ENS de Lyon $\hfill$ 2nd semestre 2019-2020

L3 - Intégration et Probabilités

TD 5

Indépendance, Lemme de Borel-Cantelli, convergence presque sûre.

Exercice 1 *Lemme de Borel-Cantelli, réciproque et hypothèses*

Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires, telles que pour tout $n \geq 1$, $Y_n \sim \mathcal{E}(n)$.

1. Montrer que la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers 0. En déduire que presque sûrement, à partir d'un certain rang, $Y_n \leq Y_1$.
2. On suppose maintenant que les variables aléatoires $(Y_n)_{n\geq 0}$ sont indépendantes. Calculer $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(Y_n > Y_1)$. Commenter.
3. (*au cas où...*) Soit $X \sim \mathcal{B}(1/2)$. Calculer $\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(X = 1)$. Commenter !

Exercice 2 *Somme et limite supérieure de variables aléatoires i.i.d.*

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires réelles positives i.i.d.

1. Montrer que presque sûrement $\sum_{n\geq 0} X_n = \infty$, sauf dans un cas à préciser.
2. Montrer que pour tout $\alpha > 0$, on a l'équivalence suivante

$$\mathbb{E}[X] < \infty \Leftrightarrow \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}\Big(X \geq \alpha n\Big) < \infty.$$

Indication. On pourra montrer d'abord que

$$\sum_{n\geq 0} \alpha n \mathbb{P}\Big(\alpha n \leq X < \alpha(n+1)\Big) \leq \mathbb{E}[X] \leq \sum_{n\geq 0} \alpha(n+1) \mathbb{P}\Big(\alpha n \leq X < \alpha(n+1)\Big).$$

En déduire que presque sûrement,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{n} = \begin{cases} 0 \text{ si } \mathbb{E}[X_1] < \infty \\ \infty \text{ si } \mathbb{E}[X_1] = \infty \end{cases} .$$

Exercice 3 *Plus longue sous-suite de piles*

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. Pour tout entier n, on note R_n le nombre de X_i consécutifs prenant la valeur 1, à partir de l'indice n. Formellement,

$$R_n := \sup\{m \geq 1, X_n = X_{n+1} = .. = X_{n+m-1} = 1\}.$$

On notera également

$$M_n = \max(R_0, .., R_n).$$

1. Montrer que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{R_n}{\log_2(n)} \leq 1 \quad \text{p.s.}$$

2. En déduire que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{M_n}{\log_2(n)} \leq 1 \quad \text{p.s.}$$

3. Conclure que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{M_n}{\log_2(n)} = 1 \quad \text{p.s.}$$

Exercice 4 *Convergence du maximum d'une suite de variables aléatoires*

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi exponentielle de paramètre 1.

1. Montrer que
$$\limsup_{n\to\infty} X_n/\ln(n) = 1 \quad \text{p.s.}$$

2. On pose $Z_n = \max(X_1, \dots, X_n)$. Montrer que
$$\liminf_{n\to\infty}(Z_n/\ln(n)) \geq 1 \quad \text{p.s.}$$

3. (*) On pose pour tout $n \geq 1$, $\phi(n) := \lceil \ln(n) \rceil$.
Montrer que $\limsup_n(Z_{\phi(n)}/\ln(\phi(n))) \leq 1$ p.s. En déduire que
$$\lim_{n\to\infty}(Z_n/\ln(n)) = 1 \quad \text{p.s.}$$