V . –Quelques propriétés du plan affine euclidien

Dans ce chapitre $\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien (cf. III.4.1.) On notera $\langle \bullet, \bullet \rangle$ le produit scalaire sur $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ (cf. I.2.3.i)) et $||\overrightarrow{u}||$ la norme euclidienne de tout vecteur $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$ (cf. I.2.6.)

On notera δ la distance euclidienne (cf. III.1.3.ii)) sur $\mathcal{P}$.

Enfin on notera $\mathcal{O}(\overrightarrow{\mathcal{P}})$ (resp. $\mathcal{SO}(\overrightarrow{\mathcal{P}})$) le groupe orthogonal (cf. II.1.2) (resp. le groupe spécial orthogonal (cf. II.1.2.ii))) pour la structure euclidienne sur $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.

On adoptera parfois dans ce chapitre une notation condensée. Pour deux vecteurs unitaires u et v de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ $\omega(\angle uv)$ est une rotation *i.e.* un élément de $\mathcal{SO}(\overrightarrow{\mathcal{P}})$ (cf. II.5.1,) que l'on peut, par conséquent, appliquer à n'importe quel vecteur $x \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$. On notera alors simplement

$$\angle uv(x) := [\omega(\angle uv)](x) . \qquad \textbf{V.1}$$

On pourrait tout aussi bien noter

$$x + \angle uv$$

et l'on s'apercevrait que le symbole $+$ ne désigne certes pas une opération interne, mais qu'il a les mêmes propriétés que le symbole $+$ défini en III.1.2, les points étant remplacés par des vecteurs et le groupe des vecteurs étant remplacé par le groupe des angles.

V.2 . –Cocyclicité dans le plan affine euclidien

Lemme V.2.1 *Soient A et B deux points distincts de $\mathcal{P}$, et $\angle \overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v} \neq \hat{0}$ un angle orienté de vecteurs de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ (cf. II.5.1.)*

Alors il existe un unique point O appartenant à la médiatrice $\mathcal{D}$ de $[A, B]$ (cf. III.4.3,) tel que

$$\angle \overrightarrow{OA}\,\overrightarrow{OB} = \angle \overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v} .$$

Preuve :

- Soit s la réflexion orthogonale d'axe $\mathcal{D}$ (cf. IV.4.2.) Soit $\overrightarrow{u'}$ un vecteur unitaire de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ tel que

  $$\angle \overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v}(\overrightarrow{u}') \overset{\text{(cf. V.1,)}}{=} \overrightarrow{s}(\overrightarrow{u}') .$$

  Un tel vecteur existe toujours puisque l'équation précédente équivaut à

  $$\overrightarrow{s}[\angle \overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v}(\overrightarrow{u}')] = \overrightarrow{u}' .$$

  Or $\overrightarrow{s} \circ \angle \overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v}$ est une isométrie négative qui possède toujours un vecteur fixe (cf. II.3.1.viii).) Posons

  $$\overrightarrow{v'} := \overrightarrow{s}(\overrightarrow{u'}) = \angle \overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v}(\overrightarrow{u'}) . \qquad \text{V.2.1}$$

- S'il existe un point $O \in \mathcal{D}$ tel que

$$\angle\overrightarrow{OA}\overrightarrow{OB} = \angle\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v}\ ,$$

d'une part $s(O) = O$ et

$$\overrightarrow{s}(\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OB}\ ; \qquad \text{V.2.2}$$

ce qui implique

$$\hat{\overrightarrow{s}}(\angle\overrightarrow{OA}\overrightarrow{u'})\ \overset{=}{\text{(cf. II.6.1,)}}\ \angle\overrightarrow{v'}\overrightarrow{OB}\ . \qquad \text{V.2.3}$$

D'autre part,

$$\angle\overrightarrow{OA}\overrightarrow{OB} = \angle\overrightarrow{u'}\,\overrightarrow{v'}\ \overset{\Leftrightarrow}{\text{(cf. II.5.3,)}}\ \angle\overrightarrow{OA}\overrightarrow{u'} = \angle\overrightarrow{OB}\overrightarrow{v'}\ .$$

Cette dernière identité et V.2.3 impliquent que $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{u'}$, (resp. $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{v'}$) sont colinéaires. Il en résulte que

$$\begin{aligned} O &\in A + \mathbb{R}\overrightarrow{u'} \text{ et} \\ O &\in B + \mathbb{R}\overrightarrow{v'}\ . \end{aligned} \qquad \text{V.2.4}$$

- [*] On ne peut avoir $\overrightarrow{u'} = \overrightarrow{v'}$ car on a supposé que $\angle\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v} \neq \hat{0}$.

[**] Si $\overrightarrow{v'} = -\overrightarrow{u'}$, il est facile de voir que le milieu O de $[A, B]$ est le seul point qui réponde à la question.

[***] Si $\overrightarrow{u'} \neq -\overrightarrow{v'}$, les droites $A + \mathbb{R}\overrightarrow{u'}$ et $B + \mathbb{R}\overrightarrow{v'}$ ne sont pas parallèles et par conséquent, sont sécantes (cf. III.4.3) en un unique point O ; ce qui prouve l'unicité d'un point O répondant à la question.

[****] On aura finalement prouvé l'existence d'un point O répondant à la question si l'on prouve que

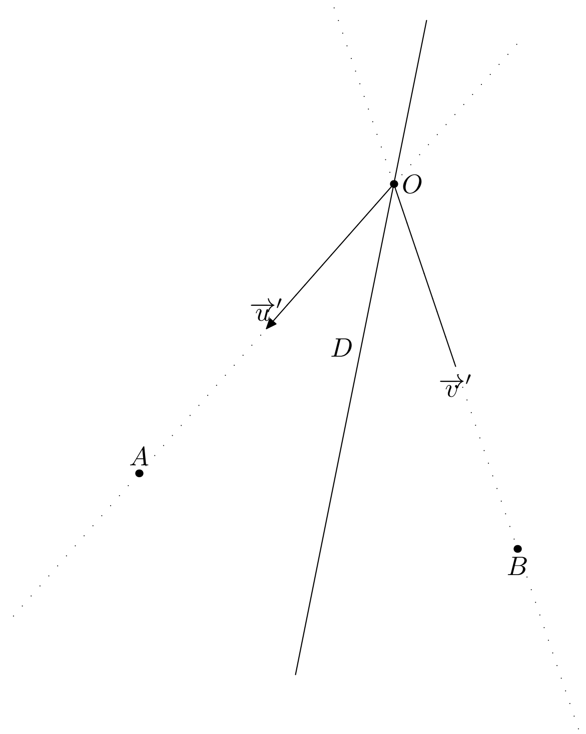
$$A + \mathbb{R}\overrightarrow{u'} \cap B + \mathbb{R}\overrightarrow{v'} \subset \mathcal{D}\ .$$

