AB}) \\ &= \overrightarrow{p'(A)p'(B)} \,. \end{aligned}$$

Ce qui équivaut à

$$\overrightarrow{p(B)p'(B)} \;=\; \overrightarrow{p(A)p'(A)}$$

(cf. III.1.1) ou encore :

$$p'(B) \;=\; p(B) + \overrightarrow{p(A)p'(A)}\,;$$

ce qui achève la preuve.

Proposition IV.3.1 *Étant données une droite $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$, et une droite vectorielle $\Delta \subset \overrightarrow{\mathcal{P}}$, telles que $\overrightarrow{D} \neq \Delta$, pour tout point $A \in \mathcal{P}$, il existe un unique point $B \in \mathcal{P}$, tel que :*

i le milieu de (A, B) appartient à $\mathcal{D}$;

ii $\overrightarrow{AB} \in \Delta$.

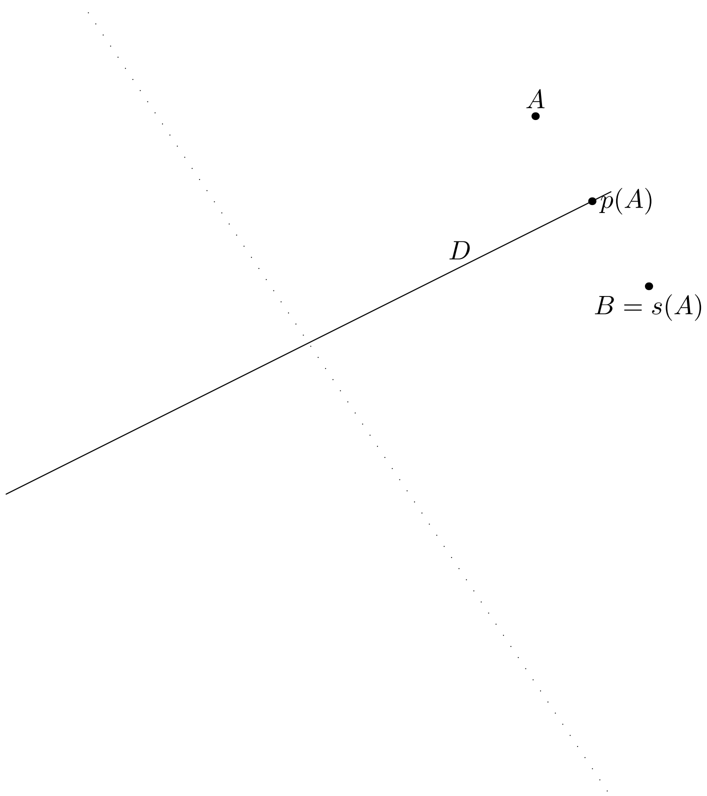
Preuve : Si $A \in \mathcal{D}$, il est clair que $B = A$ répond de manière unique à la question (cf. III.4.3.)

Si maintenant $A \notin \mathcal{D}$, s'il existe un point B répondant à la question, la droite (AB) a pour direction Δ . Si p est la projection sur $\mathcal{D}$ relativement à la direction Δ (cf. IV.3.2,) la droite $(Ap(A))$ a également pour direction Δ ($p(A) \neq A$.) Par suite ces deux droites sont confondues (cf. III.2.3.)

Par ailleurs, par définition même du milieu du bipoint (A, B) (cf. III.3.3.ii),) celui-ci appartient à la droite (AB) . Il s'ensuit que le milieu de (A, B) est nécessairement $p(A)$ (cf. III.4.3.) Il s'ensuit qu'alors,

$$B = A + 2\overrightarrow{Ap(A)} ; \qquad \text{IV.3.1}$$

or cette équation admet toujours une et une seule solution ce qui prouve l'existence de B .



Définition IV.3.2 Étant données une droite $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$ et une droite vectorielle $\Delta \subset \overrightarrow{\mathcal{P}}$, la construction de la proposition IV.3.1 définit une application $s : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$, appelée *symétrie par rapport à $\mathcal{D}$ dans la direction Δ* .

La droite $\mathcal{D}$ est appelée *axe de la symétrie.*

La droite affine $\mathcal{D}$ et la droite vectorielle Δ sont appelées *éléments caractéristiques* de s .

Proposition IV.3.3 *Soit s une symétrie d'éléments caractéristiques $\mathcal{D}$ et Δ .*

i) L'application s est une application affine d'application linéaire $\overrightarrow{s}$ associée vérifiant :

$$\overrightarrow{s} = 2\overrightarrow{p} - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{P}}} \; ; \qquad 1$$

(où p est la projection d'éléments caractéristiques $\mathcal{D}$ et Δ .)

ii) L'application $\overrightarrow{s}$ vérifie

$$\overrightarrow{s}^2 = \mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{P}}} \; . \qquad 1$$

iii) L'application s est bijective et vérifie

$$s \circ s = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}} \; . \qquad 1$$

