Pierre Deligne et la géométrie arithmétique

Luc Illusie

C'était il y a quarante ans, à l'IHÉS, par une belle journée de juin. Après le déjeuner, Deligne m'avait annoncé, d'une voix douce, avec sa petite pointe d'accent caractéristique : "J'ai démontré la conjecture de Weil. Oui, j'ai expliqué le point clé à Serre, et il a été convaincu." Je n'en revenais pas ! À l'époque, "la" conjecture de Weil, c'est-à-dire la dernière des conjectures de Weil, appelée aussi parfois *hypothèse de Riemann sur les corps finis*, concernant les valeurs propres des endomorphismes de Frobenius sur la cohomologie ℓ-adique des variétés projectives et lisses sur un corps fini de caractéristique différente de ℓ [1], était de l'ordre des choses inaccessibles. D'après Grothendieck, elle devait tomber comme un fruit mûr une fois démontrées ses "conjectures standard" sur les cycles algébriques. Et bien sûr, on n'avait aucune idée pour démontrer lesdites conjectures. On n'en a d'ailleurs toujours pas aujourd'hui, certains allant même jusqu'à penser qu'elles sont peut-être trop optimistes. Le "point clé" dont parlait Deligne était une majoration, qui, dit-il dans ([8], §3), avait été "catalysée" par la lecture d'un article de Rankin sur la fonction de Ramanujan, où apparaît une méthode (plus tard appelée la *méthode de Rankin-Selberg*) *a priori* extérieure à la cohomologie ℓ-adique, mais en réalité, convenablement transposée, au cœur du sujet. Le mois suivant, Deligne exposait sa démonstration à Pembroke College, à l'université de Cambridge, lors d'une conférence en l'honneur des soixante-dix ans de Hodge. On lui avait accordé, exceptionnellement, six heures. L'auditoire, qui retenait son souffle, fut tout de suite conquis par la simplicité et la clarté de l'exposition. Deligne me disait qu'il n'avait pas d'inquiétude : la démonstration était "stable". Il faisait au tableau les rappels nécessaires, et donnait tous les détails. Katz et moi prenions des notes. Celles de Katz servirent à Deligne pour son article [8], qui parut très peu de temps après. J'utilisais les miennes pour un cours que je donnais à Orsay l'année suivante. Grothendieck s'était retiré en 1970 du devant de la scène mathématique. Néanmoins, je lui écrivis pour lui annoncer la nouvelle. Il me répondit gentiment. Il était content, mais en même temps, évidemment, un peu déçu que les conjectures standard elles-mêmes n'aient pas été démontrées.

Cette façon de contourner l'obstacle pouvait surprendre, elle était en réalité très naturelle, et venait de la largeur de vue que Deligne avait acquise dès ses premiers pas à Bures, avec Grothendieck, en 1965. Je reviendrai

[1] La cohomologie étale, et les cohomologies ℓ-adiques qui en sont issues, sont des théories de cohomologie construites par Grothendieck au début des années 60, qui ont eu d'innombrables applications en géométrie algébrique et en théorie des nombres ([20], [21]).

plus loin sur l'influence de la théorie des formes automorphes sur la genèse de sa démonstration. Par ailleurs, Deligne avait compris très tôt que ce que Grothendieck appelait le "yoga des poids", reposant sur les conjectures de Weil, non encore démontrées, pouvait servir de guide pour une théorie de Hodge des variétés ouvertes, éventuellement singulières, sur le corps des complexes : la cohomologie de telles variétés devait avoir une *filtration par le poids*, avec des quotients successifs formés de structures de Hodge pures, ce que Deligne allait appeler une *structure de Hodge mixte*. Les outils pour une telle construction étaient disponibles. Deligne savait en effet, dès 1966, comment exprimer par "descente cohomologique", à l'aide du théorème de résolution des singularités de Hironaka, la cohomologie d'une variété complexe arbitraire en termes de celles de variétés projectives et lisses. Le parallèle "heuristique" entre cohomologie étale des variétés sur les corps finis et théorie de Hodge des variétés sur le corps des complexes que brosse Deligne dans son exposé au congrès international de Nice [3] devait durablement influencer à la fois le développement de la théorie de Hodge et celui de la cohomologie étale. Deligne commence par construire la *théorie de Hodge mixte* (des variétés complexes) ([4], [9]). Une fois les conjectures de Weil démontrées, ce formalisme de théorie de Hodge va en quelque sorte lui servir de modèle pour la construction de catégories dérivées de faisceaux "mixtes" en cohomologie ℓ-adique, ce qu'il fera dans son deuxième article sur la conjecture de Weil [11], puis, de manière plus systématique, dans son travail avec Beilinson, Bernstein et Gabber [1] sur les *faisceaux pervers*, dont le point de départ est la construction, par Goresky-MacPherson, d'une "cohomologie d'intersection" pour des espaces topologiques convenables, vérifiant de bonnes propriétés relativement à la dualité de Poincaré. Un résultat central de [1] est le *théorème de décomposition*, qui aura de très nombreuses applications à la théorie des représentations des groupes algébriques. C'est en particulier un ingrédient crucial de la démonstration, par Ngô [18], du *lemme fondamental* de Langlands (démonstration pour laquelle lui sera décernée la médaille Fields en 2010).