(cf. V.2.4.) Remarquons que $s(A) = B$ et $\overrightarrow{s}(\overrightarrow{u'}) = \overrightarrow{v'}$ (cf. V.2.1.) Il s'ensuit que

$$s(A + \mathbb{R}\overrightarrow{u'}) = B + \mathbb{R}\overrightarrow{v'} \text{ et } s(B + \mathbb{R}\overrightarrow{v'}) = A + \mathbb{R}\overrightarrow{u'}\ .$$

Or $O \in A + \mathbb{R}\overrightarrow{u'} \cap B + \mathbb{R}\overrightarrow{v'}$; d'où $s(O) \in A + \mathbb{R}\overrightarrow{u'} \cap B + \mathbb{R}\overrightarrow{v'}$ c'est-à-dire que $s(O) = O$ puisque $A + \mathbb{R}\overrightarrow{u'}$ et $B + \mathbb{R}\overrightarrow{v'}$ sont sécantes. Il en résulte finalement que O

appartient à l'axe $\mathcal{D}$ de la réflexion s .



Proposition V.2.5 (Somme des angles d'un triangle) *La somme des angles d'un triangle ABC est l'angle plat (cf. II.5.1.ii)) c'est-à-dire que sa mesure est égale à π (cf. II.7.1); plus précisément, étant donnés trois points distincts A, B, C de $\mathcal{P}$,*

$$\angle\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC} + \angle\overrightarrow{BC}\overrightarrow{BA} + \angle\overrightarrow{CA}\overrightarrow{CB} \;=\; \hat{\pi} \;=\; \omega^{-1}(-\mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{P}}}) \;;$$

c'est-à-dire

$$\underline{(\widehat{AB, AC})} + \underline{(\widehat{BC, BA})} + \underline{(\widehat{CA, CB})} \;=\; \pi \;.$$

Preuve : C'est une conséquence facile de la relation de Chasles sur les angles : (cf. II.5.3.)

Pour définir la mesure d'un angle, on a, a priori, besoin d'une orientation (cf. II.1.8,) (cf. II.7.1) ; cependant, la mesure de l'angle plat est π quelle que soit l'orientation.

Définition V.2.1 Un triangle ABC est dit *isocèle de sommet A* si

$$\delta(A, B) \;=\; \delta(A, C) \;;$$

c'est-à-dire encore, si A appartient à la médiatrice de $[B, C]$ (cf. III.4.3.)

Proposition V.2.2 *Un triangle ABC est isocèle de sommet A si et seulement si*

$$\angle\overrightarrow{BA}\overrightarrow{BC} = \angle\overrightarrow{CB}\overrightarrow{CA}\,.$$

Preuve :

- Supposons que ABC est isocèle de sommet A et notons $\mathcal{D}$ la médiatrice de $[B,C]$. Si s est la réflexion d'axe $\mathcal{D}$,

$$\begin{array}{rcl} s(A) &=& A \\ s(B) &=& C \\ s(C) &=& B\,; \end{array}$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{array}{rcl} \angle\overrightarrow{BA}\overrightarrow{BC} & \overset{=}{\text{(cf. II.6.1,)}} & -\hat{\vec{s}}(\angle\overrightarrow{BA}\overrightarrow{BC}) \\ & = & -\angle\vec{s}(\overrightarrow{BA})\vec{s}(\overrightarrow{BC}) \\ & = & -\angle\overrightarrow{s(B)s(A)}\overrightarrow{s(B)s(C)} \\ & = & -\angle\overrightarrow{CA}\overrightarrow{CB}\,. \end{array}$$

- Réciproquement, supposons que

$$\angle\overrightarrow{BA}\overrightarrow{BC} = \angle\overrightarrow{CB}\overrightarrow{CA}\,.$$

Soit A' l'unique point de la droite $\mathcal{D}$ tel que

$$\angle\overrightarrow{A'B}\overrightarrow{A'C} \overset{=}{\text{(cf. V.2.1,)}} \angle\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\,.$$

Le triangle $A'BC$ est isocèle et d'après le sens direct de la présente proposition,

$$\angle\overrightarrow{BA'}\overrightarrow{BC} = \angle\overrightarrow{CB}\overrightarrow{CA'}\,.$$

Par ailleurs, on a :

$$\begin{array}{rcl} 2\angle\overrightarrow{BA}\overrightarrow{BA'} & \overset{=}{\text{(cf. II.5.3,)}} & 2(\angle\overrightarrow{BA}\overrightarrow{BC} - \angle\overrightarrow{BA'}\overrightarrow{BC}) \\ & \overset{=}{\text{(cf. V.2.5,)}} & \hat{\pi} - \angle\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AB} - (\hat{\pi} - \angle\overrightarrow{A'C}\overrightarrow{A'B}) \\ & = & \hat{0}\,; \end{array}$$

c'est-à-dire que, d'après la remarque II.5.2.ii),

$$\angle\overrightarrow{BA}\overrightarrow{BA'} = \hat{\pi} \text{ ou } \hat{0}\,;$$

c'est-à-dire, d'après la proposition III.4.2, que les points A, B, A' sont alignés (cf. III.4.1.)
Comme on peut tenir le même raisonnement pour A, C, A' , il s'ensuit que

$$A \in (A'B) \cap (A'C) .$$

Nous laissons le soin au lecteur de préciser ce qui arrive si $(A'B) = (A'C)$, et si nous ne sommes pas dans cette situation, les droites $(A'B)$ et (A', C) sont sécantes en A' ; ce qui implique que $A = A'$.

Définition V.2.1 i) Étant donnés un point $\Omega \in \mathcal{P}$ et un nombre réel $r \geq 0$, on appelle *cercle de centre* Ω *et de rayon* r l'ensemble $\mathcal{C}_{\Omega,r}$ des points $M \in \mathcal{P}$ tels que $\delta(\Omega, M) = r$.

ii) Étant donnés trois points A, B, C non alignés (cf. III.4.1,) de $\mathcal{P}$, il existe un unique cercle $\mathcal{C}_{\Omega,r}$ passant par les points A, B et C appelé *cercle circonscrit au triangle* ABC .