Preuve :

i Soit p la projection d'éléments caractéristiques $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$ et $\Delta \subset \overrightarrow{\mathcal{P}}$. Pour tout vecteur $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$, et tout bipoint (A, B) tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$,

$$\begin{array}{rcl}
\overrightarrow{s(A)s(B)} & = & \overrightarrow{s(A)p(A)} + \overrightarrow{p(A)p(B)} + \overrightarrow{p(B)s(B)} \\
& \underset{\text{(cf. IV.3.1,)}}{=} & \overrightarrow{p(A)A} + \overrightarrow{p(A)p(B)} + \overrightarrow{Bp(B)} \\
& = & \overrightarrow{p(A)A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{Bp(B)} + \overrightarrow{p(A)p(B)} - \overrightarrow{AB} \\
& = & 2\overrightarrow{p(A)p(B)} - \overrightarrow{AB} \\
& = & 2\overrightarrow{p}(\overrightarrow{u}) - \overrightarrow{u} \\
& = & (2\overrightarrow{p} - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{P}}})(\overrightarrow{u}) \; ;
\end{array}$$

ce qui prouve (i).

ii Est une conséquence immédiate de IV.3.3.i).1 et du fait que $\overrightarrow{p}^2 = \overrightarrow{p}$ IV.3.4.ii).

iii Est immédiat au vu de la définition et peut également se déduire de (ii) .

Remarque IV.3.1 i) L'application linéaire associée à une symétrie affine est une symétrie vectorielle.

ii) Il est bon de garder en mémoire que si π est un projecteur, et $\sigma := 2\pi - \mathrm{Id}$ une symétrie, on a la correspondance suivante entre les espaces propres de ces applications qui sont diagonalisables :

[-] Le noyau de π est l'espace propre de σ associé à la valeur propre -1 ,

[-] L'image de π est le sous espace propre de σ associé à la valeur propre 1 .

Proposition IV.3.2 *Étant donnée une application affine* $t : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ *, dont l'application vectorielle sous-jacente* $\overrightarrow{t}$ *est une symétrie dont le projecteur associé* $\overrightarrow{p} := \frac{1}{2}(\overrightarrow{t} + \mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{P}}})$ *(cf. IV.3.3.i).1,) n'est ni l'identité ni l'application nulle (cf. IV.3.4.ii),) il existe un unique triplet* $(\overrightarrow{u}, s, \mathcal{D})$ *, tel que :*

i) $\overrightarrow{u} \in \mathrm{Im}\,\overrightarrow{p}$,

ii) $\mathcal{D}$ *est une droite de direction* $\mathrm{Im}\,\overrightarrow{p}$,

iii) s *est la symétrie par rapport à* $\mathcal{D}$ *dans la direction* $\mathrm{Ker}\,\overrightarrow{p}$,

iv)

$$t = T_{\overrightarrow{u}} \circ s = s \circ T_{\overrightarrow{u}} \ .$$

Preuve : Cette proposition découle de la proposition IV.3.1.

Proposition IV.3.1 *Étant données deux symétries* s *et* s'*, ayant même application vectorielle sous-jacente, il existe un unique vecteur*

$$\overrightarrow{v} \in \mathrm{Ker}\,(\frac{1}{2}(\overrightarrow{s} + \mathrm{Id})) = \mathrm{Ker}\,(\frac{1}{2}(\mathrm{Vect}\{s'\} + \mathrm{Id}))\ ,$$

tel que

$$s = T_{\overrightarrow{v}} \circ s' \ .$$

Preuve : Cette proposition est une conséquence de la proposition IV.3.3.

Théorème IV.3.1 *Soit* $s : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ *une application affine dont l'application linéaire sous-jacente* $\overrightarrow{s}$ *est une symétrie dont le projecteur associé (cf. IV.3.3.i).1) n'est pas trivial (cf. IV.3.4.ii).) Si l'on suppose de plus qu'il existe un point* $O \in \mathcal{P}$ *, tel que* $s(O) = O$ *, alors* s *est la symétrie par rapport à* $O + \mathrm{Im}\,(\frac{1}{2}(\overrightarrow{s} + \mathrm{Id}))$ *dans la direction* $\mathrm{Ker}\,(\frac{1}{2}(\overrightarrow{s} + \mathrm{Id}))$.

Définition IV.3.2 Si $\mathcal{P}$ est un plan euclidien (cf. III.4.1,) une projection, (resp. une symétrie,) d'éléments caractéristiques $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$ et $\Delta \subset \overrightarrow{\mathcal{P}}$ est dite *orthogonale* si $\overrightarrow{\mathcal{D}}$ et Δ sont deux sous-espaces orthogonaux.

Remarque IV.3.3 L'application linéaire $\overrightarrow{s}$ associée à une symétrie orthogonale s est un endomorphisme orthogonal (cf. I.1.3,) en revanche, l'application linéaire $\overrightarrow{p}$ associée à une projection orthogonale p n'en est pas un, par exemple, parce que $\overrightarrow{p}$ n'est pas injective (cf. I.1.3.i).)

IV.4 . – Classification des isométries du plan affine euclidien

Dans cette section $\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien (cf. III.4.1.) On notera $\langle \bullet, \bullet \rangle$ le produit scalaire sur $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ (cf. I.2.3.i)) et $||\overrightarrow{u}||$ la norme euclidienne de tout vecteur $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$ (cf. I.2.6.)

On notera δ la distance euclidienne (cf. III.1.3.ii)) sur $\mathcal{P}$.

Enfin on notera $\mathcal{O}(\overrightarrow{\mathcal{P}})$ (resp. $\mathcal{SO}(\overrightarrow{\mathcal{P}})$) le groupe orthogonal (cf. II.1.2) (resp. le groupe spécial orthogonal (cf. II.1.2.ii))) pour la structure euclidienne sur $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.

