II. Séries entières et fonctions analytiques

Exercices

Dans les exercices $\mathbf{K}$ désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

Exercice II.1. On rappelle qu'un anneau A est intègre s'il est commutatif, non nul et que

$$\forall a, b \in A, \quad ab = 0 \Longrightarrow a = 0 \text{ ou } b = 0.$$

Démontrer que l'anneau des fonctions analytiques sur un ouvert U de $\mathbf{K}$ est intègre si et seulement si l'ouvert U est non vide et connexe.

Exercice II.2 (Fractions rationnelles). Soit f une fraction rationnelle. Démontrer que f est développable en série entière hors des pôles sur un rayon de convergence à décrire.

Exercice II.3 (Nombres de Catalan). Pour tout n, soit C_n le nombre de parenthésages possibles autour de $n+1$ facteurs pour préciser une expression faisant intervenir n fois une loi de composition interne *non associative*. Ainsi pour $n = 0$ ou $n = 1$, il n'y a qu'un parenthésage possible, mais pour $n = 2$, il y en a deux :

$$a(bc) \quad \text{ou} \quad (ab)c.$$

On note $S = \sum_{n\in\mathbf{N}} C_n T^n$ la série formelle correspondante.

1. Justifier la formule
$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}.$$
2. Démontrer que $TS^2 = S - 1$.
3. En déduire une expression de C_n en termes de n pour tout $n \in \mathbf{N}$.
4. Existe-t-il une fonction holomorphe f sur un ouvert de $\mathbf{C}$ contenant 0 tel que $zf^2 = f - 1$?
5. Démontrer que la série S a un rayon de convergence non nul.

Exercice II.4 (Nombres de Bell). Notons B_n le nombre de partitions de $\{1, \dots, n\}$. Par définition, $B_0 = 1$. Soit S la série $\sum_{n\in\mathbf{N}} \frac{B_n}{n!} z^n$ appelée *série génératrice exponentielle* de la suite $(B_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

1. Démontrer que S est solution d'une équation différentielle dans $\mathbf{C}[[z]]$, c'est-à-dire d'une équation faisant intervenir les dérivées de S.
2. Donner une expression de B_n en termes de n.
3. Prouver que la série S a un rayon de convergence strictement positif.
4. Quelle équation vérifie la fonction analytique définie par S ?

Exercice II.5 (Principe des zéros isolés). Rappeler le principe des zéros isolés pour les fonctions analytiques. Trouver toutes les fonctions analytiques sur $\mathbf{C}$ telles que l'on ait

$$f(\frac{1}{n+1}) = \frac{1}{(n+1)^3}$$

pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Exercice II.6 (Rappels sur l'exponentielle complexe). Rappelons que

$$\exp(z) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{z^n}{n!}.$$

Démontrer les relations suivantes

1. $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$ pour tous $a, b \in \mathbf{C}$;
2. $\overline{\exp(z)} = \exp\left(\overline{z}\right)$ pour $z \in \mathbf{C}$;
3. $|\exp(z)| = \exp(\Re(z))$ pour $z \in \mathbf{C}$.

Exercice II.7 (Autour du logarithme complexe). Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbf{C}^*$. Un *logarithme* sur Ω est une application continue $f : \Omega \to \mathbf{C}$ vérifiant $\exp \circ f = \mathrm{Id}_\Omega$.

1. Démontrer qu'il n'existe pas de fonction logarithme sur le cercle unité.
2. Quel lien y a-t-il entre les différents logarithmes sur un ouvert connexe donné ?
3. Démontrer que tout logarithme f sur un ouvert de $\mathbf{C}$ est holomorphe de dérivée $f'(z) = \frac{1}{z}$. Réciproquement démontrer que toute fonction holomorphe sur un ouvert connexe Ω, de dérivée $z \mapsto \frac{1}{z}$ est, à une constante près, un logarithme sur Ω.
4. Démontrer que l'on peut définir une fonction logarithme sur $\mathbf{C}$ privé d'une demi-droite issue de 0 quelconque.
5. Soit f une fonction holomorphe sur un disque D qui ne s'annule pas. Démontrer qu'il existe une fonction holomorphe g sur D telle que $f = \exp(g)$.
6. Démontrer qu'il n'existe pas de fonction holomorphe sur $\mathbf{C}$ qui vérifie $f \circ f = \exp$ (On pourra chercher à appliquer la question précédente à une telle fonction).

Exercice II.8 (Théorème d'inversion locale). On appelle *espace de Banach* un espace vectoriel normé complet. L'objectif de l'exercice est de démontrer le théorème d'inversion locale dans les espaces de Banach :

Théorème II.1. — *Soient E et F des espaces de Banach de normes respectives $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$. Soient $U \subset E$ un ouvert et $a \in U$. Soit $f : U \to F$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $\mathrm{d}f_a : E \to F$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels de E dans F. Il existe alors un ouvert U' de U contenant a tel que $f(U')$ est un ouvert de F et que l'application $f_{|U'} : U' \to f(U')$ donnée par $u \mapsto f(u)$ est un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^1$ (c'est-à-dire bijective et dont la réciproque est également de classe $\mathscr{C}^1$).*

1. Démontrer que l'on peut se ramener au cas où $E = F$, $a = f(a) = 0$ et $\mathrm{d}f_a = \mathrm{Id}_E$.
2. Démontrer qu'il existe un $r > 0$ tel que tout élément de $\overline{B}(0, \frac{r}{2})$ a un unique antécédent dans $\overline{B}(0, r)$. (Indication : on pourra considérer l'application $\varphi_y(x) = x + (y - f(x)$. Puis trouver un $r > 0$ tel que pour tout $y \in B(0, r)$, φ_y est $\frac{1}{2}$-contractante.)
3. Conclure.