Notons que ceci résulte facilement du fait que les médiatrices de deux côtés distincts du triangle ABC ne sont pas parallèles, et sont donc sécantes en un point équidistant des points A, B, C .

Remarque V.2.2 Remarquons qu'il n'existe aucun cercle contenant trois points alignés, distincts deux à deux ; et que, par conséquent, l'intersection d'un cercle et d'une droite contient 0, 1 ou 2 éléments.

Définition V.2.3 Étant donnés un cercle $\mathcal{C}$ et une droite $\mathcal{D}$, si $\mathcal{C} \cap \mathcal{D} = \{A\}$, on dit que la droite $\mathcal{D}$ est *tangente au cercle* $\mathcal{C}$ *au point* A .

Proposition V.2.4 *Étant donnés un cercle* $\mathcal{C}_{\Omega,r}$ *(*$r > 0$ *,) et une droite* $\mathcal{D}$, $A \in \mathcal{C}_{\Omega,r} \cap \mathcal{D}$, $\mathcal{D}$ *est tangente à* $\mathcal{C}_{\Omega,r}$ *en* A *si et seulement si* (ΩA) *et* $\mathcal{D}$ *sont perpendiculaires (cf. III.4.1.)*

Preuve : Soit $\mathcal{D}'$ la perpendiculaire à $\mathcal{D}$ contenant Ω (cf. III.4.2.ii),) et s la réflexion orthogonale d'axe $\mathcal{D}'$ (cf. IV.4.2.)

Il est clair que $s(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$ et comme $A \in \mathcal{D}$, $s(A) \in \mathcal{D}$. De plus, $s(\Omega) = \Omega$. On a donc :

$$\begin{aligned} \delta(\Omega, s(A)) &= \delta(s(\Omega), s(A)) \\ &= \delta(\Omega, A) ; \end{aligned}$$

c'est-à-dire que $s(A) \in \mathcal{C}_{\Omega,r}$. Il s'ensuit que $s(A) \in \mathcal{C}_{\Omega,r} \cap \mathcal{D}$ donc que $s(A) = A$. Ceci implique que $A \in \mathcal{D}'$ donc que $(\Omega A) = \mathcal{D}'$ donc que (ΩA) est perpendiculaire à $\mathcal{D}$.

La réciproque est laissée en exercice.

Définition V.2.1 Étant donnés un cercle $\mathcal{C}$ de rayon non nul et A un point de $\mathcal{C}$, il existe une unique droite tangente à $\mathcal{C}$ passant par A d'après la proposition V.2.4 ; elle sera donc appelée *la tangente à $\mathcal{C}$ en A* .

Proposition V.2.2 *Soient A, B, C trois points non alignés de $\mathcal{P}$, et Ω le centre du cercle circonscrit au triangle ABC . Alors*

$$\angle\overrightarrow{\Omega B}\overrightarrow{\Omega C} \; = \; 2 * \angle\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC} \, .$$

Preuve :

$$\begin{array}{rl} \angle\overrightarrow{\Omega B}\overrightarrow{\Omega C} \quad \overset{=}{\text{(cf. II.5.3,)}} & \angle\overrightarrow{\Omega B}\overrightarrow{\Omega A} + \angle\overrightarrow{\Omega A}\overrightarrow{\Omega C} \\ \overset{=}{\text{(cf. V.2.5,)}} & \hat{\pi} - \angle\overrightarrow{BA}\overrightarrow{B\Omega} - \angle\overrightarrow{A\Omega}\overrightarrow{AB} + \hat{\pi} - \angle\overrightarrow{AC}\overrightarrow{A\Omega} - \angle\overrightarrow{C\Omega}\overrightarrow{CA} \\ \overset{=}{\text{(cf. V.2.2,)}} & -2\angle\overrightarrow{A\Omega}\overrightarrow{AB} - 2\angle\overrightarrow{AC}\overrightarrow{A\Omega} \\ \overset{=}{\text{(cf. II.5.3,)}} & -2\angle\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AB} \\ \overset{=}{\text{(cf. II.5.2.i),)}} & 2\angle\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC} \, . \end{array}$$

Définition V.2.1 Soient A et B deux points distincts de $\mathcal{P}$ et C un point n'appartenant pas à la droite (AB) . Soit O le projeté orthogonal de C sur (AB) (cf. IV.3.2.)

On appelle *demi-plan ouvert, (resp. fermé,) de frontière (AB) contenant C* l'ensemble des points M de $\mathcal{P}$ tels que $\langle\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OC}\rangle \; > \; 0$, (resp. $\langle\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OC}\rangle \; \geq \; 0$.)

Remarque V.2.2 i) Le point C appartient au demi-plan ouvert de frontière (AB) contenant C .

ii) Le demi-plan ouvert de frontière (AB) contenant C est inclus dans le demi-plan fermé de frontière (AB) contenant C .

iii) Le demi-plan fermé de frontière (AB) contenant C est la réunion du demi-plan ouvert de frontière (AB) contenant C et de la droite (AB) .

iv) Pour tout point C' appartenant au demi-plan ouvert de frontière (AB) contenant C , le demi-plan ouvert (resp. fermé,) contenant C' est le demi-plan ouvert (resp. fermé,) contenant C .

v) Pour tout point D n'appartenant pas au demi-plan fermé de frontière (AB) contenant C , $\mathcal{P}$ est la réunion du demi-plan ouvert contenant D et du demi-plan fermé contenant C .

Proposition V.2.3 *Étant donnés deux points distincts B et C de $\mathcal{P}$ et Ω un point de la médiatrice de $[B, C]$;*

i) si $A \in \mathcal{P}$ est tel que

$$\angle\overrightarrow{\Omega B}\overrightarrow{\Omega C} = 2 * \angle\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC} \qquad 1$$

alors A appartient au cercle de centre Ω passant par B et C .

ii) Si l'on suppose que Ω n'est pas le milieu de $[B, C]$,

- *soit $\langle\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\rangle > 0$ (i.e. l'angle $\angle\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}$ est aigu (cf. II.5.1.iv))) et A appartient au demi-plan ouvert de frontière (BC) contenant Ω ;*
- *soit $\langle\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\rangle < 0$ (i.e. l'angle $\angle\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}$ est obtus (cf. II.5.1.iv))) et A appartient au demi-plan ouvert de frontière (BC) ne contenant pas Ω .*