Définition IV.4.1 On appelle *isométrie affine de* $\mathcal{P}$ une application $i : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ vérifiant, pour tout couple (A, B) de points de $\mathcal{P}$,

$$\delta(i(A), i(B)) = \delta(A, B) . \qquad \text{IV.4.1.1}$$

Remarque IV.4.2 Le terme d'isométrie affine employé dans la définition IV.4.1 pourrait laisser croire qu'une isométrie affine est une application affine (ce qui s'avérera être par la suite (cf. IV.4.4.)) mais il faut le comprendre pour l'instant uniquement pour distinguer une telle isométrie d'une isométrie vectorielle (cf. II.1.1); les deux notions n'étant d'ailleurs absolument pas indépendantes.

Lemme IV.4.3 *L'image d'un parallélogramme par une isométrie affine est un parallélogramme; plus précisément, étant donnés une isométrie i et quatre points A, B, C, D de $\mathcal{P}$, A, B, D, C est un parallélogramme (cf. III.1.1) si et seulement si $i(A), i(B), i(D), i(C)$ est un parallélogramme.*

Preuve : Trois quelconques des points A, B, C, D sont alignés (cf. III.4.1,) si et seulement si il en est de même pour leurs images. Il suffit pour cela d'utiliser les caractérisations III.4.2.g) et III.4.2.h) dans la proposition III.4.2.

Supposons maintenant que A, B, D, C est un parallélogramme et notons O le milieu commun de $[A, D]$ et $[B, C]$ (cf. III.4.2.c).) On a alors

$$\begin{aligned} \delta(O, A) &= \delta(O, D) \\ &\text{et} \\ \delta(O, B) &= \delta(O, C) \end{aligned}$$

et A, O, D , (resp. B, O, C ,) sont alignés (cf. III.3.4.iii).)

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \delta(i(O), i(A)) &= \delta(i(O), i(D)) \\ &\text{et} \\ \delta(i(O), i(B)) &= \delta(i(O), i(C)) \end{aligned}$$

et que $i(A), i(O), i(D)$, (resp. $i(B), i(O), i(C)$,) sont alignés d'après le critère III.4.2.g).

Il en résulte que $i(O)$ est le milieu commun de $[i(A), i(D)]$ et $[i(B), i(C)]$; ce qui implique que $i(A), i(B), i(D), i(C)$ est un parallélogramme d'après III.4.2.c).

Notons que si l'on suppose réciproquement que $i(A), i(B), i(D), i(C)$ est un parallélogramme, il n'est pas difficile de montrer qu'il en est de même pour A, B, D, C . Cependant ce résultat peut se déduire de manière tautologique du fait qu'une isométrie affine est bijective et que sa réciproque est une isométrie affine IV.4.3.ii).1. Or nous n'aurons pas besoin du sens réciproque du lemme IV.4.3 pour établir la proposition (cf. IV.4.3.ii).1) ; mais seulement du sens direct.

Remarque IV.4.1 i) On aurait pu dégager un lemme pour établir qu'une isométrie affine préserve l'alignement ; ce qui apparaît clairement dans la démonstration du lemme IV.4.3.

ii) On pourrait établir un résultat analogue au lemme IV.4.3 sans supposer que i est une isométrie d'un plan, mais d'un espace affine de dimension quelconque. Ceci a un intérêt car, comme nous allons le voir par la suite, le lemme IV.4.3 a pour conséquence qu'une isométrie affine est une application <u>affine</u> (cf. IV.4.4.)

Il faudrait alors prouver que si quatre points sont coplanaires, *i.e.* situés dans un même plan, leur images par une isométrie le sont encore, après quoi, on pourrait se ramener au cas du plan.

Lemme IV.4.2 *Étant donnée une isométrie affine $i : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$, il existe une application $\iota : \overrightarrow{\mathcal{P}} \to \overrightarrow{\mathcal{P}}$ telle que pour tout $(A, B) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}$,*

$$\overrightarrow{i(A)i(B)} = \iota(\overrightarrow{AB}) .$$

De plus, ι est additive i.e. pour tout $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in \overrightarrow{\mathcal{P}} \times \overrightarrow{\mathcal{P}}$,

$$\iota(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \iota(\overrightarrow{u}) + \iota(\overrightarrow{v}) . \qquad \textit{IV.4.2.1}$$

Preuve : Étant donnés quatre points A, B, A', B' tels que

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} ,$$

$$A, B, B', A' \text{ est un parallélogramme}$$

(cf. III.1.1) (NB dans le cas où les quatre points A, B, A', B' seraient alignés ce ne serait pas vrai au sens strict mais on laisse le soin au lecteur de vérifier que dans ce cas également, l'argument est valable.) Il s'ensuit, d'après le lemme IV.4.3, que

$$i(A), i(B), i(B'), i(A') \text{ est un parallélogramme ;}$$

ce qui implique :

$$\overrightarrow{i(A)i(B)} = \overrightarrow{i(A')i(B')} ;$$

c'est-à-dire que l'application

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{P}\times\mathcal{P} & \to & \overrightarrow{\mathcal{P}} \\ (A,B) & \mapsto & \overrightarrow{i(A)i(B)} \end{array}$$

ne dépend pas du bipoint (A,B) mais de sa classe selon la relation d'équipollence (cf. III.1.2) et définit donc une application ι du quotient $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ de $\mathcal{P}\times\mathcal{P}$ par la relation d'équipollence dans $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.

