Accueil

Page de Titre

Sommaire

Page 1 de 40

Retour

Plein écran

Fermer

Quitter

GEOMETRIE AFFINE
Document de travail pour la préparation au CAPES
Quatrième partie : APPLICATIONS AFFINES

Marie-Claude DAVID, Frédéric HAGLUND, Daniel PERRIN

Marie-Claude.David@math.u-psud.fr

8 décembre 2003

Dans cette partie, nous étudions les applications affines qui sont les applications qui respectent la structure affine. La présence de l'espace vectoriel sous-jacent permet d'associer à une telle application une application linéaire. Une question essentielle est alors l'existence de points fixes pour une application affine. En effet, en présence de points fixes, l'application affine est déterminée par sa partie linéaire. Dans le cas contraire, on dispose d'un succédané, le théorème de décomposition (7.5) qui, s'il n'est pas au programme du CAPES dans sa forme générale, intervient de façon essentielle dans l'étude des symétries glissées et des isométries affines.

Nous montrons au paragraphe 4 des conséquences géométriques des applications affines (précisément des homothéties-translations), en particulier le théorème de Thalès.

I. Espaces affines
II. Barycentres
III. Convexité
IV. Applications affines

Dans l' introduction, vous trouverez le mode d'emploi de ce document et les conseils de navigation.

Faites des dessins, encore des dessins, toujours des dessins !

Table des matières

1 Applications affines : Définition **5**
1.1 Théorème et définition 5
1.2 Exemple test 6
1.3 Proposition 6

2 Applications affines : Exemples **7**
2.1 Translation 7
2.2 Homothétie (affine) 8
2.3 L'ensemble des homothéties et des translations de E 8

Accueil
Page de Titre
Sommaire
Page 2 de 40
Retour
Plein écran
Fermer
Quitter

Accueil

Page de Titre

Sommaire

Page 3 de 40

Retour

Plein écran

Fermer

Quitter

2.4 Projection affine 10
2.5 Symétrie affine 10
2.6 Cas particuliers 11
2.7 Détermination d’une application affine 12
2.8 Représentation matricielle d’une application affine 14

3 Applications affines : Propriétés **15**
3.1 Application affine et sous-espace affine 15
3.2 Effet d’une application affine sur les barycentres 16

4 Théorème de Thalès **18**
4.1 Notation : Rapport de deux vecteurs colinéaires 18
4.2 Théorème de Thalès 18
4.3 La variante classique de Thalès 20
4.4 Forme du théorème de Thalès enseignée dans le secondaire 21
4.5 D’autres résultats géométriques : Desargues, Pappus 22

5 Composition des applications affines, isomorphismes affines **24**
5.1 Proposition 24
5.2 Bijections affines 25
5.3 Bijections et repères 26
5.4 Les espaces affines de dimension n sont isomorphes 27

6 Groupe affine **27**
6.1 Définition et proposition 27
6.2 Proposition 27
6.3 Corollaire 28
6.4 Le sous-groupe $HT(E)$ 29
6.5 Principe de conjugaison 30

7 Points fixes d’une application affine, théorème de décomposition **32**
7.1 Applications affines laissant fixe un point 32
7.2 Points fixes d’une application affine 34
7.3 Théorème 34
7.4 Proposition 35
7.5 Théorème de décomposition 36
7.6 Symétries glissées 37
7.7 Théorème de Ménélaüs 37
7.8 Problème sur le théorème de décomposition 38

1. Applications affines : Définition

1.1. Théorème et définition.

Soient E et F deux espaces affines et f une application de E dans F. On dit que f est une **application affine** s'il existe un point a de E et une application linéaire $\vec{f}$ de $\vec{E}$ dans $\vec{F}$ tels que, pour tout point x de E, on ait la formule :

$$(1) \qquad f(x) = f(a) + \vec{f}(\overrightarrow{ax}).$$

Alors, pour tout point b de E, on a aussi :

$$f(x) = f(b) + \vec{f}(\overrightarrow{bx}).$$

On dit que $\vec{f}$ est l'application linéaire associée à f ; elle vérifie les deux formules :

$$(2) \qquad \forall x \in E,\ \ \forall y \in E,\ \ \vec{f}(\overrightarrow{xy}) = \overrightarrow{f(x)f(y)}.$$

$$(3) \qquad \forall a \in E,\ \ \forall \vec{v} \in \vec{E},\ \ f(a+\vec{v}) = f(a) + \vec{f}(\vec{v}).$$

Démonstration.

On a, pour tout $x \in E$ la formule (1) : $f(x) = f(a) + \vec{f}(\overrightarrow{ax})$. Montrons qu'on a la même formule en remplaçant a par un point $b \in E$ quelconque. Par Chasles on a $\overrightarrow{ax} = \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bx}$. Comme $\vec{f}$ est linéaire on en déduit :

$$f(x) = f(a) + \vec{f}(\overrightarrow{ab}) + \vec{f}(\overrightarrow{bx}),$$

d'où la conclusion puisque par (1), on a $f(b) = f(a) + \vec{f}(\overrightarrow{ab})$.

Les formules (2) et (3) sont des conséquences immédiates de (1). $\square$

> $\triangle$ Attention, si f est une application de E dans F et a un point de E on peut toujours définir une fonction vectorielle $\vec{f}_a$ par la formule déduite de (3) : $\vec{f}_a(\vec{v}) = \overrightarrow{f(a)f(a+\vec{v})}$, mais cette fonction n'a aucune raison d'être linéaire et elle dépend a priori du point a. Par exemple lorsque $E = \mathbf{R}^2, F = \mathbf{R}$ et $f(x,y) = x^2 + y^2$, calculez $\vec{f}_{(0,0)}$ et $\vec{f}_{(1,-1)}$ et vérifiez qu'elles sont différentes et non linéaires.

1.2. Exemple test

On reprend l'espace E de l'exemple I.1.2 et on définit une application f de E dans $\mathbb{R}^3$ par $f(x,y,z) = (2x+y-2, x+y, 2+z-y-2x)$. Vérifiez que f envoie E dans E et que f est une application affine de E dans E.

> La proposition suivante est essentielle. Elle montre qu'une application affine est définie par la donnée d'une application linéaire et de l'image d'un point. Elle sera utilisée pour exhiber de nombreux exemples.

1.3. Proposition

Soient $\vec{f}$ une application linéaire de $\vec{E}$ dans $\vec{F}$, a un point de E et b un point de F. Il existe une **unique** application affine f de E dans F, vérifiant $f(a) = b$ et d'application linéaire associée $\vec{f}$. Cette application est définie par la formule

$$\forall x \in E, \quad f(x) = b + \vec{f}(\overrightarrow{ax}).$$

Démonstration.

Unicité : par définition d'une application affine, on a, pour tout x de E, $f(x) = f(a) + \vec{f}(\overrightarrow{ax})$. Donc si f_1 et f_2 sont deux applications affines de E dans F telles que $f_1(a) = b = f_2(a)$ et $\vec{f_1} = \vec{f_2}$, on a $f_1(x) = f_2(x)$ pour tout $x \in E$.

Existence : la preuve de l'unicité conduit à définir une fonction f de E dans F par $f(x) = b + \vec{f}(\overrightarrow{ax})$. On a alors $f(a) = b + \vec{f}(\vec{0}) = b$. Ainsi le point a vérifie :

$$\forall x \in E, f(x) = f(a) + \vec{f}(\overrightarrow{ax})$$

c'est la définition d'une application affine d'application linéaire associée $\vec{f}$. $\square$

2. Applications affines : Exemples

Les exemples d'applications affines qui suivent (translation, homothétie, projection, symétrie) vous sont déjà familiers et vous en avez vu des définitions géométriques dans l'enseignement secondaire. Nous en proposons ici une approche qui s'appuie sur la proposition précédente. Nous espérons vous convaincre que l'algèbre linéaire est un outil puissant qui vous permettra, lorsque vous serez professeur, de comprendre les situations plus vite que vos élèves.

2.1. Translation

Soit E un espace affine. Les translations de E sont des applications affines. En effet, si t est la translation de vecteur $\vec{v}$, on a, pour tout point x de E : $t(x) = x + \vec{v}$. Choisissons un point $a \in E$. On a aussi $t(a) = a + \vec{v}$, donc $t(x) = a + \overrightarrow{ax} + \vec{v} = t(a) + \overrightarrow{ax}$, de sorte que t est bien affine d'application linéaire associée l'identité de $\vec{E}$: $\vec{t} = \mathrm{Id}_{\vec{E}}$. En particulier, l'identité est une application affine.

2.1.1. ♠ Que suffit-t-il de connaître pour connaître une translation ?