Preuve :

i Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC . Le point O appartient à la médiatrice de $[B, C]$ et vérifie, par la proposition V.2.2,

$$\angle\overrightarrow{OB}\overrightarrow{OC} = 2 * \angle\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC} .$$

Il s'ensuit que

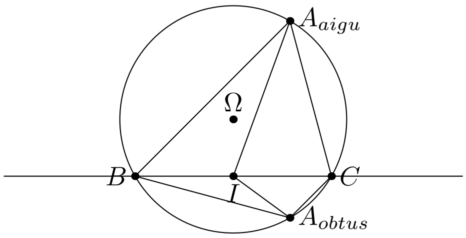
$$\angle\overrightarrow{OB}\overrightarrow{OC} = \angle\overrightarrow{\Omega B}\overrightarrow{\Omega C} .$$

On conclut grâce à l'unicité dans le lemme V.2.1.

ii Les points B, Ω, C n'étant pas alignés, Ω n'est pas le milieu I de $[B, C]$. On a :

$$\begin{aligned}
\langle\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\rangle &= \langle\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}, \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IB}\rangle \\
&= \overrightarrow{AI}^2 - \overrightarrow{IB}^2 \\
&= \overrightarrow{AI}^2 - (\overrightarrow{\Omega B}^2 - \overrightarrow{\Omega I}^2) \\
&= \overrightarrow{AI}^2 - \overrightarrow{\Omega A}^2 + \overrightarrow{\Omega I}^2 \\
&= \langle\overrightarrow{\Omega A} + \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{\Omega A}\rangle + \overrightarrow{\Omega I}^2 \\
&= \langle\overrightarrow{\Omega I}, \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{A\Omega} + \overrightarrow{\Omega I}\rangle \\
&= 2\langle\overrightarrow{\Omega I}, \overrightarrow{AI}\rangle ;
\end{aligned}$$

il en résulte que $\langle\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\rangle$ et $\langle\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{I\Omega}\rangle$ sont de même signe.



Remarque V.2.1 Étudier le point (ii) de la proposition V.2.2 dans le cas où Ω est le milieu de $[B, C]$.

Définition V.2.2 On dit que des points A_i , $_{i\in[1,n]\cap\mathbb{N}}$ sont *cocycliques* s'ils appartiennent à un même cercle.

Corollaire V.2.3 *Pour quatre points A, B, C, D deux à deux distincts et cocycliques*

$$\angle\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC} - \angle\overrightarrow{DB}\overrightarrow{DC} = \hat{0} \text{ ou } \hat{\pi}$$

(cf. II.5.1.ii).)

Preuve : Ce corollaire découle immédiatement de la proposition V.2.2 et de la remarque II.5.2.ii).

Théorème V.2.1 *Étant donnés quatre points A, B, C, D de $\mathcal{P}$, deux à deux distincts ; si*

$$\angle\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC} - \angle\overrightarrow{DB}\overrightarrow{DC} = \hat{0} \text{ ou } \hat{\pi}$$

(cf. II.5.1.ii),) ce qui revient encore à dire que

$$\angle(AB)(AC) = \angle(DB)(DC)$$

(cf. II.8.5,) alors ils sont soit alignés soit cocycliques.

Preuve : Si A, B, C sont alignés

$$\angle\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC} = \hat{0} \text{ ou } \hat{\pi}$$

(cf. III.4.2.) Il s'ensuit que

$$\angle\overrightarrow{DB}\overrightarrow{DC} = \hat{0} \text{ ou } \hat{\pi}$$

donc que B, C, D sont alignés ; ce qui implique finalement que A, B, C, D sont alignés.

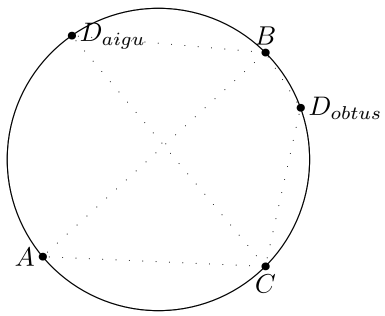
Si A, B, C ne sont pas alignés, notons Ω le centre du cercle circonscrit à ABC . On a alors

$$\begin{aligned} 2\angle\overrightarrow{DB}\overrightarrow{DC} &= 2\angle\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC} \\ &\underset{\text{(cf. V.2.2,)}}{=} \angle\overrightarrow{\Omega B}\overrightarrow{\Omega C} \end{aligned}$$

ce qui prouve, grâce à la proposition V.2.3, que D appartient au cercle circonscrit à ABC .

Remarque V.2.1 On peut proposer le raffinement suivant du théorème précédent qui oblige à prendre quelques précautions avec les hypothèses : On a en effet l'impression qu'il est assez facile de déduire de la proposition V.2.3.ii), que, B et C étant fixés et A, B, C, D étant cocycliques, A et D sont dans le même demi-plan de frontière (BC) (cf. V.2.2,) (resp. sont dans deux demi-plans ouverts de frontière (BC) différents) si et seulement si $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle$ et $\langle \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC} \rangle$ sont de même signe (resp. sont de signes contraires) c'est-à-dire encore si et seulement si les angles $\angle \overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}$ et $\angle \overrightarrow{DB}\overrightarrow{DC}$ sont simultanément aigus ou obtus (resp. l'un aigu l'autre obtus.)

Cette série d'équivalences est en effet facile à établir en veillant cependant à exclure le cas où les produits scalaires ci-dessus seraient nuls, c'est-à-dire les cas où les angles $\angle \overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}$ et $\angle \overrightarrow{DB}\overrightarrow{DC}$ sont droits (cf. II.5.1.iii).)



V.3 . −Quelques remarques concernant les triangles dans le plan euclidien

Dans cette section, A, B, C **sont trois points non alignés de** $\mathcal{P}$.

Définition V.3.1 i) Le triangle ABC est *isocèle de sommet* A si

$$\delta(A,B) \;=\; \delta(A,C)\ ,$$

ii) *équilatéral* si

$$\delta(A,B) \;=\; \delta(B,C) \;=\; \delta(C,A)\ ,$$

iii) *rectangle en* A si

$$\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle \;=\; 0$$

c'est-à-dire si l'angle $\angle \overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}$ est droit (cf. II.5.1.iii).)