Géométrie arithmétique : c'est le titre que Deligne a donné à l'un des ses premiers séminaires à l'IHÉS. L'expression était nouvelle. Elle fit florès. Jusque là, on parlait de "géométrie algébrique", entendue, bien sûr, avec Grothendieck, dans un sens large, incluant en principe la théorie des nombres. Mais Deligne tenait à mettre l'accent sur l'aspect arithmétique. Nul mieux que lui, d'ailleurs, n'a su établir des ponts entre les différentes composantes de la géométrie arithmétique. C'est alors qu'il faisait son service militaire qu'il a commencé à s'intéresser aux formes modulaires, et qu'il a construit les représentations ℓ-adiques qui leur sont associées [5] (en s'inspirant d'une stratégie suggérée par Serre)[2]. Pour la forme modulaire

$$\Delta = q \prod_{n \geq 1} (1 - q^n)^{24} = \sum_{n \geq 1} \tau(n) q^n$$

($q = e^{2\pi i z}$), l'existence de la représentation correspondante impliquait, une fois la conjecture de Weil démontrée, la conjecture de Ramanujan $|\tau(p)| < 2p^{11/2}$ (pour tout p premier), ce que Serre allait appeler le "théorème de Deligne-Deligne". Au début des années 60 cohabitaient : d'un côté, à Bures, la géométrie algébrique autour de Grothendieck et ses élèves, avec ses théories cohomologiques, principalement la cohomologie étale, de l'autre, la théorie des représentations des groupes de Lie, autour de Borel, Harish-Chandra, Langlands, Shimura, Weil à Princeton, et autour de Piatetski-Shapiro, Gelfand et ses élèves à Moscou. La construction par Deligne des représentations ℓ-adiques associées aux formes modulaires était un premier pas vers le rapprochement de ces deux écoles mathématiques. L'extraordinaire lettre de Langlands à Weil de 1967, esquissant ce qu'on allait appeler ensuite le *programme de Langlands*, allait hâter ce rapprochement. Un pas supplémentaire était réalisé par l'exposé Bourbaki de Deligne sur les travaux de Shimura [6], où il introduit une axiomatique qui devait se révéler très fructueuse, et qu'il complétera plus tard dans [10]. Mais c'est véritablement en 1972, à Anvers, lors d'une école d'été sur les formes modulaires, que devait s'opérer la jonction entre les deux courants. Je me rappelle Deligne y parlant de modèles de Kirillov, et Langlands de cohomologie étale et de cycles évanescents. La construction par Deligne d'une théorie de constantes locales (des équations fonctionnelles des fonctions L) [7] (simplifiant celle, antérieure, et non publiée, de Langlands[3]) et de représentations locales (qu'on appelle depuis *représentations de Weil-Deligne*) allait avoir un grand impact sur la théorie des formes automorphes. On comprend que, dans ce contexte, Deligne ait pu avoir l'idée de transposer, dans le cadre de la cohomologie ℓ-adique des variétés sur les corps finis, la "méthode de Rankin-Selberg", dont j'ai parlé plus haut, qui jouait un rôle essentiel dans les travaux de Langlands.

Au début des années 80, diverses transformations de Fourier géométriques étaient à la mode : pour les $\mathcal{D}$-modules (Brylinski, Malgrange, Verdier), pour les faisceaux cohérents sur les variétés abéliennes (Mukai). Deligne imagine alors une *transformation de Fourier ℓ-adique*, relevant, en un sens convenable, la transformation de Fourier usuelle pour les fonctions traces associées aux faisceaux ℓ-adiques sur les espaces affines sur un corps fini. Peu

[2]Voir ([19], §6) pour un historique de cette question.

[3]Voir notamment la lettre de Langlands à Deligne du 23 juin 1969, disponible à http://publications.ias.edu/rpl/section/22.

après, Laumon exploitera cette construction, en s'inspirant de "la méthode de la phase stationnaire" utilisée par Witten pour démontrer les inégalités de Morse, pour prouver la conjecture de Deligne sur la formule du produit pour les constantes des équations fonctionnelles des fonctions L sur les corps de fonctions sur un corps fini [17]. Cette démonstration était une percée déterminante en direction de la correspondance de Langlands pour GL_n sur les corps de fonctions, qui ne sera établie que quinze ans plus tard, par son élève, Lafforgue [16].

