ENS de Lyon — 2^{nd} semestre 2019-2020

L3 - Intégration et Probabilités

TD 10

Fourier, marches aléatoires.

Exercice 1 *Équation de Laplace*

1. Trouver une solution bornée de l'équation suivante sur $\{y \geq 0\}$ (vous pouvez supposer toute la régularité nécessaire sur h) :
$$\begin{cases} \Delta f = \partial_{xx} f + \partial_{yy} f = 0 \\ f(x,0) = h(x). \end{cases}$$
2. Quelle situation physique cette équation modélise-elle ?
3. Remplacer la condition au bord de Dirichlet par celle de Neumann $\{\partial_y u(x,0) = h(x)\}$. Quelle condition sur h apparaît ? Donner une solution.

Définition : Soit $G = (V, E)$ un graphe fini ou infini, mais localement fini. La marche aléatoire simple sur G démarrée en x est un processus $X_0, X_1, X_2, \dots$ dont la loi $\mathbb{P}_x$ est caractérisée ainsi. Pour $v_0, v_1, \dots, v_n \in V$, on a
$$\mathbb{P}_x(X_0 = v_0, X_1 = v_1, \dots, X_n = v_n) = \mathbf{1}_{v_0 = x} \frac{\mathbf{1}_{v_0 v_1 \in E}}{\deg(v_0)} \cdots \frac{\mathbf{1}_{v_{n-1} v_n \in E}}{\deg(v_{n-1})}$$

Exercice 2 *Marche sur un arbre*

La marche aléatoire simple sur un arbre binaire enraciné infini est-elle récurrente ou transiente ?

Exercice 3 *Graphe récurrent*

Soit X un ensemble fini. Soit G le graphe dont les sommets sont $\mathbb{Z}^2 \times X$, et les arêtes sont de la forme

— $(v, x) \leftrightarrow (v \pm (1, 0), x)$ pour tout $(v, x) \in \mathbb{Z}^2 \times X$,

— $(v, x) \leftrightarrow (v \pm (0, 1), x)$ pour tout $(v, x) \in \mathbb{Z}^2 \times X$,

— $(v, x) \leftrightarrow (v, y)$ pour tout $v \in \mathbb{Z}^2$ et $x, y \in X, x \neq y$.

Montrer que la marche aléatoire simple $(S_n)_{n\geq 0}$ sur G est récurrente.

Exercice 4 *Sur un théorème de Lévy (ou plutôt Bachelier)*

Soit $(S_n)_{n\geq 0}$ une marche aléatoire simple symétrique. On pose $M_n := \max_{k\leq n} S_k$.

1. Soit $a \in \mathbb{Z}$ fixé. On pose
$$I := \inf\{i \geq 0, S_i = a\}, \qquad \forall i \geq 1,\ \widetilde{X}_i := \begin{cases} X_i, & \text{si } i \leq I \\ -X_i, & \text{si } i > I \end{cases}, \qquad \forall n \geq 0,\ \widetilde{S}_n := \sum_{i=1}^{n} \widetilde{X}_i.$$
Montrer que $(\widetilde{X}_1, \dots \widetilde{X}_n)$ a la même loi que $(X_1, \dots X_n)$ (indication : montrer que $(\widetilde{X}_1, \dots \widetilde{X}_n)$ est l'image de $(X_1, \dots X_n)$ par une involution de $\{-1, +1\}^n$). En déduire la même chose pour S et $\widetilde{S}$.
2. Montrer que pour tout $p \geq 0$, $q \leq p$, on a $\mathbb{P}(M_n \geq p, S_n \leq q) = \mathbb{P}(S_n \geq 2p - q)$.
3. En déduire que $(\frac{S_n}{\sqrt{n}}, \frac{M_n}{\sqrt{n}})_{n\geq 1}$ converge en loi vers (S, M) qui admet pour densité
$$(s, m) \mapsto \frac{2(2m - s)}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-(2m-s)^2/2} \mathbf{1}_{\{m\geq 0\}} \mathbf{1}_{\{s\leq 0\}}$$
par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$.
4. Déterminer les lois de S, M et $M - S$.
5. Déterminer la loi de $(2M - S, M)$.