Étant donnés deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$, et quatre points A, B, C, D tels que

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{AB} & := & \overrightarrow{u} \\ \overrightarrow{BC} & := & \overrightarrow{v} \\ \overrightarrow{AD} & := & \overrightarrow{u}+\overrightarrow{v} , \end{array}$$

si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires, A, B, D, C est un parallélogramme (sinon il faut là aussi légèrement adapter l'argument,) et l'identité IV.4.2.1 découle immédiatement du lemme IV.4.3.

Lemme IV.4.1 *Étant donnée une isométrie affine $i : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$, l'application ι définie par le lemme IV.4.2 conserve la norme et le produit scalaire sur $\overrightarrow{\mathcal{P}}$; plus précisément, pour tout couple $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ d'éléments de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$,*

i)

$$||\iota(\overrightarrow{u})|| = ||\overrightarrow{u}|| ;$$

ii)

$$\langle\iota(\overrightarrow{u}), \iota(\overrightarrow{v})\rangle = \langle\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\rangle .$$

Preuve :

i Résulte immédiatement de la définition de ι .

ii

$$\begin{array}{rcl} \langle\iota(\overrightarrow{u}), \iota(\overrightarrow{v})\rangle & \overset{=}{\text{(cf. I.2.5.2,)}} & \frac{1}{4}[||\iota(\overrightarrow{u})+\iota(\overrightarrow{v})||^2 - ||\iota(\overrightarrow{u})-\iota(\overrightarrow{v})||^2] \\ & \overset{=}{\text{(cf. IV.4.2.1,)}} & \frac{1}{4}[||\iota(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})||^2 - ||\iota(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})||^2] \\ & \overset{=}{\text{(i)}} & \frac{1}{4}[||\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}||^2 - ||\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}||^2] \\ & \overset{=}{\text{(cf. I.2.5.2,)}} & \langle\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\rangle . \end{array}$$

Lemme IV.4.1 *Étant donnée une isométrie affine* $i \ : \ \mathcal{P} \ \to \ \mathcal{P}$ *, pour tout vecteur* $\overrightarrow{u} \ \in \ \overrightarrow{\mathcal{P}}$ *et tout nombre réel* λ *,*

$$\iota(\lambda \overrightarrow{u}) \ = \ \lambda \iota(\overrightarrow{u}) \ ,$$

(où ι *est l'application définie dans le lemme IV.4.2.)*

Preuve : Pour tout $\overrightarrow{u} \ \in \ \overrightarrow{\mathcal{P}}$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} ||\iota(\lambda \overrightarrow{u})|| & \underset{\text{(cf. IV.4.1.i),)}}{=} ||\lambda \overrightarrow{u}|| \\ & = \mid \lambda \mid ||\overrightarrow{u}|| \\ & \underset{\text{(cf. IV.4.1.i),)}}{=} \mid \lambda \mid ||\iota(\overrightarrow{u})|| \ . \end{aligned} \qquad \text{IV.4.1}$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned} \mid \langle \iota(\overrightarrow{u}), \iota(\lambda \overrightarrow{u}) \rangle \mid & \underset{\text{(cf. IV.4.1.ii),)}}{=} \mid \langle \overrightarrow{u}, \lambda \overrightarrow{u} \rangle \mid \\ & = \mid \lambda \mid ||\overrightarrow{u}||.||\overrightarrow{u}|| \\ & \underset{\text{(cf. IV.4.1,)}}{=} ||\iota(\overrightarrow{u})||.||\iota(\lambda \overrightarrow{u})|| \ . \end{aligned} \qquad \text{IV.4.2}$$

Il résulte, par ailleurs, de cette dernière série d'égalités, par la réciproque de l'inégalité de Cauchy-Schwarz (cf. I.2.7.ii),) que $\iota(\overrightarrow{u})$ et $\iota(\lambda \overrightarrow{u})$ sont colinéaires. Enfin, combinée avec ce résultat, l'égalité $||\iota(\lambda \overrightarrow{u})|| = \mid \lambda \mid ||\iota(\overrightarrow{u})||$ (cf. IV.4.1,) montre que l'on a soit

$$\iota(\lambda \overrightarrow{u}) \ = \ \lambda \iota(\overrightarrow{u}) \ ,$$

soit

$$\iota(\lambda \overrightarrow{u}) \ = \ -\lambda \iota(\overrightarrow{u}) \ .$$

On montre que cette deuxième égalité implique nécessairement, par le fait que i est une isométrie affine, que $\lambda = 0$; ce qui achève la preuve.

Remarque IV.4.3 On doit prêter une grande attention à l'ordre dans lesquels les lemmes IV.4.2 à IV.4.1 sont démontrés car on s'apercevra, en étudiant attentivement les preuves, qu'on ne peut effectuer la démarche dans un autre ordre. Par exemple, en effet, il est nécessaire de savoir qu'une isométrie est "additive" avant de pouvoir démontrer qu'elle conserve le produit scalaire, cette dernière propriété servant à démontrer qu'elle est compatible à la multiplication par un scalaire.