Et les *motifs*, dans tout ça ? Il s'agit de cette théorie conjecturale de cohomologie universelle, conçue par Grothendieck dans le milieu des années 60. Deligne avoue ne pas y croire vraiment. Pourtant, il en avait, dès le début, à Bures, assimilé parfaitement la "philosophie", comme on dit, et cette philosophie sera pour lui une source constante d'inspiration. J'en vois deux exemples remarquables :

• *Cycles de Hodge absolus.* La conjecture de Hodge prédit que, sur une variété projective lisse sur $\mathbf{C}$, un *cycle de Hodge* (i. e. une classe de cohomologie rationnelle de type (p, p)) est la classe de cohomologie d'un cycle algébrique. Plutôt que de s'attaquer à cette conjecture trop difficile, comme ses sœurs la conjecture de Tate et les conjectures standard, Deligne propose, vers la fin des années 70, de prouver que les cycles de Hodge, même s'ils ne sont peut-être pas des classes de cohomologie de cycles algébriques, sont *absolus*, i.e. se comportent comme s'ils l'étaient, autrement dit, en possèdent toutes les propriétés de symétrie motivique, en particulier d'invariance par les automorphismes de $\mathbf{C}$. Par une ingénieuse utilisation des variétés de Shimura, il y parvient pour les cycles de Hodge sur les variétés abéliennes [12]. La notion de cycle de Hodge absolu, à laquelle on peut donner un sens sur n'importe quel corps de caractéristique nulle, se prêtera à plusieurs constructions "inconditionnelles" de catégories de motifs, en un sens plus faible que dans la définition conjecturale originale, mais suffisant pour beaucoup d'applications.

• *Motifs de Tate mixtes.* La construction d'une bonne catégorie de motifs purs, au sens de Grothendieck, étant désespérée, car reposant sur les conjectures standard, celle de motifs mixtes, qui devraient en être extensions successives (de même que les structures de Hodge mixtes sont extensions successives de structures de Hodge pures), l'est *a priori* encore plus. Pourtant, vers le milieu des années 80, guidé par les conjectures de Grothendieck en géométrie anabélienne, et l'étude de diverses "réalisations" du groupe fondamental d'une droite projective privée de trois points, Deligne [13] met en évidence une catégorie particulière de motifs mixtes, alors conjecturale, les motifs de Tate mixtes. Une construction indépendante de toute conjecture pourra en être donnée une quinzaine d'années plus tard à partir des catégories triangulées définies par Voevodsky. Pour abstrait que ce formalisme puisse paraître, il devait néanmoins aboutir, après notamment les travaux de Goncharov, Ihara et Zagier, à la démonstration, par Brown ([2], [14]) de conjectures de Deligne et Hoffman, prédisant des relations remarquables entre les *nombres multizêtas* d'Euler,

$$\zeta(n_1, \cdots, n_r) = \sum_{0<k_1<\cdots<k_r} \frac{1}{k_1^{n_1} \cdots k_r^{n_r}}$$

(n_i entier ≥ 1, $n_r \geq 2$), en particulier, que tout nombre $\zeta(n_1, \cdots, n_r)$ est combinaison linéaire, à coefficients dans $\mathbf{Q}$, de nombres $\zeta(m_1, \cdots, m_r)$ où les m_i sont égaux à 2 ou 3.

Il n'est évidemment pas possible, dans l'espace qui m'est imparti, de rendre compte d'une œuvre aussi riche et diverse. Ainsi, je ne parlerai pas des *champs de Deligne-Mumford*, des *variétés de Deligne-Lusztig*, ni des travaux de Deligne sur les connexions régulières (ou irrégulières) et la solution du vingt-et-unième problème de Hilbert[4], contributions qui ont toutes eu un grand impact. J'aimerais terminer par une anecdote. En juin 2012 se tenait à Orsay un colloque en l'honneur de Gérard Laumon pour ses soixante ans. J'y donnais un exposé, en fin d'après-midi, sur un travail en collaboration avec mon ex-étudiant W. Zheng. J'expliquais que nous espérions que l'algèbre de cohomologie étale mod ℓ des classifiants des groupes algébriques (sur un corps algébriquement clos de caractéristique différente de ℓ) est de type fini. Bien sûr, nous connaissions beaucoup de cas, mais n'arrivions pas à traiter le cas général, ne sachant comment exorciser les variétés abéliennes apparaissant dans les dévissages. Le lendemain matin, Deligne me tendait une lettre manuscrite de quatre pages, où le problème était résolu. L'idée, très naturelle (et ancienne), était de remplacer les variétés abéliennes par des groupes ℓ-divisibles convenables, afin de se ramener au cas linéaire, que nous connaissions. Nous n'y aurions pas pensé. Comme lorsqu'il avait vingt ans, et qu'il résolvait, d'une chiquenaude, des questions élémentaires apparemment inextricables qui avaient fait outrageusement sécher Artin et Grothendieck, telles que la coïncidence des flèches de changement de base définies des deux façons naturelles possibles, Deligne avait su mettre le doigt sur le point crucial, à la fois évident et caché.