Définition V.3.2 i) On appelle *sommets* du triangle ABC les points A, B, C .

ii) On appelle *côtés du triangle* ABC les segments

$$[AB]\ ,\ [BC]\ ,\ [CA]$$

ou les droites

$$(AB)\ ,\ (BC)\ ,\ (CA)\ .$$

iii) On appelle *côté opposé à un sommet* le côté ne contenant pas ce sommet.

iv) On appelle *médianes* du triangle ABC les droites passant par un sommet et le milieu (cf. III.3.3.ii),) du côté opposé.

v) On appelle *hauteur issue d'un sommet du triangle* ABC la droite passant par ce sommet et perpendiculaire (cf. III.4.2.ii),) au côté opposé ; on appelle *pied de la hauteur* son point d'intersection avec ce dernier.

Proposition V.3.3 *i) Le centre de gravité du triangle i.e. l'isobarycentre des points* A, B, C *(cf. III.3.3.iii),) est le point de concours des médianes, c'est-à-dire l'unique point appartenant à la fois aux trois médianes du triangle* ABC *.*

ii) Il existe un point H *appelé orthocentre du triangle* ABC *qui est le point de concours des hauteurs du triangle* ABC *.*

Preuve :

i Est une conséquence très facile de l'associativité du barycentre (cf. III.3.3.iii).)

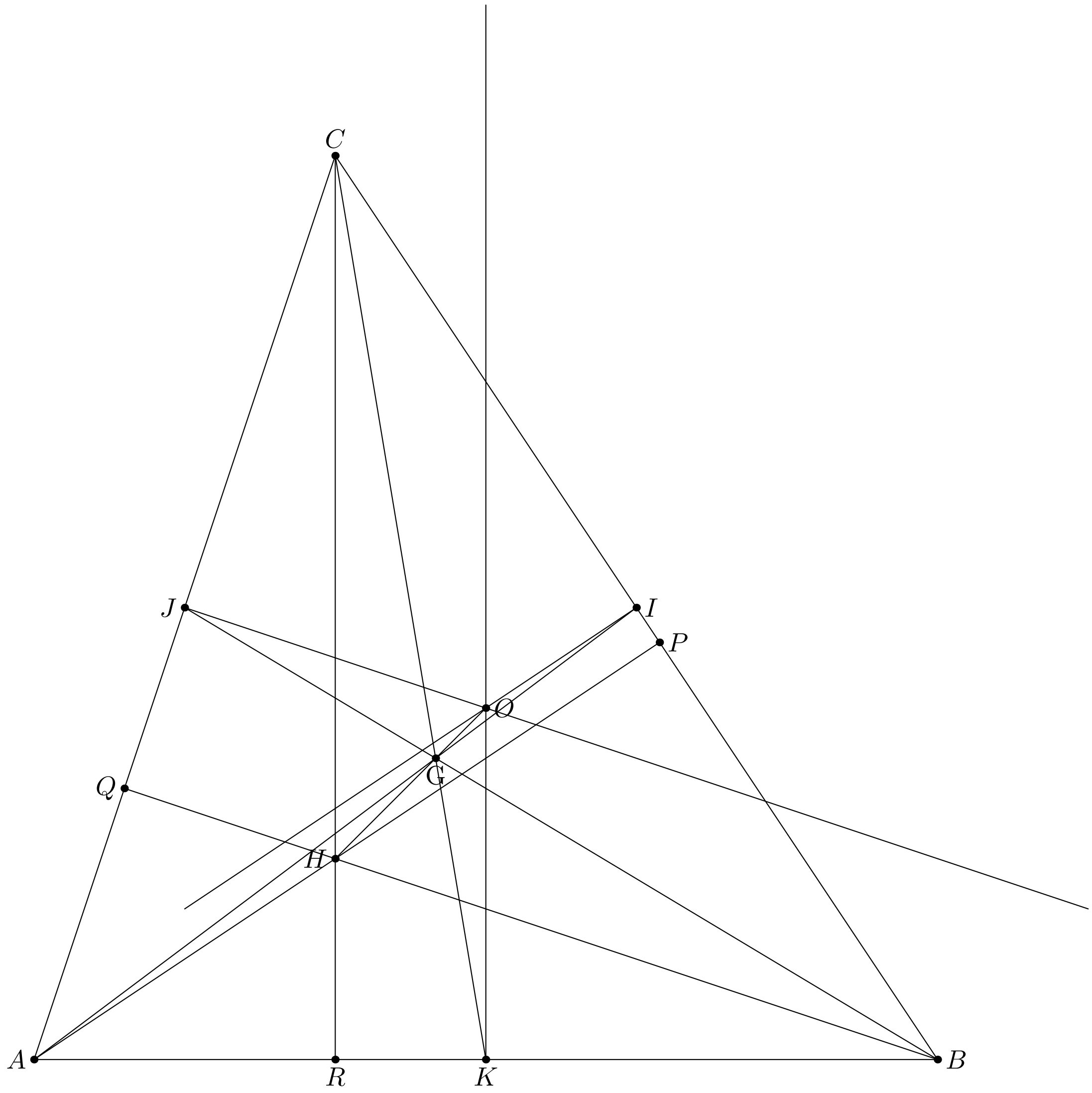
ii Soit $\mathcal{D}_A$, (resp. $\mathcal{D}_B$,) (resp. $\mathcal{D}_C$,) la parallèle à (BC) , (resp. (CA) ,) (resp. (AB) ,) passant par A , (resp. B ,) (resp. C .) Les trois points A, C, B n'étant pas alignés, les droites $\mathcal{D}_A$ et $\mathcal{D}_B$, (resp. $\mathcal{D}_B$ et $\mathcal{D}_C$,) (resp. $\mathcal{D}_C$ et $\mathcal{D}_A$,) sont sécantes en C' , (resp. A' ,) (resp. B' .) On montre, grâce au théorème de Thalès (cf. III.4.1,) que le point A (resp. B ,) (resp. C ,) est le milieu de $[B', C']$, (resp. $[C', A']$,) (resp. $[B', A']$.) Il s'ensuit que la hauteur issue de A (resp. B ,) (resp. C ,) dans le triangle ABC , est la médiatrice du segment $[B', C']$, (resp. $[C', A']$,) (resp. $[A', B']$.) On en déduit que les hauteurs du triangle ABC sont concourantes.

Proposition V.3.1 *Si G désigne le centre de gravité de ABC , H son orthocentre et O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC (cf. V.2.1,) les points O , H et G sont alignés.*

Preuve : Cette démonstration est un exercice.

Définition V.3.1 Si le triangle ABC n'est pas équilatéral, la droite joignant les points G , O

et H est appelée *droite d'Euler du triangle* ABC .



V.4 . −Bissectrices, cercle inscrit, cercle exinscrit

Dans toute cette section, A, B, C **sont trois points non alignés de** $\mathcal{P}$.