Ce dernier résultat pourrait s'obtenir par un argument de densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ mais il faudrait auparavant avoir dégagé quelques propriétés topologiques (pas forcément difficiles) des espaces affines euclidiens.

Proposition IV.4.4 *i) Une isométrie affine* $i \ : \ \mathcal{P} \ \to \ \mathcal{P}$ *est une application affine (cf. IV.1.1,) dont l'application linéaire associée* $\overrightarrow{i}$ *est une isométrie vectorielle (cf. II.1.1); i.e. un élément de* $\mathcal{O}(\overrightarrow{\mathcal{P}})$ *.*

ii) Réciproquement, si f est une application affine telle que $\overrightarrow{f}$ est une isométrie vectorielle (cf. II.1.1) f est une isométrie affine.

Preuve :

i L'application ι donnée dans le lemme IV.4.2 est de manière évidente l'application linéaire (cf. IV.4.2.1,) (cf. IV.4.1) $\overrightarrow{i}$ associée à i et possède les propriétés requises grâce au lemme IV.4.1.

ii Soit f une application affine telle que $\overrightarrow{f}$ est une isométrie vectorielle. Pour tout couple
$(A, B) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}$,

$$\begin{aligned} \delta(f(A), f(B)) &= ||\overrightarrow{f(A)f(B)}|| \\ &= ||\overrightarrow{f}(\overrightarrow{AB})|| \\ &= ||\overrightarrow{AB}|| \\ &= \delta(A, B) . \end{aligned}$$

Définition IV.4.1 Une isométrie affine i de $\mathcal{P}$ sera appelée *directe* ou positive, (resp. *indirecte ou négative*,) si son application linéaire sous-jacente $\overrightarrow{i}$ est dans $\mathcal{SO}(\overrightarrow{\mathcal{P}})$, (resp. $\mathcal{O}_-(\overrightarrow{\mathcal{P}})$) (cf. II.1.2.)

Exemple IV.4.2 On remarque facilement qu'une translation (cf. IV.2.1,) ainsi qu'une symétrie orthogonale (cf. IV.3.2) sont des isométries.

Proposition IV.4.3 *i) L'ensemble $\mathcal{I}$ des isométries affines de $\mathcal{P}$ muni de la loi de composition $\circ$ est un groupe.*

ii) Pour toute isométrie affine $i \ : \ \mathcal{P} \to \mathcal{P}$,

$$\text{Vect}\{i^{-1}\} = \overrightarrow{i}^{-1} . \qquad (1)$$

iii) L'application naturelle

$$\begin{aligned} (\mathcal{I}, \circ) &\to (\mathcal{O}(\overrightarrow{\mathcal{P}}), \circ) \\ i &\mapsto \overrightarrow{i} \end{aligned}$$

est un morphisme surjectif de groupes dont le noyau est le sous-groupe des translations $\mathcal{T}(\mathcal{P})$.

Preuve :

i) Il est clair que la composée de deux isométries affines est encore une isométrie affine. En outre, l'identité de $\mathcal{P}$ est bien évidemment une isométrie affine.

Soit $i \in \mathcal{I}$ une isométrie affine.

Choisissons un point $A \in \mathcal{P}$ et définissons $j : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ par

$$j(M) := A + \overrightarrow{i^{-1}}(\overrightarrow{i(A)M})$$

pour tout $M \in \mathcal{P}$. Rappelons que $\overrightarrow{i^{-1}}$ a un sens puisque $\overrightarrow{i} \in \mathcal{O}(\overrightarrow{\mathcal{P}})$.

Pour tout couple $(P, Q) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}$,

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{j(P)j(Q)} & = & \overrightarrow{[A + \overrightarrow{i^{-1}}(\overrightarrow{i(A)P})][A + \overrightarrow{i^{-1}}(\overrightarrow{i(A)Q})]} \\ & \underset{\text{(cf. III.1.2.3,)}}{=} & \overrightarrow{[A + \overrightarrow{i^{-1}}(\overrightarrow{i(A)P})]A} + \overrightarrow{i^{-1}}(\overrightarrow{i(A)Q}) \\ & \underset{\text{(cf. III.1.2.3,)}}{=} & \overrightarrow{i^{-1}}(\overrightarrow{i(A)Q}) - \overrightarrow{i^{-1}}(\overrightarrow{i(A)P}) \\ & = & \overrightarrow{i^{-1}}(\overrightarrow{i(A)Q} - \overrightarrow{i(A)P}) \\ & = & \overrightarrow{i^{-1}}(\overrightarrow{PQ}) \end{array}$$

ce qui prouve que j est affine d'application linéaire associée $\overrightarrow{i^{-1}}$ qui est une isométrie vectorielle et donc que j est une isométrie affine d'après la proposition IV.4.4.ii).

On a dans le même temps établi la formule IV.4.3.ii).1, si l'on montre que j est bien l'application réciproque de i :

Pour tout point $M \in \mathcal{P}$,

$$\begin{array}{rcl} i(j(M)) & = & i[A + \overrightarrow{i^{-1}}(\overrightarrow{i(A)M})] \\ & \underset{\text{(cf. IV.1.1,)}}{=} & i(A) + \overrightarrow{i}[\overrightarrow{i^{-1}}(\overrightarrow{i(A)M})] \\ & = & i(A) + \mathrm{Vect}\{i(A)M\} \\ & \underset{\text{(cf. III.1.2.4,)}}{=} & M \ ; \end{array}$$

ce qui prouve que j est un inverse à droite pour i .