2.1.2. ♠ Montrez que si f est une application affine d'application linéaire associée l'identité de $\vec{E}$, alors f est une translation.

> Ainsi, une application affine $f : E \longrightarrow E$ est une translation si et seulement si $\vec{f}$ est l'identité de $\vec{E}$.

2.2. Homothétie (affine)

Définition : Soient E un espace affine, c un point de E et λ un réel non nul. L'**homothétie (affine) de centre** c **et de rapport** λ est définie comme l'application affine $h(c, \lambda)$ qui fixe le point c et dont l'application linéaire associée est l'homothétie vectorielle $\vec{h}_\lambda$ donnée par $\vec{h}_\lambda(\vec{v}) = \lambda.\vec{v}$.

Si $\lambda = 1$, $h(c, \lambda)$ est l'identité (et ceci quel que soit le point c de E).

Si le rapport est -1, $h(c, \lambda)$ est appelée **symétrie de centre** c et notée σ_c.

En vertu de 1.3, ces données définissent bien une application affine. On peut traduire géométriquement cette définition de la façon suivante qui revient à la définition donnée dans l'enseignement secondaire :

2.2.1. ♠ Si m' est l'image de m par $h(c, \lambda)$, on a l'égalité : $\overrightarrow{cm'} = \lambda.\overrightarrow{cm}$. Montrez-le.

2.2.2. ♠ Par la donnée de combien de points et de leurs images une homothétie est-elle déterminée ?

2.3. L'ensemble des homothéties et des translations de E

Proposition et définition : Soient E un espace affine et f de E dans E une application affine. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est une homothétie ou une translation,

(ii) $\vec{f}$ est une homothétie vectorielle (de rapport non nul). On note $HT(E)$ l'ensemble des homothéties et des translations de E.[1]

Démonstration. $(i) \Rightarrow (ii)$: par construction pour les homothéties et on l'a déjà vérifié pour les translations ci-dessus.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Soit f une application affine de E dans E dont l'application linéaire associée est une homothétie vectorielle de rapport λ non nul.

Si $\lambda = 1$, cela signifie que $\vec{f} = \mathrm{Id}_{\vec{E}}$. Donc pour tout $(a, b) \in E^2$, $\overrightarrow{f(a)f(b)} = \overrightarrow{ab}$ et d'après la relation de Chasles $\overrightarrow{bf(b)} = \overrightarrow{af(a)}$. Ainsi le vecteur $\overrightarrow{xf(x)}$ est indépendant de $x \in E$. Si on le note $\vec{v}$, on a pour tout x de E $f(x) = x + \vec{v}$, c'est à dire $f = t_{\vec{v}}$.

Supposons maintenant $\lambda \neq 1$ et montrons que f admet un point fixe unique (cf. aussi 7.3). Fixons une origine ω dans E. Alors pour tout $c \in E$, on a $f(c) = f(\omega) + \lambda\,\overrightarrow{\omega c}$. Donc c est point fixe de f si et seulement si $\overrightarrow{f(\omega)c} = \lambda\,\overrightarrow{\omega c}$, soit $(1 - \lambda)\overrightarrow{f(\omega)c} = \lambda\,\overrightarrow{\omega f(\omega)}$. Puisque $\lambda \neq 1$, l'équation précédente admet une unique solution, le point $c = f(\omega) + \dfrac{\lambda}{1-\lambda}\overrightarrow{\omega f(\omega)}$. L'application affine f fixe un point c et a pour application linéaire associée l'homothétie vectorielle de rapport λ donc f est l'homothétie $h(c, \lambda)$ d'après 1.3. □

Comme souvent, on est passé au vectoriel pour caractériser une propriété affine.

[1] Certains auteurs appellent dilatations les transformations de $HT(E)$.

2.4. Projection affine

Définition :

Soient V un sous-espace affine d'un espace affine E, $c \in V$ et $\overrightarrow{W}$ un supplémentaire de $\vec{V}$ dans $\vec{E}$. La **projection (affine) sur V parallèlement à $\overrightarrow{W}$** est définie comme l'application affine $p_{V,\vec{W}}$ qui fixe c et dont l'application linéaire associée est la projection vectorielle $\vec{p}_{\vec{V},\vec{W}}$ sur $\vec{V}$ parallèlement à $\overrightarrow{W}$.

2.4.1. ♠ Vérifiez que $p_{V,\vec{W}}$ fixe V point par point.

2.4.2. ♠ Montrez que la définition précédente ne dépend pas du choix du point $c \in V$. ✠

2.4.3. ♠ Montrez que $p_{V,\vec{W}}$ associe à un point m de E l'unique point m' tel que $V \cap (m + \overrightarrow{W}) = \{m'\}$. Cela signifie encore que m' est l'unique point de V tel que $\overrightarrow{mm'}$ soit dans $\overrightarrow{W}$.

2.5. Symétrie affine

Nous gardons les notations du paragraphe précédent.

Définition : La **symétrie (affine ou oblique) par rapport à V parallèlement à $\overrightarrow{W}$** est définie comme l'application affine $\sigma_{V,\overrightarrow{W}}$ qui fixe c et dont l'application linéaire associée est la symétrie vectorielle $\vec{\sigma}_{\vec{V},\overrightarrow{W}}$ par rapport à $\vec{V}$ parallèlement à $\overrightarrow{W}$.

2.5.1. ♠ Montrez que la définition précédente ne dépend pas du choix du point $c \in V$.

2.5.2. ♠ Soit m un point de E ; on pose $\sigma_{V,\overrightarrow{W}}(m) = m'$. Montrez que m' est caractérisé par l'une des deux propriétés équivalentes suivantes :

i) $\overrightarrow{mm'} \in \overrightarrow{W}$ et le milieu de $[mm']$ appartient à V,
ii) le milieu de $[mm']$ est le projeté $p_{V,\overrightarrow{W}}(m)$ de m.

2.5.3. ♠ Vérifiez que $\sigma_{V,\overrightarrow{W}}$ fixe V point par point.

2.5.4. ♠ Une symétrie centrale de E de centre c est une symétrie affine avec $V = \ldots$ et $\overrightarrow{W} = \ldots$?

2.6. Cas particuliers

Comme pour les sous-espaces, le linéaire est un cas particulier de l'affine :

2.6.1. ♠ Soient $\vec{E}$ et $\vec{F}$ deux espaces vectoriels munis de leurs structures affines canoniques. Montrez qu'une application linéaire f de $\vec{E}$ dans $\vec{F}$ est affine, qu'une application constante est affine et que, réciproquement, toute application affine de $\vec{E}$ dans $\vec{F}$ est somme d'une application linéaire et d'une application constante.

2.6.2. ♡ *Utilisation de la fonction vectorielle de Leibniz pour définir le barycentre.*

Soit E un espace affine de direction vectorielle $\vec{E}$ et $\{(a_0, \lambda_0), \cdots, (a_k, \lambda_k)\}$ une famille de points pondérés de masse $\Lambda = \Sigma\lambda_i$. On définit une fonction de $\mathcal{L}$ de E dans $\vec{E}$ par $\mathcal{L}(m) = \Sigma\lambda_i\, \overrightarrow{ma_i}$.

a) Montrer que $\mathcal{L}$ est une application affine de E dans $\vec{E}$, d'application linéaire associée l'homothétie de rapport $-\Lambda$ (ici $\vec{E}$ est muni de sa structure canonique d'espace affine).

b) En déduire que $\mathcal{L}$ est constante si $\Lambda = 0$ et bijective sinon.

c) Lorsque Λ n'est pas nul, montrer qu'il existe un unique g dans E tel que $\mathcal{L}(g) = \vec{0}$ et vérifier que g a toutes les propriétés du théorème II.1.3.

2.6.3. ♠ Quelles sont les applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$? et les applications affines ? (On les écrira analytiquement.) Montrez que toute application affine d'une droite dans elle-même est soit une application constante, soit une translation, soit une homothétie.

2.6.4. ♠ Montrez que les applications affines de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ sont les fonctions du type :

$$(x, y, z) \mapsto (\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta, \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta')$$

où α, β, γ, δ, α', β', γ', δ' sont des réels.

2.6.5. ♠ Donnez la forme générale des applications affines de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ et montrez qu'elles sont continues. Cas particulier où $p = 1$ (on parle alors de forme affine ; d'ailleurs, l'application linéaire associée est une ....).

2.7. Détermination d'une application affine

On a vu en 1.3 qu'une application affine est donnée par l'image d'un point et par l'application linéaire associée. En fait, pour définir une application affine il suffit de se donner l'image d'un repère comme le montre la proposition suivante :

Proposition : Soient E et F deux espaces affines, $(a_0, a_1, \cdots, a_n)$ un **repère** de E et $b_0, b_1, \cdots, b_n$ des **points quelconques** de F. Alors, il existe une unique application affine f de E dans F qui vérifie pour tout i dans $\{0, 1, \cdots, n\}$, $f(a_i) = b_i$.

