**TD 11**

Marches aléatoires, Processus de branchement

**Exercice 1** *Une application de l'inégalité d'Esseen*

On rappelle qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout variable aléatoire réelle $X$, et pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$ de longueur 1,

$$\mathbb{P}(X \in I) \leq C \int_{|t| \leq 1} |\mathbb{E}[e^{itX}]| dt.$$

Soit $(X_k)_{k\geq 0}$ une suite de variable aléatoires i.i.d. avec $\mathbb{P}(X_k = -1) = \mathbb{P}(X_k = 1) = 1/2$. Soit $(a_k)_{k\geq 0}$ une suite de réels. On suppose qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $k \geq 0, |a_k| \geq \delta$. Pour tout $n \geq 0$, on pose $S_n = \sum_{k\leq n} a_k X_k$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(S_n \in [x - 1/2, x + 1/2]) = O(1/\sqrt{n}),$$

où le $O$ est indépendant de $x$.

*Indication : on pourra utiliser l'estimée de l'intégrale de Wallis* $\int_0^{\pi/2} \cos(u)^n du = \sqrt{\pi/2n} + o(1/\sqrt{n})$.

**Définition :** Soit $G = (V, E)$ un graphe fini ou infini, mais localement fini. La marche aléatoire simple sur $G$ démarrée en $x$ est un processus $X_0, X_1, X_2, \dots$ dont la loi $\mathbb{P}_x$ est caractérisée ainsi. Pour $v_0, v_1, \dots, v_n \in V$, on a

$$\mathbb{P}_x(X_0 = v_0, X_1 = v_1, \dots, X_n = v_n) = \mathbf{1}_{v_0=x} \frac{\mathbf{1}_{v_0 v_1 \in E}}{\deg(v_0)} \cdots \frac{\mathbf{1}_{v_{n-1} v_n \in E}}{\deg(v_{n-1})}$$

**Exercice 2** *Marche sur un arbre*

La marche aléatoire simple sur un arbre binaire enraciné infini est-elle récurrente ou transiente ?

**Exercice 3** *Hitting time theorem*

Soit $\mathbb{P}_k$ la loi d'une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ qui débute au point $k \geq 0$. Soit $(Y_i)_{i\geq 0}$ des variables i.i.d. à valeurs entières, qui correspondent aux pas de la marche aléatoire, et soit $S_n$ la position de la marche aléatoire après $n$ pas, qui débute en $k$. Autrement dit, on a $S_n = k + Y_1 + \dots + Y_n$, $\mathbb{P}_k$ p.s. Soit $H_0 = \inf\{n, S_n = 0\}$. On suppose par ailleurs que pour tout $i \geq 1, \mathbb{P}(Y_i \geq -1) = 1$. On souhaite démontrer par récurrence la propriété

$$\mathcal{P}_n : \text{« pour tout } k \geq 0, \mathbb{P}_k(H_0 = n) = \frac{k}{n} \mathbb{P}_k(S_n = 0) \text{ ».}$$

1. Montrer $\mathcal{P}_1$.
2. Dans toute la suite, on suppose qu'il existe $n \geq 2$ tel que $\mathcal{P}_{n-1}$ est vraie.
   (a) Montrer que $\mathbb{P}_k(H_0 = n \mid Y_1 = s) = \dfrac{k+s}{n-1} \mathbb{P}_{k+s}(S_{n-1} = 0)$.
   (b) En déduire que $\mathbb{P}_k(H_0 = n) = \displaystyle\sum_{s=-1}^{+\infty} \frac{k+s}{n-1} \mathbb{P}_{k+s}(S_{n-1} = 0)\mathbb{P}(Y_1 = s)$.
   (c) Montrer que $\mathbb{E}_k[Y_1 \mid S_n = 0] = -k/n$.
   (d) Conclure que $\mathcal{P}_n$ est vraie.

**Exercice 4** *Percolation sur un arbre régulier.*

Soit $d$ un entier $\geq 2$, et $p \in [0,1]$. On note $\mathbb{T}_d$ l'arbre $d$-régulier (chaque sommet a exactement $d$ voisins). Soit $(X_e)_{e\in E}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi Bernoulli de paramètre $p$, indexée par l'ensemble $E$ des arêtes de $\mathbb{T}_d$. On considère le sous-graphe aléatoire $G_p$ dont les sommets sont ceux de $\mathbb{T}_d$, et les arêtes sont les arêtes $e$ de $\mathbb{T}_d$ telles que $X_e = 1$.

1. Montrer que la probabilité qu'il existe une composante connexe infinie dans $G_p$ vaut 0 lorsque $p \leq 1/(d-1)$.
2. Montrer que la probabilité qu'il existe une infinité de composantes connexes infinies dans $G_p$ vaut 1 lorsque $1/(d-1) < p < 1$.

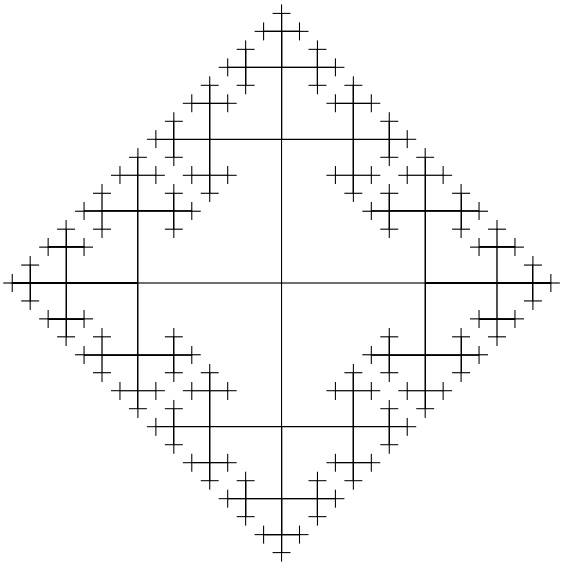

Figure 1 – Une partie de l'arbre 4-régulier $\mathbb{T}_4$.