De même, pour tout $M \in \mathcal{P}$,

$$\begin{array}{rcl} j(i(M)) & = & A + \overrightarrow{i^{-1}}(\overrightarrow{i(A)i(M)}) \\ & = & A + \overrightarrow{i^{-1}}[\overrightarrow{i}(\overrightarrow{AM})] \\ & = & A + \overrightarrow{AM} \\ & = & M \ ; \end{array}$$

ce qui prouve que j est un inverse à gauche pour i .

ii) A déjà été prouvé ci-dessus.

iii) Ce point est laissé en exercice.

Théorème IV.4.4 *i) Étant donnés trois points non alignés A, B, C et trois points A', B', C' de $\mathcal{P}$, il existe une unique application affine $f \ : \ \mathcal{P} \ \to \ \mathcal{P}$ tel que*

$$\begin{aligned} f(A) &= A' \\ f(B) &= B' \\ f(C) &= C' \, . \end{aligned}$$

ii) Étant donnés deux points distincts A et B de $\mathcal{P}$ et A', B' deux points de $\mathcal{P}$ il existe une unique isométrie affine directe, (resp. négative,) $i \ : \ \mathcal{P} \ \to \ \mathcal{P}$ telle que

$$\begin{aligned} i(A) &= A' \\ i(B) &= B' \end{aligned}$$

si et seulement si

$$\delta(A, B) \ = \ \delta(A', B') \ .$$

Preuve :

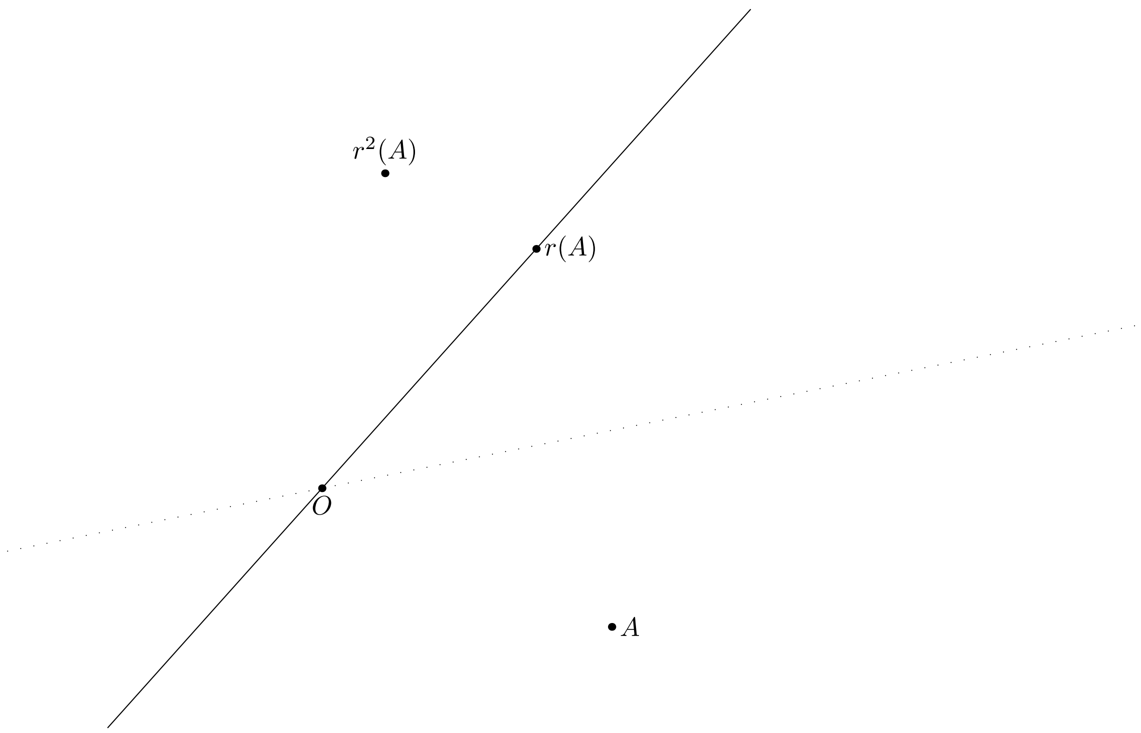
i Est une conséquence facile du lemme IV.1.2.

ii Est une conséquence de (i) et du théorème II.4.1.

Théorème IV.4.1 *Soit*

$$r \ \in \ \mathcal{I} \text{ telle que } \overrightarrow{r} \ \in \ \mathcal{SO}(\overrightarrow{\mathcal{P}}) \text{ et } \overrightarrow{r} \neq \mathrm{Id},$$

alors r possède un unique point fixe.



Preuve :

Unicité Si $A \in \mathcal{P}$ est un point fixe par r, tout point $B \neq A$ n'est pas fixe par r. En effet, si r avait deux points fixes distincts, $\overrightarrow{r}$ aurait un vecteur fixe, ce qui impliquerait que $\overrightarrow{r} = \mathrm{Id}$ par le théorème II.4.1. S'il existe, le point fixe de r est unique.

Existence Soit $A \in \mathcal{P}$. Si A est fixe par r , c'est l'unique point fixe cherché.