Démonstration. Comme $a_0, a_1, \cdots, a_n$ est un repère de E, $\{\overrightarrow{a_0a_1}, \cdots, \overrightarrow{a_0a_n}\}$ est une base de $\vec{E}$. Soit $\vec{f}$ l'application linéaire de $\vec{E}$ dans $\vec{F}$ définie sur cette base par

$$\vec{f}(\overrightarrow{a_0a_i}) = \overrightarrow{b_0b_i} \qquad \forall i \in \{1, \ldots n\}.$$

Alors, il est clair que l'application affine définie par l'égalité $f(a_0) = b_0$ et par cette application linéaire $\vec{f}$ est l'unique application affine qui envoie les points $a_0, a_1, \cdots, a_n$ sur les points $b_0, b_1, \cdots, b_n$.

2.7.1. ♠ Que dire d'une application affine qui fixe les sommets d'un triangle de $\mathbb{R}^2$?

2.7.2. ♠. *Prolongement des identités :* Soient f et g deux applications affines de E dans F et A une partie (finie ou non) de E. On suppose qu'on a $f(a) = g(a)$ pour tout $a \in A$. Montrez qu'on a $f(b) = g(b)$ pour tout $b \in \operatorname{Aff} A$.

Application : Soit une application affine $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ qui conserve l'ensemble de trois points non alignés $\{a, b, c\}$ et échange deux points parmi ces trois, quelle est la nature de f ?

2.7.3. ♣. *Nouvelle méthode pour l'exercice III.3.3.6*

On considère une partie finie $A = \{a_0, \cdots, a_k\}$ non vide dans l'espace affine $E = \mathbb{R}^2$. On veut montrer que l'enveloppe convexe C de A est compacte.

On note E_k le sous-espace affine de $\mathbb{R}^{k+1}$ formé des points $(x_0, \cdots, x_k)$ tels que $x_0 + \cdots + x_k = 1$ et on appelle e_i le point $(0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$ de E_k (le 1 est à la $i+1$-ème place).

a) Montrer qu'il existe une application affine et une seule f de E_k dans E telle que $f(e_i) = a_i$.

b) Montrer que l'ensemble $\Sigma_k = \{(x_0, \cdots, x_k) \in E_k, \forall i = 0 \ldots k, x_i \geq 0\}$ est compact et que c'est l'enveloppe convexe des points $e_0, \cdots, e_k$ (on appelle Σ_k le *simplexe standard de dimension* k). Ainsi, le résultat est vrai pour le simplexe standard.

c) Montrer que $f(\Sigma_k) = C$.

d) Conclure (utiliser 2.6.5).

2.8. Représentation matricielle d'une application affine

Le ressort de la démonstration de 2.7, c'est le fait qu'une application linéaire est déterminée par l'image des vecteurs d'une base ou encore qu'une application linéaire est déterminée par sa matrice (dans des bases fixées). De cette façon, l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ est en bijection naturelle avec l'espace des matrices à n colonnes et p lignes.
Il y a une représentation analogue pour les applications affines de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ qui correspond à la décomposition des applications affines comme somme d'applications linéaires et d'applications constantes (cf. 2.6).

Soit $\mathcal{A}_{n,p}$ l'ensemble des couples (A, B), où A est une matrice à n colonnes et p lignes et B est une matrice colonne à p lignes. Si (A, B) est dans $\mathcal{A}_{n,p}$, considérons l'application $f_{A,B}$ qui à un point $x = (x_1, \cdots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ associe le point $y = (y_1, \cdots, y_p)$ défini par $Y = AX + B$ (où X et Y sont les vecteurs colonnes correspondant à x et y).

2.8.1. ♠ Montrez que l'application $f_{A,B}$ est affine ; donnez son application linéaire associée. A quoi correspond le point b dont le vecteur colonne est B ?

2.8.2. ♠ Montrez que l'application $(A, B) \mapsto f_{A,B}$ est une bijection de $\mathcal{A}_{p,n}$ sur l'ensemble des applications affines de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$. Analogie avec $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$?

Autrement dit, se donner une application affine de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, c'est se donner une matrice à n colonnes et p lignes ainsi qu'une matrice colonne à p lignes.

3. Applications affines : Propriétés

3.1. Application affine et sous-espace affine

3.1.1. *Proposition :*

Soit f une application affine de E dans F. Alors l'image par f d'un sous-espace affine de E est un sous-espace affine de F. Précisément, on a la formule :

$$f(a+\vec{V}) = f(a) + \vec{f}(\vec{V}).$$

Démonstration. Il suffit de montrer la formule ci-dessus qui résulte aussitôt de l'égalité

$$f(a+\vec{v}) = f(a) + \vec{f}(\vec{v}).$$

3.1.2. *Préservation de l'alignement*

Corollaire : Soit f une application affine de E dans F. Si trois (resp. quatre) points sont alignés (resp. coplanaires) dans E alors leurs images par f sont alignées (resp. coplanaires) dans F.

Démonstration. Les points considérés dans E sont dans un sous-espace affine V de dimension 1 ou 2, donc, d'après 3.1.1 leurs images sont dans le sous-espace affine $f(V)$, de même dimension que $\vec{f}(\vec{V})$, donc inférieure ou égale à celle de V. Ceci conclut. □

En particulier, une application affine conserve l'alignement.

3.1.3. ♠ Si f est une application affine de E dans F et D une droite de E, le sous-espace $f(D)$ est-il nécessairement une droite ? Discutez. ✠

3.1.4. *Corollaire*

Les homothéties de rapport non nul et les translations transforment une droite affine en une droite parallèle.

Démonstration. Si f est une homothétie ou une translation et D une droite de E, alors $f(D)$ est un sous-espace affine de E de direction $\vec{h}(\vec{D})$, où $\vec{h}$ est l'homothétie vectorielle (de rapport non nul) associée à f. Or pour une telle homothétie on a $\vec{h}(\vec{D}) = \vec{D}$, donc par définition $f(D)$ est une droite parallèle à D. □

3.1.5. ♠ Quelles sont les droites affines globalement invariantes par une homothétie, une translation ?

3.2. Effet d'une application affine sur les barycentres

3.2.1. *Proposition*

Soit $\{(x_1, \lambda_1), (x_2, \lambda_2), \dots (x_r, \lambda_r)\}$ une famille de points pondérés de E de **masse totale non nulle** et de barycentre x et f une application affine de E dans F. Alors $f(x)$ est le barycentre des points $f(x_i)$ affectés des masses λ_i.

On dit qu'une application affine **"conserve les barycentres"**. En particulier, elle conserve les milieux. [2]

Démonstration. On part de la relation $\sum_{i=0}^{r} \lambda_i \overrightarrow{xx_i} = \vec{0}$ qui exprime que x est barycentre des x_i et on lui applique $\vec{f}$. On obtient, en utilisant la linéarité et la relation entre f et $\vec{f}$:

$$\sum_{i=0}^{r} \lambda_i \vec{f}(\overrightarrow{xx_i}) = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i \overrightarrow{f(x)f(x_i)} = \vec{0}$$

et cette dernière relation exprime que $f(x)$ est barycentre des $f(x_i)$ affectés des masses λ_i.

[2] et pourtant, *a priori* elle ne conserve pas les distances, même s'il y a une notion de distance, ce qui n'est pas le cas dans un espace affine général

□

3.2.2. ♠ A l'aide de cette proposition, redémontrez que l'image d'un sous-espace affine est un sous-espace affine.

3.2.3. ♠ Montrez que l'image directe d'un convexe par une application affine est un convexe.

3.2.4. ♠ Montrez que l'image réciproque d'un sous-espace affine (si elle n'est pas vide) (resp. d'un convexe) par une application affine est encore un sous-espace affine (resp. un convexe).

3.2.5. ♣ Soit une application affine f de E dans E.

a) Montrez que si on a $f \circ f = f$, alors f admet un point fixe.

b) Montrez que si f est involutive (c'est-à-dire vérifie $f \circ f = \mathrm{Id}_E$), alors f admet un point fixe que l'on cherchera comme barycentre. (A suivre en 5.1.3)

3.2.6. ♣. *Fonction "barycentre d'une famille de points donnée"* Soit E un espace affine quelconque. On reprend les notations E_k, e_i du 2.7.3. On suppose que $\{a_0, \cdots, a_k\}$ est une famille de $k+1$ points de E et on considère l'application b de E_k dans E qui à $(x_0, \cdots, x_k)$ associe le barycentre du système $\{(a_0, x_0), \cdots, (a_k, x_k)\}$.

a) Montrer que b est l'unique application affine de E_k dans E telle que $b(e_i) = a_i$. Expliciter l'image et le noyau de $\vec{b}$.

b) Montrer que $b(E_k) = \mathrm{Aff}\{a_0, \cdots, a_k\}$ et que b est injective si et seulement si les points a_i sont affinement indépendants.

c) On suppose maintenant que $(a_0, \cdots, a_k)$ est un repère affine.