Lemme V.4.1 *Il existe deux, et seulement deux réflexions orthogonales (cf. IV.4.2,)* s_1 *et* s_2 *d'axes orthogonaux* $\mathcal{D}_1$ *et* $\mathcal{D}_2$ *respectivement tels que*

$$s((AB)) \;=\; (AC)\;.$$

Preuve : Une réflexion s vérifiant $s((AB)) = (AC)$ est nécessairement telle que $s(A) = A$ et son application linéaire sous-jacente $\overrightarrow{s}$ est, par hypothèse, un élément de is$^-(\overrightarrow{\mathcal{D}}_1, \overrightarrow{\mathcal{D}}_2)$ (cf. II.8.2,) et l'on conclut grâce à la proposition II.8.2.ii).

Définition V.4.1 Les axes $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ des réflexions définies par le lemme V.4.1 sont appelées *bissectrices* de l'angle $\angle\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}$ (cf. II.5.1) ou encore *bissectrices de l'angle de droites* $\angle(AB)(AC)$ (cf. II.8.5.)

Proposition V.4.2 *Soient* $\mathcal{D}_1$ *et* $\mathcal{D}_2$ *les bissectrices de l'angle* $\angle\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}$. *Alors*

$$\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 \;=\; \{M \;\in\; \mathcal{P} \;\mid\; \delta(M,(AB)) \;=\; \delta(M,(AC))\}\;.$$

Lemme V.4.3 *Si* $s_i\;,_{i=1 \text{ ou } 2}$ *est l'une des deux réflexions telles que* $s_i((AB)) \;=\; (AC)$:

- *soit*
$$s_i(\frac{1}{||\overrightarrow{AB}||}\overrightarrow{AB}) \;=\; \frac{1}{||\overrightarrow{AC}||}\overrightarrow{AC}\;,$$
dans ce cas on notera $s^+ \;:=\; s_i$;
- *soit*
$$s_i(\frac{1}{||\overrightarrow{AB}||}\overrightarrow{AB}) \;=\; -\frac{1}{||\overrightarrow{AC}||}\overrightarrow{AC}\;,$$
et on notera $s^- \;:=\; s_i$.

Définition V.4.4 L'axe $\mathcal{D}_A^+$, (resp. $\mathcal{D}_A^-$,) de la réflexion s^+ , (resp. s^- ,) est appelé *bissectrice intérieure* (resp. *extérieure,*) au triangle ABC en A .

On notera, dans la suite :

$$\begin{array}{rcl} a & := & \delta(B,C) \\ b & := & \delta(C,A) \\ c & := & \delta(A,B) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} A' & := & \mathcal{D}_A^+ \cap (BC) \\ B' & := & \mathcal{D}_B^+ \cap (CA) \\ C' & := & \mathcal{D}_C^+ \cap (AB) \ . \end{array}$$

Lemme V.4.5 *Le point A' , (resp. B' ,) (resp. C' ,) est le barycentre de $\{(B,b),(C,c)\}$, (resp. $\{(C,c),(A,a)\}$,) (resp. $\{(A,a),(B,b)\}$,) (cf. III.3.1.)*

Preuve : Les droites $\mathcal{D}_A^+$ et (BC) n'étant pas parallèles (sinon les points A, B, C seraient alignés,) il existe un unique point d'intersection $\{A'\} = \mathcal{D}_A^+ \cap (BC)$. Il existe donc un couple $(\beta,\gamma) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ (cf. III.4.2.e)) et un réel λ tels que :

$$\begin{array}{rrcl} & \beta\overrightarrow{A'B} + \gamma\overrightarrow{A'C} & = & \mathrm{Vect}\{0\} \\ \Leftrightarrow & \beta(\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AB}) + \gamma(\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AC}) & = & \mathrm{Vect}\{0\} \\ \Leftrightarrow & (\beta+\gamma)\overrightarrow{A'A} + \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC} & = & \mathrm{Vect}\{0\} \\ \Leftrightarrow & (\beta+\gamma)\lambda(\frac{1}{c}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{b}\overrightarrow{AC}) + \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC} & = & \mathrm{Vect}\{0\} \\ \Leftrightarrow & [b\lambda(\beta+\gamma) + bc\beta]\overrightarrow{AB} + [c\lambda(\beta+\gamma) + bc\gamma]\overrightarrow{AC} & = & \mathrm{Vect}\{0\} \end{array}$$

ce qui équivaut à, A, B, C n'étant pas alignés :

$$\begin{array}{rl} & \left\{\begin{array}{rcl} b\lambda(\beta+\gamma) + bc\beta & = & 0 \\ c\lambda(\beta+\gamma) + bc\gamma & = & 0 \end{array}\right\} \\ \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} (\lambda+c)\beta + \lambda\gamma & = & 0 \\ \lambda\beta + (\lambda+b)\gamma & = & 0 \end{array}\right\} \\ \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} (\lambda+c)\beta + \lambda\gamma & = & 0 \\ c\beta - b\gamma & = & 0 \end{array}\right\} . \end{array}$$

Le point A' étant défini comme le barycentre de $\{(B,\beta),(C,\gamma)\}$ (cf. III.3.1,) le couple (β,γ) n'est pas unique on peut, par exemple prendre $\beta = b$ et $\gamma = c$.

On notera I **le barycentre** $\{(A,a),(B,b),(C,c)\}$ **qui est bien défini puisque** $a+b+c > 0$.

Lemme V.4.1 *Le point I appartient à $\mathcal{D}_A^+$, $\mathcal{D}_B^+$ et $\mathcal{D}_C^+$.*

Preuve : Par définition

$$
\begin{array}{lrcl}
 & a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC} & = & \mathrm{Vect}\{0\} \\
\Leftrightarrow & a\overrightarrow{IA}+b(\overrightarrow{IA'}+\overrightarrow{A'B})+c(\overrightarrow{IA'}+\overrightarrow{A'C}) & = & \mathrm{Vect}\{0\} \\
\Leftrightarrow & a\overrightarrow{IA}+(b+c)\overrightarrow{IA'}+b\overrightarrow{A'B}+c\overrightarrow{A'C} & = & \mathrm{Vect}\{0\} \\
\overset{\Leftrightarrow}{\text{(cf. V.4.5,)}} & a\overrightarrow{IA}+(b+c)\overrightarrow{IA'} & = & \mathrm{Vect}\{0\}\ ;
\end{array}
$$

ce qui implique que $I \in (AA') = \mathcal{D}_A^+$ d'après la proposition III.4.2.e).