[4]Ce problème est le suivant : étant donné un ouvert U d'une courbe projective lisse X sur $\mathbf{C}$, est-ce que toute représentation linéaire complexe de dimension finie du groupe fondamental de la surface de Riemann définie par U peut s'obtenir comme représentation de monodromie d'une équation différentielle sur U dont les singularités sont régulières aux points de $X - U$? Voir [15].

References

[1] A. Beilinson, J. Bernstein, P. Deligne, *Faisceaux pervers*, Astérisque 100, 1982.

[2] F. Brown, *Mixed Tate motives over* **Z**, Annals of Math. **175** (2012), 949-976.

[3] P. Deligne, *Théorie de Hodge I*, Actes congrès inter. math. 1970, t. 1, 425-430.

[4] P. Deligne, *Théorie de Hodge : II*, Pub. math. IHÉS **40** (1971), 5-57.

[5] P. Deligne, *Formes modulaires et représentations ℓ-adiques*, Sém. Bourbaki 1968/69, n. 355, Lecture Notes in Math. 179, 139-172, Springer-Verlag, 1971.

[6] P. Deligne, *Travaux de Shimura*, Sém. Bourbaki 1971, n. 389, Lecture Notes in Math. 244, 123-165, Springer-Verlag, 1971.

[7] P. Deligne, *Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions L*, Modular functions of one variable, II (Proc. Internat. Summer School, Univ. Antwerp, Antwerp, 1972), Lecture notes in Math. 349, 501–597, Springer-Verlag, 1973.

[8] P. Deligne, *La conjecture de Weil : I*, Pub. math. IHÉS **43** (1974), 273-307.

[9] P. Deligne, *Théorie de Hodge : III*, Pub. math. IHÉS **44** (1974), 5-77.

[10] P. Deligne, *Variétés de Shimura: interprétation modulaire, et techniques de construction de modèles canoniques*, in Automorphic forms, representations and L-functions, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII (Corvallis, OR, 1977), Part 2, 247–289, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.

[11] P. Deligne, *La conjecture de Weil : II*, Pub. math. IHÉS **52** (1980), 137-252.

[12] P. Deligne, *Hodge cycles on abelian varieties (notes by J. S. Milne)*, Lecture Notes in Math. 900, 9–100, Springer-Verlag, 1982.

[13] P. Deligne, *Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points*, Galois groups over **Q**, MSRI publications n. 16, 79-297, Springer-Verlag, 1989.

[14] P. Deligne, *Multizêtas, d'après Francis Brown*, Sém. Bourbaki 2011/12, n. 1048.

[15] N. Katz, *An Overview of Deligne's Work on Hilbert's Twenty-First Problem*, in Mathematical developments arising from Hilbert problems, Proc. Sympos. Pure Math. XXVIII (Northern Ill. Univ.), Part 2, 537-557, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1976.

[16] L. Lafforgue, *Chtoucas de Drinfeld et correspondance de Langlands*, Inv. Math. **147** (2002), 1-241.

[17] G. Laumon, *Transformation de Fourier, constantes d'équations fonctionnelles et conjecture de Weil*, Pub. math. IHÉS **65** (1987), 131-210.

[18] B. C. Ngô, *Le lemme fondamental pour les algèbres de Lie*, Pub. math. IHÉS **111** (2010), 1–169.

[19] J.-P. Serre, *Une interprétation des congruences relatives à la fonction τ de Ramanujan*, Séminaire Delange-Pisot-Poitou 1967/68, n. 14, Œuvres, vol. II, 1960-1971, 80, 498-511, Springer-Verlag, 1986.

[20] [SGA 4] *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie 1963-64, dirigé par M. Artin, A. Grothendieck, J.-L. Verdier, Lecture Notes in Math. 269, 270, 305, Springer-Verlag, 1972, 1973.

[21] [SGA 5] *Cohomologie ℓ-adique et fonctions L*, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1965/66, dirigé par A. Grothendieck, Lecture Notes in Math. 589, Springer-Verlag, 1977.

Je remercie Jean-Benoît Bost, Gérard Laumon, Michel Raynaud et Jean-Pierre Serre pour d'utiles remarques sur une première version de ce texte.