Déduire de ce qui précède que tout point m de E est barycentre des a_i affectés de coefficients x_i de somme 1, et ce d'une unique façon (on retrouve l'existence et l'unicité des coordonnées barycentriques).

Montrer que la fonction qui à un point m associe sa i-ème coordonnée barycentrique

$x_i(m)$ dans le repère $(a_0, \cdots, a_k)$ est une forme affine sur E. Si m est le milieu de p et q, relier $x_i(m)$ à $x_i(p)$ et $x_i(q)$.

3.2.7. ♡ Montrez la réciproque de la proposition 3.2.1.
(Indication : si une application f de E dans F préserve la barycentration, choisir un repère quelconque $(a_0, \cdots, a_k)$ de E, considérer l'unique application affine g de E dans F telle que $g(a_i) = f(a_i)$ et montrer que $f = g$).

4. Théorème de Thalès

4.1. Notation : Rapport de deux vecteurs colinéaires

Soient $\vec{v}$ un vecteur non nul de $\vec{E}$ et $\vec{u}$ un vecteur colinéaire à $\vec{v}$. Il existe donc un réel λ tel que l'on ait : $\vec{u} = \lambda\vec{v}$; dans ce texte, on notera $\lambda = \dfrac{\vec{u}}{\vec{v}}$.

> △ *Attention*, cette notation sous-entend toujours que $\vec{v}$ est un vecteur non nul et que $\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{v}$. Cette notation qui évite le choix d'un repère pour définir la mesure algébrique et allège donc les notations est fortement déconseillée à l'écrit du concours.

On peut alors énoncer la version générale du célèbre théorème de Thalès :

4.2. Théorème de Thalès

Soient E un espace affine, H, H', H'' trois hyperplans de E, parallèles et distincts et D une droite non faiblement parallèle à H. Posons :

$$D \cap H = \{a\}, \quad D \cap H' = \{a'\}, \quad D \cap H'' = \{a''\}.$$

Alors, le réel $\lambda = \dfrac{\overrightarrow{aa''}}{\overrightarrow{aa'}}$ ne dépend que des hyperplans H, H', H'' et non de la droite D.

Démonstration. Soit Δ une autre droite qui coupe les hyperplans respectivement en b, b', b''. On considère la la projection affine p de E sur Δ parallèlement à $\vec{H}$. Par définition de p, on a les égalités : $p(a) = b$, $p(a') = b'$ et $p(a'') = b''$. On applique $\vec{p}$ à la relation $\overrightarrow{aa''} = \lambda.\overrightarrow{aa'}$ et, comme $\vec{p}$ est linéaire, on obtient $\vec{p}\,(\overrightarrow{aa''}) = \lambda.\vec{p}(\overrightarrow{aa'})$, ou encore, $\overrightarrow{bb''} = \lambda.\overrightarrow{bb'}$.

□

4.2.1. ♠ Donnez une démonstration directe du théorème de Thalès, sans utiliser les applications affines. ✠

Comparer les deux démonstrations (longueur, niveau des outils utilisés ...).

4.2.2. ♠ Les élèves de quatrième connaissent les propriétés de la droite des milieux dans un triangle. En utilisant ces propriétés montrer que si trois droites parallèles découpent des segments de même longueur sur une sécante, il en est de même sur toute sécante. En déduire le théorème de Thalès pour les rapports rationnels.

> La méthode utilisée ci-dessus pour montrer Thalès repose sur l'utilisation d'une projection. Dans la pratique, avant de chercher à utiliser le théorème de Thalès, il est souvent plus astucieux de chercher la projection (ou d'autres applications affines, homothéties, translations, ... comme on le verra dans le paragraphe suivant) : cela peut simplifier considérablement la rédaction de la démonstation.

4.3. La variante classique de Thalès

Le résultat suivant est important. D'abord il redonne la forme de Thalès vue dans l'enseignement secondaire, mais aussi d'autres résultats : Desargues, Pappus,... Il montre pourquoi il peut être intéressant de considérer des applications affines (ici, des homothéties ou des translations) pour démontrer une propriété géométrique (ici le parallélisme). Il est indispensable de faire deux figures (une pour chaque cas) et de les mémoriser.

Proposition : Soient a, a', b et b' quatre points distincts dans le plan affine. Les droites (ab) et $(a'b')$ sont parallèles si et seulement s'il existe une homothétie ou une translation u qui transforme a en a' et b en b'.

L'application u est unique : si les droites (aa') et (bb') se coupent en c, u est l'homothétie de centre c et de rapport $\dfrac{\overrightarrow{ca'}}{\overrightarrow{ca}}$, si (aa') et (bb') sont parallèles, u est la translation de vecteur $\overrightarrow{aa'}$.

Démonstration.

On sait déjà que s'il existe une homothétie ou une translation qui transforme a en a' et b en b', alors les droites (ab) et $(a'b')$ sont parallèles.

Réciproquement, si les droites (ab) et $(a'b')$ sont parallèles, on a deux cas.

Premier cas : Si les droites (aa') et (bb') se rencontrent en c, on pose $\lambda = \dfrac{\overrightarrow{ca'}}{\overrightarrow{ca}}$ et on considère l'homothétie $h = h(c, \lambda)$. On a $h(a) = a'$. Posons $b'' = h(b)$. Il s'agit de voir qu'on a $b'' = b'$. Mais, la droite $(a'b'')$ est parallèle à la droite (ab), donc on a $(a'b'') = (a'b')$. Comme les points c, b, b'' et b' sont alignés, b'' est à l'intersection de (cb') et $(a'b')$; on a bien $b'' = b'$.

Deuxième cas : Si les droites (aa') et (bb') sont parallèles, comme les droites (ab) et $(a'b')$ sont aussi parallèles alors $aa'b'b$ est un parallélogramme. Posons $\vec{v} = \overrightarrow{aa'} = \overrightarrow{bb'}$. Alors la translation $t_{\vec{v}}$ envoie a sur a' et b sur b'. $\square$

4.3.1. ♠ Vérifiez que la transformation convenable est unique.

4.3.2. ♠ Etablir l'analogue du résultat précédent dans un espace affine de dimension n quelconque.

4.4. Forme du théorème de Thalès enseignée dans le secondaire

Proposition :

Soient D et D' deux droites distinctes du plan affine issues d'un point a. Soient b et c (resp. b' et c') des points de D (resp. D') distincts de a. On a l'équivalence :

$$(bb') \parallel (cc') \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\overrightarrow{ac}}{\overrightarrow{ab}} = \frac{\overrightarrow{ac'}}{\overrightarrow{ab'}}$$

Si l'une des assertions équivalentes est vérifiée, on a :

$$\frac{\overrightarrow{ac}}{\overrightarrow{ab}} = \frac{\overrightarrow{ac'}}{\overrightarrow{ab'}} = \frac{\overrightarrow{cc'}}{\overrightarrow{bb'}}$$

4.4.1. ♠ Montrez la proposition. (Si les droites (bb') et (cc') sont parallèles, on pourra appliquer 4.2 ou employer 4.3. Pour la réciproque, on utilisera 4.3.)

4.5. D’autres résultats géométriques : Desargues, Pappus

Les résultats suivants sont de grands classiques. Ils apparaissent parfois (sous une forme plus ou moins cachée) dans une épreuve de CAPES où il est demandé de les redémontrer.
Pour prouver les théorèmes de Desargues et Pappus vous pouvez utiliser la proposition 4.3 ou le théorème de Thalès. Comparez l’efficacité des deux méthodes. Est-il besoin de redire qu’il faut faire des figures ?

4.5.1. ♣. *Théorème de Desargues* Soient deux triangles abc et $a'b'c'$ sans sommet commun. On suppose que (ab) (respectivement (bc), (ac)) est parallèle à $(a'b')$ (respectivement $(b'c')$, $(a'c')$). Montrer que les droites (aa'), (bb') et (cc') sont concourantes ou parallèles.