Soit A'' , **(resp.** B'' , **) (resp.** C'' , **) le projeté orthogonal de** I **sur** (BC) **(resp.** (CA) , **) (resp.** (AB) **) (cf. IV.3.2.)**

Proposition V.4.1 *Le point I est le centre du cercle circonscrit au triangle $A''B''C''$ (cf. V.2.1); ce dernier est tangent à (AB) , (resp. (BC) ,) (resp. (CA) ,) en C'' , (resp. A'' ,) (resp. B'') (cf. V.2.3.)*

Preuve : On notera $s_{\mathcal{D}_C^+}$ la réflexion d'axe $\mathcal{D}_C^+$ (cf. IV.4.2.)

D'après le lemme V.4.1, $I \in \mathcal{D}_C^+$ d'où $s_{\mathcal{D}_C^+}(I) = I$. Par ailleurs, $s_{\mathcal{D}_C^+}((BC)) = (CA)$ par définition même de $\mathcal{D}_C^+$. Il s'ensuit que $s_{\mathcal{D}_C^+}(A'') \in (CA)$. Comme (IA'') est orthogonale à (BC) , $(Is_{\mathcal{D}_C^+}(A''))$ est orthogonale à (AC) car $\mathrm{Vect}\{s_{\mathcal{D}_C^+}\} \in \mathcal{O}(\overrightarrow{\mathcal{P}})$. Il en résulte que $(Is_{\mathcal{D}_C^+}(A'')) = (IB'')$ et donc que $s_{\mathcal{D}_C^+}(A'') = B''$.

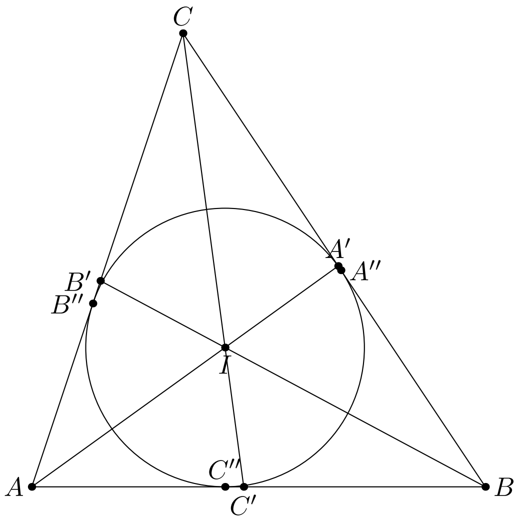
Comme $s_{\mathcal{D}_C^+}$ est une isométrie affine, on en déduit que

$$\delta(I, A'') = \delta(I, B'') .$$

On a donc montré que les points A'', B'', C'' , sont sur un même cercle de centre I .

Le fait que ce cercle soit tangent aux côtés du triangle ABC résulte de la réciproque de la proposition V.2.4.

Définition V.4.1 Le cercle passant par les projetés orthogonaux (A'', B'', C'') du point d'intersection I des bissectrices intérieures du triangle ABC est appelé *cercle inscrit dans le* *triangle* ABC .



Lemme V.4.2 *Les droites* $\mathcal{D}_A^-$ *et* (BC) *sont parallèles si et seulement si le triangle* ABC *est isocèle de sommet* A *(cf. V.3.1.i).)*

Lemme V.4.3 *Si le triangle* ABC *n'est pas isocèle de sommet* A *(cf. V.3.1.i),) le point d'intersection* A_C^e *de la bissectrice extérieure* $\mathcal{D}_A^-$ *du triangle* ABC *en* A *et de* (BC) *est le barycentre du système* $\{(B,b);(C,-c)\}$.

Preuve : Comme le triangle ABC est supposé ne pas être isocèle de sommet A , les droites $\mathcal{D}_A^-$ et (BC) ne sont pas parallèles (cf. V.4.2) et se coupent donc en un point A_C^e . Il existe, par conséquent, un couple $(\beta,\gamma)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ (cf. III.4.2.e),) et un réel λ tels que :

$$\begin{array}{rrcl}
 & \beta\overrightarrow{A_C^eB}+\gamma\overrightarrow{A_C^eC} & = & \mathrm{Vect}\{0\} \\
\Leftrightarrow & \beta(\overrightarrow{A_C^eA}+\overrightarrow{AB})+\gamma(\overrightarrow{A_C^eA}+\overrightarrow{AC}) & = & \mathrm{Vect}\{0\} \\
\Leftrightarrow & (\beta+\gamma)\overrightarrow{A_C^eA}+\beta\overrightarrow{AB}+\gamma\overrightarrow{AC} & = & \mathrm{Vect}\{0\} \\
\Leftrightarrow & (\beta+\gamma)\lambda(\frac{1}{c}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{b}\overrightarrow{AC})+\beta\overrightarrow{AB}+\gamma\overrightarrow{AC} & = & \mathrm{Vect}\{0\} \\
\Leftrightarrow & [b\lambda(\beta+\gamma)+bc\beta]\overrightarrow{AB}+[-c\lambda(\beta+\gamma)+bc\gamma]\overrightarrow{AC} & = & \mathrm{Vect}\{0\}
\end{array}$$

ce qui équivaut à, A, B, C n'étant pas alignés :

$$\begin{array}{rl}
 & \left\{\begin{array}{rcl} b\lambda(\beta+\gamma)+bc\beta & = & 0 \\ -c\lambda(\beta+\gamma)+bc\gamma & = & 0 \end{array}\right\} \\
\Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} (\lambda+c)\beta+\lambda\gamma & = & 0 \\ -\lambda\beta+(b-\lambda)\gamma & = & 0 \end{array}\right\} \\
\Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} (\lambda+c)\beta+\lambda\gamma & = & 0 \\ c\beta+b\gamma & = & 0 \end{array}\right\} .
\end{array}$$

Le point A_C^e étant défini comme le barycentre de $\{(B,\beta),(C,\gamma)\}$ (cf. III.3.1,) le couple (β,γ) n'est pas unique on peut, par exemple prendre $\beta = b$ et $\gamma = -c$.

