TD 11

Transformée de Fourier et de Fourier-Plancherel

Dans ce TD, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction intégrable, sa transformée de Fourier est définie par la formule

$$\hat{f} : \xi \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi}dx.$$

Par ailleurs, on note $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ la transformée de Fourier-Plancherel.

Exercice 1 *Inégalité de Heisenberg*

Soit $\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace de Schwartz, composé des fonctions $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que

$$\forall n,k \in \mathbb{N}, \quad |x^n|f^{(k)}(x) \underset{|x|\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\int_{\mathbb{R}} f^2 = 1$.

1. Montrer que
$$2\int_{\mathbb{R}} xf'(x)f(x)dx = -1.$$
2. En déduire que
$$\left(\int_{\mathbb{R}} x^2|f(x)|^2dx\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}} \xi^2|\hat{f}(\xi)|^2d\xi\right)^{1/2} \geq \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$
3. Dans quels cas a-t on égalité ?

Exercice 2 *Échantillonage de Shannon*

On note I l'intervalle $[-1,1]$. Soit B l'ensemble des fonctions $f \in L^2(\mathbb{R})$ telles que le support de $\mathcal{F}(f)$ est inclus dans I. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on note $e_n : x \mapsto \exp(i\pi nx)/\sqrt{2}$. On note sinc la fonction $x \mapsto \sin(x)/x$.

1. Démontrer que B est un espace de Hilbert, et que l'on a une isométrie bijective entre B et $L^2(\mathbb{R}/2\mathbb{Z}, Leb)$.

   Indication : un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert est un espace de Hilbert.
2. Rappeler pourquoi $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}/2\mathbb{Z}, Leb)$, puis en déduire une base hilbertienne de B.
3. En déduire que pour tout $f \in B$, la série
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n\pi)\mathrm{sinc}\,(x - n\pi)$$
   converge normalement (pour la norme sur B) vers la fonction f.
4. Démontrer que la série de la question précédente converge normalement pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exercice 3 *La fonction caractéristique de la loi de Cauchy*

1. Calculer la transformée de Fourier de la fonction $x \mapsto e^{-|x|}$.
2. En déduire la fonction caractéristique de la loi de Cauchy.

Exercice 4 *Un calcul de transformée de Fourier par changement de variable*

On cherche à déterminer la transformée de Fourier $\hat{f}$ de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, sans faire appel à la formule d'inversion.

1. Après avoir justifié que $\hat{f}$ est bien définie, prouver la formule suivante, pour ξ réel,

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*} e^{-i\xi\frac{x}{y}} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dxdy,$$

puis se ramener à une intégrale en y.

2. Montrer que pour $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable positive, et $c > 0$, on a toujours

$$\int_{\mathbb{R}} g\left(y - \frac{c}{y}\right) dy = \int_{\mathbb{R}} g(y) dy.$$

3. Déterminer $\hat{f}$.