4.5.2. ♣. *Théorème de Pappus* Soient D et D' deux droites distinctes du plan affine, a, b et c trois points de D et a', b' et c' trois points de D'. Montrer que si les droites (ab') et $(a'b)$ sont parallèles ainsi que les droites (cb') et $(c'b)$, alors les droites (ac') et $(a'c)$ le sont aussi.
Un autre théorème de Pappus est proposé en exercice à la fin de cette partie.

Comme vous l’avez constaté ci-dessus, pour montrer des résultats nouveaux il a fallu réinvestir les résultats anciens. Le même principe vaut à l’écrit du CAPES : il faut toujours penser à réutiliser les questions précédentes.
Quand les hypothèses sont symétriques, les conclusions doivent l’être aussi : cela permet de ne faire qu’un seul calcul, ou un seul raisonnement et d’obtenir immédiatement d’autres résultats “par symétrie”.

4.5.3. ♣. *Constructions géométriques de la somme et du produit* (inspiré du CAPES interne de 1988)

Soient D et D' deux droites sécantes en un point o. Sur D, on suppose qu'il y a trois points a, b et m ($m \neq o$). On note x et y les rapports $\frac{\overrightarrow{oa}}{\overrightarrow{om}}$ et $\frac{\overrightarrow{ob}}{\overrightarrow{om}}$.

Donnez une construction à la règle et au compas des points c et d tels que $\frac{\overrightarrow{oc}}{\overrightarrow{om}} = x + y$ et $\frac{\overrightarrow{od}}{\overrightarrow{om}} = xy$. (On construira des parallélogrammes et on utilisera Thalès.)

La surprenante morale de cette histoire, c'est que, si les notions classiques de géométrie (droites, parallélisme) peuvent être facilement définies à l'aide d'algèbre (linéaire), réciproquement, les notions classiques d'algèbre (addition, multiplication) peuvent être retrouvées par des constructions purement géométriques ! Si ces questions vous intéressent vous pouvez consulter le livre d'Emil Artin, Algèbre géométrique, Gauthier-Villars, 1962.

5. Composition des applications affines, isomorphismes affines

5.1. Proposition

La composée de deux applications affines est une application affine et l'application linéaire associée à la composée est la composée des applications linéaires associées.

Démonstration. Soient f une application affine de E dans F et g une application affine de F dans G. Fixons un point a de E et calculons l'image d'un point quelconque x de E par $g \circ f$. On a $f(x) = f(a) + \vec{f}(\overrightarrow{ax})$, on applique g à cette égalité et on obtient : $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(a) + \vec{g}(\vec{f}(\overrightarrow{ax}))$. L'application $g \circ f$ est donc affine et on a la formule :

$$\overrightarrow{g \circ f} = \vec{g} \circ \vec{f}.$$

5.1.1. ♡ Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est affine, représentée par le couple (A, B) de $\mathcal{A}_{p,n}$, et si $f' : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est affine, représentée par le couple (A', B') de $\mathcal{A}_{m,p}$, la composée $f' \circ f$ est représentée par ... ?

5.1.2. ♣ Soit abc un triangle et m_0 un point du segment $[ab]$. La parallèle à (bc) issue de m_0 coupe (ac) en m_1, la parallèle à (ab) issue de m_1 coupe (bc) en m_2, la parallèle à (ac) issue de m_2 coupe (ab) en m_3 etc…

Montrer que m_6 et m_0 sont confondus.

Dans quel cas m_0 et m_3 sont-ils confondus ? ✠

5.1.3. ♣ *Suite de 3.2.5.*

c) Déterminer les applications affines p qui vérifient $p \circ p = p$.

d) Déterminer les involutions affines. ✠

5.2. Bijections affines

Proposition : Une application affine f de E dans F est injective (resp. surjective, bijective) si et seulement si l'application vectorielle associée $\vec{f}$ est injective (resp. surjective, bijective). Si f est bijective, l'application f^{-1} est alors affine et on a $\overrightarrow{f^{-1}} = \vec{f}^{-1}$. On dit que f est un **isomorphisme affine**.

Démonstration. Ce résultat est valable même en dimension infinie.

Injectivité : Fixons un point a de E. Soit $\vec{v}$ un vecteur de $\operatorname{Ker} \vec{f}$. Si f est injective, les égalités $f(a+\vec{v}) = f(a) + \vec{f}(\vec{v}) = f(a)$ nous permettent d'affirmer que les points $a+\vec{v}$ et a coïncident donc $\vec{v} = \vec{0}$, de sorte que $\vec{f}$ est injective.

Réciproquement, si deux points x et y ont même image, le vecteur $\overrightarrow{f(x)f(y)}$ est nul, or $\overrightarrow{f(x)f(y)}$ vaut $\vec{f}(\overrightarrow{xy})$. Comme $\vec{f}$ est injective, le vecteur $\overrightarrow{xy}$ est nul et les points x et y sont confondus : f est donc injective.

Surjectivité : Fixons un point a de E. Soit $\vec{w}$ un vecteur de $\vec{F}$. Si f est surjective, il existe un point x de E tel que $f(x) = f(a) + \vec{w}$. Mais on a aussi l'égalité : $f(x) = f(a) + \vec{f}(\overrightarrow{ax})$ donc $\vec{w} = \vec{f}(\overrightarrow{ax})$ et $\vec{f}$ est surjective.

Réciproquement, Soit y un point de F. Posons $b = f(a)$. On a donc l'égalité $y = b + \overrightarrow{by}$. Comme $\vec{f}$ est surjective, il existe un vecteur $\vec{v}$ de $\vec{E}$ tel que $\vec{f}(\vec{v}) = \overrightarrow{by}$. Alors y est l'image du point $x = a + \vec{v}$ et f est surjective.

Bijectivité : On déduit des équivalences précédentes que f est bijective si et seulement si $\vec{f}$ l'est.

Soit g l'application affine de F dans E qui envoie $b = f(a)$ sur a et dont l'application linéaire associée est $\vec{f}^{-1}$, on vérifie facilement que $g \circ f$ est l'identité de E, donc g est f^{-1} ce qui achève de prouver la proposition. $\square$

5.2.1. ♡ Montrer que si E et F sont de même dimension finie, une application affine de E dans F est bijective si et seulement si elle est injective si et seulement si elle est surjective.

5.3. Bijections et repères

5.3.1. *Proposition*

Si E et F ont même dimension, une application affine f de E dans F est un isomorphisme d'espaces d'affines si et seulement si elle envoie un (resp. tout) repère de E sur un repère de F

Démonstration. Soit $(a_0, \cdots, a_n)$ un repère de E et $b_i = f(a_i)$. Alors $\overrightarrow{b_0b_i} = \vec{f}(\overrightarrow{a_0a_i})$. La suite $(\overrightarrow{a_0a_i})$ est une base de $\vec{E}$. Donc $\vec{f}$ est un isomorphisme si et seulement si $(\overrightarrow{b_0b_i})$ est une base de $\vec{F}$, i.e. si $(b_0, \cdots, b_n)$ est un repère de F. On conclut avec la proposition 5.2. □

5.3.2. *Proposition*

Soient E et F deux espaces affines (de même dimension), munis respectivement de deux repères $(a_0, \cdots, a_n)$ et $(b_0, \cdots, b_n)$. Alors il existe un unique isomorphisme affine de E sur F envoyant a_i sur b_i.

Démonstration. Il existe une unique application affine f de E sur F, envoyant a_i sur b_i (cf. 1.3) et c'est un isomorphisme en vertu de 5.3.1. □

5.3.3. ♠ Que dire du transformé d'une droite, d'un plan par une bijection affine ?

5.3.4. ♣ Soient (a, b, c) un repère d'un plan affine E et f l'application affine de E dans E définie par les égalités : $f(a) = b$, $f(b) = c$, $f(c) = a$. Montrez que f est un isomorphisme et que son inverse est une puissance de f.

5.3.5. ♣ Soient D et Δ deux droites d'un plan affine sécantes en a et soit b un point de Δ distinct de a. On désigne par σ_a et σ_b les symétries de centre a et b, par σ_D la symétrie $\sigma_{D,\vec{\Delta}}$ et σ_Δ la symétrie $\sigma_{\Delta,\vec{D}}$.

a) Déterminez toutes les applications composées $\sigma_a \circ \sigma_D$, $\sigma_D \circ \sigma_a$ et $\sigma_D \circ \sigma_\Delta$. (A suivre en 6.2.1)

5.4. Les espaces affines de dimension n sont isomorphes

Corollaire : Tout espace affine de dimension n est isomorphe à $\mathbb{R}^n$.

> Par exemple, tous les plans affines sont isomorphes à $\mathbb{R}^2$, donc isomorphes entre eux. C'est pourquoi on s'autorise parfois à parler **du** plan affine ; même remarque pour **l'**espace affine.

6. Groupe affine

On suppose dans ce paragraphe que E et F coïncident.