On notera I_C **(resp.** I_A , **)** **(resp.** I_B , **)** **le barycentre du système** $\{(A,a);(B,b);(C,-c)\}$ **(resp.** $\{(A,-a);(B,b);(C,c)\}$, **)** **(resp.** $\{(A,a);(B,-b);(C,c)\}$, **)** **(qui existe toujours puisque** $a+b=c$ **impliquerait que les points** A,B,C **sont alignés (cf. III.0.4.)) Pour tout** $M \in \{A;B;C\}$, **on note** A_M **(resp.** B_M , **)** **(resp.** C_M , **)** **le projeté orthogonal de** I_M **sur** (BC) , **(resp.** (CA) , **)** **(resp.** (AB) **.)**

Proposition V.4.1 *i) Pour $M \in \{A;B;C\}$, la bissectrice intérieure en M au triangle ABC et les bissectrices extérieures en $N \in \{A;B;C\} \setminus \{M\}$, sont concourantes en I_M .*

ii) Pour $M \in \{A;B;C\}$, les points A_M , B_M et C_M sont situés sur un même cercle de centre I_M qui est tangent à (AB) , (resp. (BC) ,) (resp. (CA) ,) en C_M , (resp. A_M ,) (resp. B_M .)

Preuve :

i) Pour simplifier les notations, faisons le raisonnement pour $M = C$. Si le triangle ABC n'est ni isocèle en A ni isocèle en B , les intersections $A_C^e = \mathcal{D}_A^- \cap (BC)$ $B_C^e = \mathcal{D}_B^- \cap (CA)$ et existent et le raisonnement est identique à celui de la démonstration du lemme V.4.1.

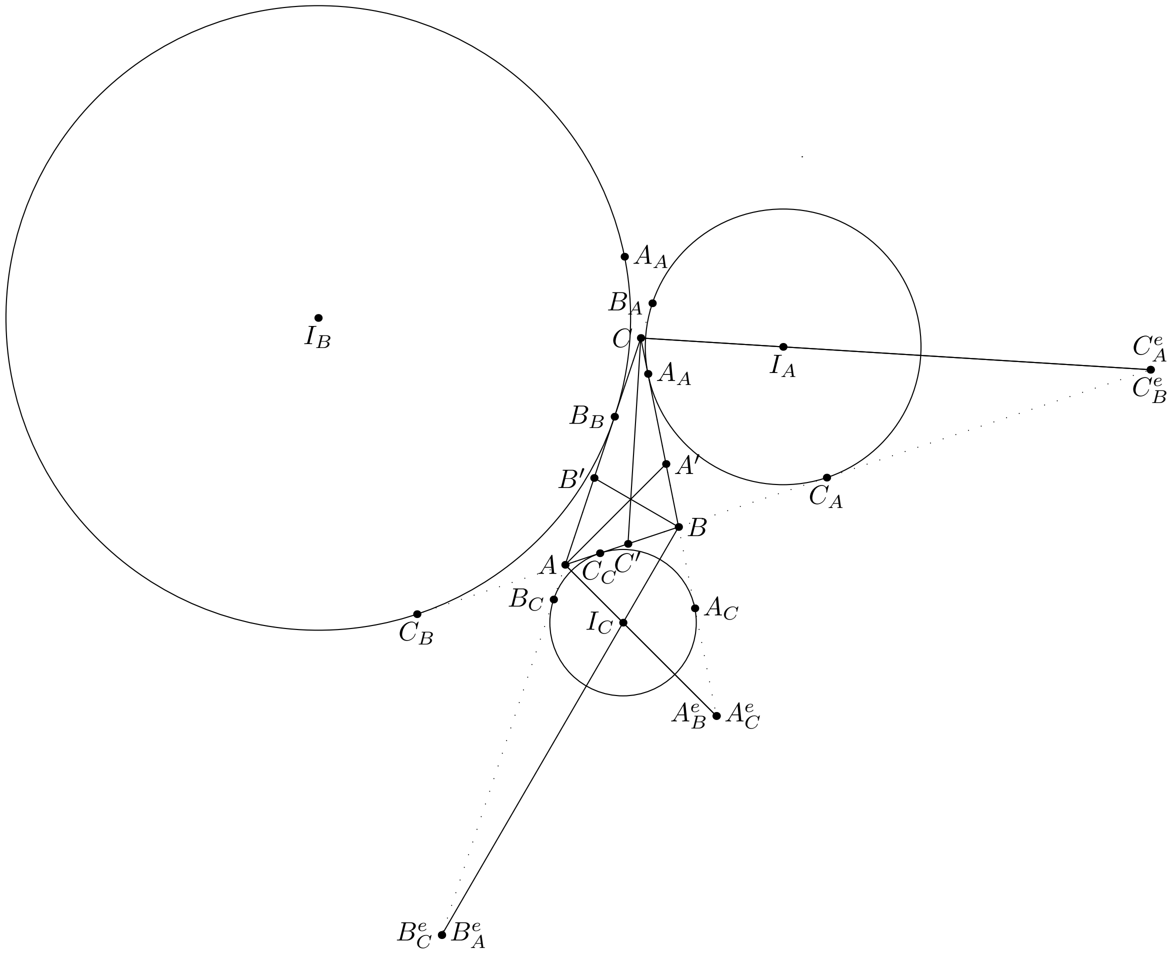
Si le triangle ABC est isocèle de sommet A, $b = c$. On a alors

$$\begin{array}{rrcl} & a\overrightarrow{I_CA} + b\overrightarrow{I_CB} - c\overrightarrow{I_CC} & = & \text{Vect}\{0\} \\ \Leftrightarrow & a\overrightarrow{I_CA} + b\overrightarrow{CB} & = & \text{Vect}\{0\} \ ; \end{array} \qquad 1$$

c'est à dire que I_C appartient à la parallèle à (BC) passant par A qui se trouve être $\mathcal{D}_A^-$ d'après le lemme V.4.2. Si le triangle ABC n'est pas isocèle en B , on introduit l'intersection $\{B_C^e\} := \mathcal{D}_B^- \cap (AC)$ et l'on termine en utilisant C' comme dans le lemme V.4.2. Enfin si le triangle ABC est également isocèle de sommet B , un raisonnement analogue à 1 permet de montrer que $I_C \in \mathcal{D}_B^-$.

ii) La démonstration est analogue à celle de la proposition V.4.1.

Définition V.4.3 Les cercles définis dans la proposition V.4.1.ii) sont appelés *cercles exinscrits dans l'angle* $\hat{M}$ *(pour* $M \in \{A; B; C\}$*) du triangle* ABC .



Remarque V.4.4 i) Si le triangle ABC n'est pas isocèle, il possède trois cercles exinscrits.

ii) On pourra étudier les cas des triangles isocèles.

Index