Si A n'est pas fixe, on peut n'envisager que le cas où $\overrightarrow{r} \neq -\mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{P}}}$; en effet, si $\overrightarrow{r} = -\mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{P}}}$, r est une homothétie de rapport -1 (cf. IV.2.3) qui a un unique point fixe O qui est le milieu de $[A, r(A)]$.

Comme

$$r \text{ est bijective, } r^2(A) \neq r(A) .$$

Si maintenant $\overrightarrow{r} \neq -\mathrm{Id}$, $\overrightarrow{Ar(A)}$ et $\overrightarrow{r(A)r^2(A)} = \overrightarrow{r}(\overrightarrow{Ar(A)})$ ne sont pas colinéaires. S'ils l'étaient, en effet, $\overrightarrow{Ar(A)}$ serait un vecteur propre pour $\overrightarrow{r}$ ce qui impliquerait $\overrightarrow{r} = \mathrm{Id}$ ou $-\mathrm{Id}$. Il résulte de ce qui précède que les médiatrices respectives de $[A, r(A)]$ et $[r(A), r^2(A)]$ ne sont pas parallèles et donc sécantes en un point O (cf. III.4.3.)

Soit r' l'unique isométrie affine directe (cf. IV.4.4,) telle que $r'(O) = O$ et $r'(A) = r(A)$. Comme O appartient à la médiatrice de $[A, r(A)]$, (resp. de $[r(A), r^2(A)]$,)

$$\delta(O, A) \;=\; \delta(O, r(A)) \;=\; \delta(O, r^2(A)) \,.$$

Par ailleurs comme r est une isométrie

$$\delta(r(A), A) \;=\; \delta(r(A), r^2(A)) \,.$$

Puisque $O \neq r(A)$, la droite $(Or(A))$ est la médiatrice de $[A, r^2(A)]$. Notons s la symétrie orthogonale par rapport à $(Or(A))$ (cf. IV.3.2.) Il s'ensuit que $s(A) = r^2(A)$ et $s(r^2(A)) = A$.

Rappelons enfin que l'application linéaire $\overrightarrow{s}$ associée à s appartient à $\mathcal{O}_-(\overrightarrow{\mathcal{P}})$ (cf. IV.3.3.) On a donc :

$$\begin{array}{rcl}
r'(r(A)) & = & O + \overrightarrow{Or'(r(A))} \\
 & = & O + \overrightarrow{r'(O)r'(r(A))} \\
 & = & O + \mathrm{Vect}\{r'\}(\overrightarrow{Or(A)}) \\
 & \underset{\text{(cf. II.2.1,)}}{=} & O + \overrightarrow{s}[\mathrm{Vect}\{r'\}^{-1}[\overrightarrow{s}(\overrightarrow{Or(A)})]] \\
 & = & O + \overrightarrow{s}[\mathrm{Vect}\{r'\}^{-1}(\overrightarrow{s(O)s(r(A))})] \\
 & = & O + \overrightarrow{s}[\mathrm{Vect}\{r'\}^{-1}(\overrightarrow{Or(A)})] \\
 & = & O + \overrightarrow{s}(\overrightarrow{r'^{-1}(O)r'^{-1}(r(A))}) \\
 & = & O + \overrightarrow{s}(\overrightarrow{OA}) \\
 & = & O + \overrightarrow{s(O)s(A)} \\
 & = & O + \overrightarrow{Or^2(A)} \\
 & = & r^2(A) \,;
\end{array}$$

c'est-à-dire que $r'(A) = r(A)$ et $r'(r(A)) = r^2(A)$; ce qui implique, d'après le théorème IV.4.4 que $r = r'$ donc que O est un point fixe pour r .

Définition IV.4.1 On appelle *rotation affine* une isométrie affine r dont l'application linéaire sous-jacente $\overrightarrow{r}$ appartient à $\mathcal{SO}(\overrightarrow{\mathcal{P}})$.

Une rotation affine possède un point fixe appelé *centre*. Celui-ci est unique si $\overrightarrow{r} \neq \mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{P}}}$.

On appelle *angle de la rotation* l'angle $\omega^{-1}(\overrightarrow{r})$ (cf. II.5.1) qui s'identifie à $\angle \overrightarrow{u}\,\overrightarrow{r}(\overrightarrow{u})$ pour tout vecteur unitaire $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$.

Si une orientation est choisie sur $\mathcal{P}$ (cf. II.1.8,) on appellera parfois *angle de la rotation* sa mesure (cf. II.7.1.)

Le centre et l'angle d'une rotation affine sont appelés ses *éléments caractéristiques.*

Définition IV.4.2 Étant donnée une droite $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$, on appelle *réflexion orthogonale d'axe* $\mathcal{D}$ une symétrie orthogonale (cf. IV.3.2,) d'axe $\mathcal{D}$.

Théorème IV.4.3 *Une symétrie (cf. IV.3.2,) est une réflexion orthogonale si et seulement si c'est une isométrie.*

Preuve : Soit s une symétrie du plan $\mathcal{P}$ par rapport à une droite $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$. Son application linéaire sous-jacente vérifie toujours $\overrightarrow{s}^2 = \mathrm{Id}$ (cf. IV.3.3.ii).1.)

Il faut ensuite appliquer la proposition II.3.1 à $\overrightarrow{s}$.