6.1. Définition et proposition

Une application affine bijective $f : E \longrightarrow E$ s'appelle un **automorphisme affine** de E. Les automorphismes affines forment un groupe pour la composition des applications qu'on appelle le **groupe affine** de E et qu'on note $GA(E)$.

Démonstration. Cela résulte du paragraphe précédent.

6.2. Proposition

L'application Θ de $GA(E)$ dans $GL(\vec{E})$ qui à une application affine f associe l'application linéaire associée $\vec{f}$ est un homomorphisme de groupes de $GA(E)$ dans $GL(\vec{E})$. Cet homomorphisme est surjectif et son noyau est le groupe $T(E)$ des translations de E.

Démonstration. L'application Θ est un homomorphisme de groupes car l'application linéaire associée à la composée est la composée des applications linéaires associées :

$$\Theta(g \circ f) = \Theta(g) \circ \Theta(f).$$

La surjectivité résulte de 1.3 : soient φ un automorphisme linéaire et c un point de E, l'application f qui fixe c et dont l'application linéaire associée est φ vérifie :

$$\Theta(f) = \varphi.$$

Il reste donc à calculer le noyau de Θ, c'est-à-dire l'image réciproque de l'élément neutre de $GL(\vec{E})$ qui est l'identité de $\vec{E}$. On cherche donc les applications affines dont l'application linéaire associée est l'identité. Le groupe des translations $T(E)$ est contenu dans le noyau de Θ. Réciproquement, on va montrer que tout élément du noyau est une translation. Si f est un automorphisme affine tel que $\vec{f}$ soit l'identité, on a, pour tout point x de E :

$$f(x) = f(a) + \vec{ax} = f(a) + \overrightarrow{af(a)} + \overrightarrow{f(a)x} = x + \overrightarrow{af(a)}$$

de sorte que f n'est autre que la translation de vecteur $\overrightarrow{af(a)}$. $\square$

6.2.1. ♣ *Suite de 5.3.5.*
b) Calculer $\sigma_a \circ \sigma_b$. (à suivre en 7.6.1)

6.2.2. ♡ On note $\mathcal{GA}_n$ l'ensemble des couples (A, B) où A est une matrice carrée de taille n inversible et B est une quelconque matrice colonne de hauteur n. On munit $\mathcal{GA}_n$ de la loi de composition interne $(A', B').(A, B) = (A'.A, A'.B + B')$. Vérifiez que $(\mathcal{GA}_n, .)$ est un groupe naturellement isomorphe à $(GA(\mathbb{R}^n), \circ)$. Explicitez $(\mathcal{GA}_1)$.

6.3. Corollaire

$T(E)$ est un sous-groupe distingué de $GA(E)$.

Démonstration. C'est le noyau d'un homomorphisme de groupes. $\square$

Ce corollaire signifie simplement que, si t est une translation et g un automorphisme affine, $g \circ t \circ g^{-1}$ est une translation. On peut même préciser laquelle : si t est la translation de vecteur $\vec{v}$, sa conjuguée $g \circ t \circ g^{-1}$ est la translation de vecteur $\vec{g}(\vec{v})$. En effet, on a, pour tout x de E :

$$g \circ t \circ g^{-1}(x) = g \circ t(g^{-1}(x)) = g(g^{-1}(x) + \vec{v}) = x + \vec{g}(\vec{v}) = t_{\vec{g}(\vec{v})}(x).$$

Cette propriété sera généralisée en 6.5.

6.4. Le sous-groupe $HT(E)$

Le théorème suivant résulte de 2.3.

Théorème : L'ensemble $HT(E)$ des homothéties de rapport non nul et des translations de E est un sous-groupe distingué de $GA(E)$. Il est formé des $f \in GA(E)$ tels que $\vec{f}$ est une homothétie vectorielle de rapport non nul, ou encore tels que pour toute droite D de E, $f(D)$ est parallèle à D.

Démonstration. Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble des homothéties vectorielles de rapport non nul. On a vu en 2.3 que $HT(E)$ est formé des éléments f de $GA(E)$ tels que $\Theta(f)$ soit dans $\mathcal{H}$, autrement dit $HT(E) = \Theta^{-1}(\mathcal{H})$. Mais $\mathcal{H}$ est un sous-groupe distingué de $GL(\vec{E})$ (c'est son centre) et Θ est un morphisme de groupes d'après la proposition 6.2 : donc $HT(E)$ est bien un sous-groupe distingué de $GA(E)$.

Nous avons déjà vu en 3.1.4 que les homothéties et les translations envoient une droite sur une parallèle. Supposons réciproquement qu'un élément f de $GA(E)$, envoie toute droite sur une droite parallèle. D'après la proposition 3.1.1 cela veut dire que pour toute droite D de E, la droite vectorielle $\vec{D}$ est invariante par $\vec{f}$. Il en résulte que tout vecteur non nul de $\vec{E}$ est un vecteur propre de $\vec{f}$. Or c'est un résultat classique d'algèbre linéaire que les seuls endomorphismes de $\vec{E}$ dont tous les vecteurs non nuls sont propres sont les homothéties vectorielles. Finalement $\vec{f}$ appartient à $\mathcal{H}$, donc f est une homothétie ou une translation. $\square$

6.4.1. ♣ Soit E un espace affine de dimension 3 et f un élément de $GA(E)$ telle que pour tout plan P, $f(P)$ soit parallèle à P. Montrer que f est une homothétie ou une translation.

6.5. Principe de conjugaison

Définition : Soient f une application affine de E dans E, et g un automorphisme affine de E. La conjuguée de f par g est l'application affine $g \circ f \circ g^{-1}$.

6.5.1. ♡ Montrez que l'application $\varphi_g : GA(E) \longrightarrow GA(E)$ définie par $\varphi_g(f) = g \circ f \circ g^{-1}$ est un automorphisme de groupes. (Cela signifie en particulier qu'on a

$$g \circ (f_1 \circ f_2) \circ g^{-1} = (g \circ f_1 \circ g^{-1}) \circ (g \circ f_2 \circ g^{-1}).)$$

L'application ϕ qui à g associe $\phi(g) = \varphi_g$ est un homomorphisme de groupes. ♠ Lesquels ? En particulier, on a $(\varphi_g)^{-1} = \varphi_{g^{-1}}$.

Le principe de conjugaison est une remarque très simple, mais essentielle dans de nombreuses questions. Il s'énonce comme suit :

Principe de conjugaison : Soient f et g des applications affines de E dans E, g étant un isomorphisme. Alors :

1. le conjugué $g \circ f \circ g^{-1}$ est une application affine de même nature géométrique que f,
2. les éléments caractéristiques de $g \circ f \circ g^{-1}$ s'obtiennent à partir de ceux de f en les “transportant par g”.

Cette formulation est évidemment un peu vague (c'est pourquoi nous parlons d'un principe et non d'un théorème) mais elle permet, dans toutes les situations particulières de trouver un énoncé précis qu'il reste alors à **démontrer** dans chaque cas. Ce principe est d'ailleurs valable dans beaucoup d'autres contextes (par exemple dans le cas des groupes de permutations). En voici quelques illustrations :

6.5.2. ♠ Si le point c est fixe par f, trouvez un point fixe de $g \circ f \circ g^{-1}$.

6.5.3. ♠ Si f est un automorphisme, alors $g \circ f \circ g^{-1}$ en est un aussi.

6.5.4. On a vu en 6.3 que si f est une translation (de vecteur $\vec{u}$), alors $g \circ f \circ g^{-1}$ est une translation (de vecteur $\vec{g}(\vec{u})$).

6.5.5. ♠ De même pour le conjugué d'une homothétie : Si f est l'homothétie de centre c et de rapport λ, montrez que $g \circ f \circ g^{-1}$ est l'homothétie de rapport λ (même nature) et de centre $g(c)$ (transporté par g).

> L'exercice suivant vous permettra de tester si vous avez bien saisi le principe. Vous pouvez aussi essayer d'appliquer le principe dans le cas des isométries, des permutations, ...

6.5.6. ♣ Soient f et g des éléments de $GA(E)$. Calculez $g \circ f \circ g^{-1}$ dans les cas suivants :

a) f est la symétrie par rapport au sous-espace affine V, de direction $\overrightarrow{W}$, avec, comme toujours, $\vec{V} \oplus \overrightarrow{W} = \vec{E}$. Étudiez en particulier le cas de la symétrie centrale.

b) f est la projection sur le sous-espace affine V parallèlement à $\overrightarrow{W}$.

Déduire de ce qui précède le centre du groupe $GA(E)$ (c'est-à-dire l'ensemble des éléments $g \in GA(E)$ qui commutent avec tous les $f \in GA(E)$).

L'exercice suivant est un des ingrédients d'une preuve du principe de conjugaison.

6.5.7. ♠ Si V est un sous-espace affine invariant (resp. fixe point par point) par f, montrez que $g(V)$ est un sous-espace affine invariant (resp. fixe point par point) par $g \circ f \circ g^{-1}$. Plus généralement, si on a la relation : $f(V) \parallel V$, alors on a la relation : $g \circ f \circ g^{-1}(V') \parallel V'$ où on a noté V' le sous-espace $g(V)$.

7. Points fixes d'une application affine, théorème de décomposition

Dans tout ce paragraphe on considère des applications affines de E dans lui-même.

7.1. Applications affines laissant fixe un point

Définition et proposition : Soit c un point de E et posons :

$$GA_c(E) = \{f \in GA(E) \mid f(c) = c\}.$$

$GA_c(E)$ est un sous-groupe de $GA(E)$. La restriction de Θ à $GA_c(E)$ induit un isomorphisme de ce groupe sur le groupe linéaire $GL(\vec{E})$.

Démonstration. En effet, comme la seule translation qui fixe c est l'identité, la restriction de Θ est injective. Elle est aussi surjective car, φ étant donnée, l'application affine f dont φ est l'application linéaire associée et qui fixe c vérifie $\Theta(f) = \varphi$. □

Cette proposition est importante : elle dit qu'une application affine qui possède un point fixe est essentiellement une application linéaire. C'est pourquoi on cherche toujours d'abord si une application affine possède un point fixe et dans ce cas on la comprend comme une application linéaire et on peut lui appliquer les techniques bien connues d'étude (réduction à la forme diagonale et autres). C'est d'ailleurs essentiellemnt ce qu'on a fait dans le cas des homothéties, des symétries, etc.

Lorsque $E = F$, les seules applications nouvelles par rapport au vectoriel sont donc les applications affines sans point fixe, et notamment les translations (mais pas seulement, voir en 7.6 les symétries glissées par exemple).
En fait, on peut reconstruire toute application affine à partir des translations et des applications affines fixant un point donné (donc "linéaires") :

7.1.1. ♠ Soit f une application affine de E dans E et soit a un point de E. Montrez que f s'écrit sous la forme $f = t \circ g$ où t est une translation et où g admet le point a comme point fixe. De plus cette écriture est unique.

7.1.2. *Remarques* Cette écriture présente plusieurs inconvénients :

a) Quand on passe du point a à un point a', l'écriture change (en général).

b) t et g ne commutent pas en général (ce qui rend délicat le calcul d'une composée $f \circ f'$).

Ces problèmes seront surmontés grâce au théorème de décomposition 7.5.

7.1.3. ♠ On a vu en 6.5.2 que si c est un point fixe de f et si g appartient à $GA(E)$, $g(c)$ est un point fixe de $g \circ f \circ g^{-1}$. On a donc $g \circ GA_c(E) \circ g^{-1} = GA_{g(c)}(E)$, de sorte que les sous-groupes $GA_c(E)$ ne sont pas distingués (en dimension $n \geq 1$).

7.1.4. ♣ Soit G un sous-groupe de $GA(E)$.

1. On suppose que G préserve un ensemble fini F de points de E (i.e. $\forall g \in G, \forall x \in F, g(x) \in F$).
   (a) Montrer que tous les éléments de G fixent l'isobarycentre de F.
   (b) Montrer que si $\mathrm{Aff}(F) = E$, alors G est fini de cardinal divisant $n!$, où n est

le cardinal de F (on pourra considérer le morphisme de G dans le groupe des permutations de F obtenu par restriction à F des éléments de G).

2. Soit G un sous-groupe fini de $GA(E)$. Montrer qu'il existe un point c fixé par tous les éléments de G (on pourra essayer de construire une partie finie F invariante par G).

7.2. Points fixes d'une application affine

Proposition : Soit f une application affine de E dans E. L'ensemble des points fixes de f est vide ou bien est le sous-espace affine passant par un point fixe et de direction $\mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{Id}_{\vec{E}})$.

Remarquons d'abord que $\mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{Id}_{\vec{E}})$ est le sous-espace vectoriel des vecteurs fixes par $\vec{f}$. C'est donc le sous-espace propre de $\vec{f}$ associé à la valeur propre 1 si 1 est valeur propre de $\vec{f}$ et il est réduit au vecteur nul sinon.

Démonstration. S'il existe un point c de E fixe par f, montrons que l'ensemble X des points fixes de f est égal à $A = c + \mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{Id}_{\vec{E}})$.

Soit a un point de A, alors on a l'égalité $f(a) = c + \vec{f}(\overrightarrow{ca})$, or, puisque les points c et a sont dans A, le vecteur $\overrightarrow{ca}$ appartient à la direction de A, soit $\mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{Id}_{\vec{E}})$, donc le vecteur $\overrightarrow{ca}$ est fixe par $\vec{f}$ et $f(a)$ vaut a, c'est-à-dire que le point a appartient à X.

Soit b un point de X, on a l'égalité $\vec{f}(\overrightarrow{cb}) = \overrightarrow{f(c)f(b)} = \overrightarrow{cb}$ donc le vecteur $\overrightarrow{cb}$ est dans $\mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{Id}_{\vec{E}})$ et le point $b = c + \overrightarrow{cb}$ appartient à A. □

7.2.1. ♠ Quels sont les points fixes d'une symétrie affine, d'une projection affine ?

7.3. Théorème

(très important). Soit f une application affine de E dans E (de dimension finie toujours) et soit $\vec{f}$ l'application linéaire associée à f. Alors, l'application f admet un unique point fixe si et seulement si 1 n'est pas valeur propre de $\vec{f}$.

Démonstration.

Si f admet un unique point fixe, d'après 7.2, l'ensemble de ses points fixes est un sous-espace affine de direction $\{\vec{0}\} = \mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{Id}_{\vec{E}})$, donc 1 n'est pas valeur propre de $\vec{f}$.

Réciproquement, si 1 n'est pas valeur propre de $\vec{f}$, nous avons à démontrer un résultat d'existence et d'unicité.

Existence : Fixons un point a de E et cherchons à déterminer un point fixe c. Les équivalences suivantes vont guider notre recherche mais ne présument en aucun cas de l'existence de c.

$$f(c) = c \quad \Leftrightarrow \quad f(a) + \vec{f}(\vec{ac}) = a + \vec{ac} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{f(a)a} = (\vec{f} - \mathrm{Id}_{\vec{E}})(\vec{ac})$$

Maintenant reprenons la démonstration. Comme E est de dimension finie et que $\vec{f} - \mathrm{Id}_{\vec{E}}$ est injective, $\vec{f} - \mathrm{Id}_{\vec{E}}$ est surjective, le vecteur $\overrightarrow{f(a)a}$ a donc un antécédent $\vec{v}$ par $\vec{f} - \mathrm{Id}_{\vec{E}}$. Posons $c = a + \vec{v}$. Il vous reste à vérifier que ce point c défini à partir du point a est un point fixe.

L'existence résulte donc de la surjectivité de l'application $\vec{f} - \mathrm{Id}_{\vec{E}}$. L'unicité du point fixe résultera de son injectivité.

Unicité : Puisque f admet un point fixe, l'ensemble de ses points fixes est un sous-espace affine de direction $\mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{Id}_{\vec{E}}) = \{\vec{0}\}$ (injectivité), donc est réduit à un point. □

7.4. Proposition

Soient g une application affine de E dans E et $\vec{v}$ un vecteur de $\vec{E}$. Les applications g et $t_{\vec{v}}$ commutent si et seulement si $\vec{v}$ appartient à $\mathrm{Ker}(\vec{g} - \mathrm{Id}_{\vec{E}})$.

Démonstration. Les applications g et $t_{\vec{v}}$ commutent si et seulement si on a :

$$\forall m \in E \quad (g \circ t_{\vec{v}})(m) = (t_{\vec{v}} \circ g)(m).$$

Ceci est équivalent à :

$$\forall m \in E \quad g(m) + \vec{g}(\vec{v}) = g(m) + \vec{v}.$$

Autrement dit la condition nécessaire et suffisante de commutation est : le vecteur $\vec{v}$ est propre pour la valeur propre 1 de g ou bien c'est le vecteur nul. □

7.4.1. ♠ Si g a un unique point fixe, quelles sont les translations qui commutent à g ?

7.4.2. ♣ Etudier la composition des éléments de $HT(E)$. Remarquez que le produit de deux homothéties n'est pas toujours une homothétie. Quel est le centre de $HT(E)$?