Théorème IV.4.1 (Classification des isométries du plan euclidien) *i) Si*

$$i \in \mathcal{I} \textit{ est une isométrie affine directe,}$$

i est :

a) soit une translation ($\overrightarrow{i} = \mathrm{Id}$,)

b) soit une rotation

$$(\overrightarrow{i} \in \mathcal{SO}(\overrightarrow{\mathcal{P}}) \setminus \{\mathrm{Id}\} ;)$$

ii) Si $i \in \mathcal{I}$ est une isométrie indirecte, ($\overrightarrow{i} \in \mathcal{O}_-(\overrightarrow{\mathcal{P}})$,) i est

i soit une réflexion orthogonale (i possède un point fixe,)

ii soit la composée commutative d'une réflexion orthogonale et d'une translation dans la direction de l'axe de réflexion (cf. IV.3.2.)

Preuve : Il suffit de rassembler les résultats de cette section et les résultats sur les symétries contenus dans la section IV.3.

Théorème IV.4.1 *Soient s_1 et s_2 deux réflexions orthogonales d'axes respectifs $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$. La composée $s_2 \circ s_1$ est soit une translation (cf. IV.2.1,) si $\mathrm{Vect}\{s_1\} = \mathrm{Vect}\{s_2\}$, soit la rotation affine de centre $\{O\} = \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$ et d'angle $2\angle\overrightarrow{u_1}\overrightarrow{u_2}$ (où $\mathrm{Vect}\{u_1\}$, (resp. $\mathrm{Vect}\{u_2\}$,) est un vecteur directeur de $\mathcal{D}_1$, (resp. $\mathcal{D}_2$.)*

Preuve : Puisque $\mathcal{I}$ est un groupe, (cf. IV.4.3,) $s_2 \circ s_1$ est une isométrie affine d'isométrie vectorielle sous-jacente $\iota := \mathrm{Vect}\{s_2\} \circ \mathrm{Vect}\{s_1\}$ (cf. IV.4.3.iii).)

Si $\iota = \mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{P}}}$, $s_2 \circ s_1$ est une translation d'après IV.4.3.iii).

Sinon $\iota \in \mathcal{SO}(\overrightarrow{\mathcal{P}})$. D'après le théorème IV.4.1 $s_2 \circ s_1$ est une rotation. Il est très facile de voir que $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$ est un point fixe pour $s_2 \circ s_1$. On détermine ainsi le centre de la rotation $s_2 \circ s_1$.

L'angle ne concerne que l'application linéaire sous-jacente ι ; sa détermination résulte de la proposition II.4.3.

Proposition IV.4.1 *Étant donnée une rotation r de centre O et d'angle $\angle\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v}$, (resp. une translation $T_{\overrightarrow{u}}$,) et une réflexion s d'axe $\mathcal{D}$ tel que $O \in \mathcal{D}$, (resp. $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{D}}^{\perp}$,) il existe une unique réflexion s' d'axe $\mathcal{D}'$ telle que $O \in \mathcal{D}'$, $2\angle\mathcal{D}\mathcal{D}'$ (cf. $\overset{=}{\text{II}}$.5.1,) $\omega^{-1}(\overrightarrow{r})$, (resp. $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles,) et $s' \circ s = r$, (resp. $s' \circ s = T_{\overrightarrow{u}}$.)*

Preuve : On ne traitera que le cas de la rotation, le cas de la translation étant laissé en exercice.

Si s' existe alors

$$\begin{array}{lrcl} & s' \circ s & = & r \\ \text{(cf. IV.}\overset{\Leftrightarrow}{4}\text{.3.ii).1,)} & s' & = & r \circ s \\ \Rightarrow & \mathrm{Vect}\{s'\} & = & \mathrm{Vect}\{r \circ s\} \\ \text{(cf. I}\overset{\Rightarrow}{\text{V}}\text{.1.4,)} & \mathrm{Vect}\{s'\} & = & \overrightarrow{r} \circ \overrightarrow{s} \ ; \end{array}$$

ce qui implique que $\mathrm{Vect}\{s'\}$ est une isométrie vectorielle négative (cf. II.1.4.)

Par ailleurs, $r(s(O)) = r(O) = O$; s' a donc un point fixe et d'après le théorème IV.4.1.ii), s' est une réflexion orthogonale.

Comme $s'(O) = O$, l'axe $\mathcal{D}'$ de s' contient nécessairement O . Enfin $\overrightarrow{\mathcal{D}'}$ est entièrement déterminée par l'espace propre associé à la valeur propre -1 de $\mathrm{Vect}\{r \circ s\}$ (cf. II.3.1.viii).)

La détermination de l'angle entre les droites $\overrightarrow{\mathcal{D}}$ et $\overrightarrow{\mathcal{D}'}$ (cf. II.8.5) résulte ici encore de la proposition II.4.3.

On a en fait, au fur et à mesure de la preuve de l'unicité de s', montré son existence en la construisant.

Théorème IV.4.1 *Toute isométrie affine est le produit d'au plus trois réflexions.*

Preuve : En effet, si i est une isométrie directe, i est une rotation et se décompose comme produit de deux réflexions (cf. IV.4.1.)

Si i est une isométrie négative, elle est soit une réflexion soit une réflexion composée avec une translation (cf. IV.4.1.ii).) laquelle se décompose en produit de deux réflexions.