7.4.3. ♡ Précisez le rapport de l'homothétie $h(c,\lambda)\circ t_{\vec{v}}$ (avec $\lambda \neq 1$) et utilisez le théorème de Thalès pour donner une construction géométrique du centre de cette homothétie. Même question pour $t_{\vec{v}} \circ h(c,\lambda)$.

7.5. Théorème de décomposition

Si une application affine f de E dans E vérifie :

$$(*) \qquad \vec{E} = \mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{Id}_{\vec{E}}) \oplus \mathrm{Im}\,(\vec{f} - \mathrm{Id}_{\vec{E}}).$$

alors f s'écrit de manière unique $t_{\vec{v}} \circ g$ où i) le vecteur $\vec{v}$ appartient à $\mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{Id}_{\vec{E}})$, ii) g est une application affine admettant un point fixe, iii) g et $t_{\vec{v}}$ commutent.

Démonstration. Elle est proposée en 7.8 sous forme de problème.

7.5.1. ♠ Si f vérifie $(*)$ et a un point fixe, $f = f \circ t_{\vec{0}}$ est donc son unique décomposition satisfaisant à *ii)* et *iii)*.

7.5.2. *Remarque* L'hypothèse de décomposition en somme directe peut paraître arbitraire. On peut déjà noter que les dimensions des sous-espaces sont convenables pour avoir une telle écriture et on vérifie qu'elle est satisfaite en particulier par les isométries affines.

De plus :

7.5.3. ♡ Montrez que si $\vec{f}$ est diagonalisable, alors l'hypothèse est satisfaite.

7.6. Symétries glissées

Soit $f \in GA(E)$ et supposons que $\vec{f}$ soit une symétrie vectorielle $\vec{\sigma}$. Les éventuelles valeurs propres de $\vec{\sigma}$ sont 1 et -1 et elle est diagonalisable avec des sous-espaces propres que nous noterons respectivement $\vec{F}$ (éventuellement réduit à $\{\vec{0}\}$) et $\vec{G}$. L'application $\vec{\sigma}$ vérifie donc les hypothèses du théorème de décomposition. Il y a trois cas possibles pour f selon le nombre de points fixes de f :

1. Si $\vec{F}$ est réduit à $\{\vec{0}\}$, f a un unique point fixe c, c'est la symétrie affine de centre c.
2. Si $\vec{F}$ n'est pas réduit au vecteur nul et que f ait des points fixes, alors f admet un sous-espace affine de points fixes F de direction $\vec{F}$ et f est la symétrie affine (oblique) d'axe F et de direction $\vec{G}$.
3. Si $\vec{F}$ n'est pas réduit au vecteur nul et que f n'ait pas de point fixe, f se décompose comme $g \circ t_{\vec{v}}$ où g admet un point fixe c. L'application g est donc une symétrie $\sigma_{F,\vec{G}}$ avec $F = c + \vec{F}$ et $t_{\vec{v}}$ est une translation de vecteur $\vec{v}$, vecteur non nul de $\vec{F}$. On dit que f est **une symétrie glissée**.

7.6.1. ♣ *Suite de 6.2.1*. c) Déterminer les applications $\sigma_D \circ \sigma_b$ et $\sigma_b \circ \sigma_D$.

7.7. Théorème de Ménélaüs

7.7.1. ♣ Soient $a, b, c \in E$ et h_a, h_b, h_c trois homothéties non triviales de centres a, b, c. On suppose $h_a \circ h_b \circ h_c = \mathrm{Id}_E$. Montrer que les points a, b et c sont alignés.

7.7.2. ♣. *Théorème de Ménélaüs* On suppose que E est un plan affine. Soient a, b, c trois points non alignés de E et soient a', b', c' trois points, distincts de a, b, c, situés respectivement sur les droites bc, ca, ab. A l'aide de 7.7.1, montrer que a', b', c' sont alignés si et seulement si l'on a :

$$\frac{\overrightarrow{a'b}}{\overrightarrow{a'c}} \times \frac{\overrightarrow{b'c}}{\overrightarrow{b'a}} \times \frac{\overrightarrow{c'a}}{\overrightarrow{c'b}} = 1$$

Applications du théorème de Ménélaüs

7.7.3. ♣. *Théorème de Pappus.* Dans le plan affine on considère deux droites D et D' concourantes en o et sur D (resp. D') trois points a, b, c (resp. a', b', c') distincts et distincts de o. Soit u (resp. v, resp. w) le point d'intersection des droites (bc') et $(b'c)$ (resp. (ac') et $(a'c)$, resp. (ab') et $(a'b)$).

Montrer que u, v, w sont alignés. (On considérera les points d'intersection α, β, γ des droites $(ab'), (a'c)$; $(bc'), (b'a)$; $(ca'), (c'b)$ et on appliquera cinq fois dans un sens et une fois dans l'autre (!) le théorème de Ménélaüs au triangle α, β, γ).

7.7.4. ♣ Soient (a, b, c) un repère du plan affine E et a', b', c' des points, distincts de a, b, c, et situés respectivement sur $(bc), (ca), (ab)$. Soient a'', b'', c'' les symétriques de a', b', c' par rapport aux milieux de $[bc], [ca], [ab]$. Montrer que a'', b'', c'' sont alignés si et seulement si a', b', c' le sont.

7.8. Problème sur le théorème de décomposition

Les deux premières parties inspirées d'une épreuve de concours des Ecoles Centrales proposent une approche de la décomposition canonique d'une application affine et présentent un exemple où elle n'est pas possible. La dernière partie fournit les étapes de la démonstration du théorème 7.5.

Notation : Soit une application affine f de E dans E. On note φ l'endomorphisme $\vec{f} - \mathrm{Id}$ de $\vec{E}$.

7.8.1. *Origine adaptée.*

1. On suppose qu'il existe un point c de E, un vecteur $\vec{v}$ de $\vec{E}$ et une application affine g

ayant c comme point fixe tels que

$$f = t_{\vec{v}} \circ g = g \circ t_{\vec{v}}.$$

Montrer que $\vec{v}$ appartient au noyau de φ et qu'on a l'égalité $\overrightarrow{cf(c)} = \vec{v}$.

2. Réciproquement, on suppose qu'il existe un point c tel que $\overrightarrow{cf(c)}$ appartienne au noyau de φ et on pose $\vec{v} = \overrightarrow{cf(c)}$. Montrer qu'il existe une application affine g ayant c comme point fixe tels que
$$f = t_{\vec{v}} \circ g = g \circ t_{\vec{v}}.$$

Dans ce cas on dit que le point c est une origine adaptée à f.

7.8.2. *Cas $\varphi^2 = 0$.* On suppose dans cette question que φ^2 est nulle.

1. Montrer que ou bien f n'a pas d'origine adapté ou bien tous les points de E sont des origines adaptées à f.
2. Exemple : On suppose que E est $\mathbb{R}^2$. Soient λ et μ deux réels et f l'application affine de E dans E définie par :

$$f((x, y)) = (\lambda + x + 2y, \mu + y).$$

Montrer que φ^2 est nulle. Préciser les valeurs de λ et μ pour lesquelles f admet des origines adaptées. Vérifier que dans ce cas le vecteur $\overrightarrow{cf(c)}$ dépend du point c choisi.

7.8.3. *Avec les hypothèses du théorème.* On dira que f a la propriété $(*)$ si

$$\vec{E} = \mathrm{Ker}(\vec{f} - Id_{\vec{E}}) \oplus \mathrm{Im}\,(\vec{f} - Id_{\vec{E}}).$$

1. Montrer que f a la propriété $(*)$ en particulier si $\vec{f}$ n'a pas la valeur propre 1 ou si $\vec{f}$ est diagonalisable. Montrer que si φ^2 est nulle, f n'a pas la propriété $(*)$.

On suppose désormais que f a la propriété $(*)$ et on pose $\vec{V} = \operatorname{Ker}\varphi$ et $\vec{W} = \operatorname{Im}\varphi$.

2. Soit $x \in E$, on note $\vec{v}_x$ la composante du vecteur $\overrightarrow{xf(x)}$ sur $\vec{V}$ dans la décomposition $\vec{E} = \vec{V} \oplus \vec{W}$. Montrer que $\vec{v}_x$ ne dépend pas de x. On note $\vec{v}$ ce vecteur de $\vec{V}$.
3. Soit a un point de E. Montrer qu'il existe un point c tel que

$$\overrightarrow{af(a)} = \vec{v} - \varphi(\overrightarrow{ac}).$$

En déduire que f admet au moins une origine adaptée. Conclure quant au théorème de décomposition des applications affines (7.5).

Accueil
Page de Titre
Sommaire
Page 40 de 40
Retour
Plein écran
Fermer
Quitter