

Contributions à l'étude numérique de problèmes inverses non linéaires.

Manuscrit présenté et soutenu publiquement
le 11 juin 2021

en vue d'obtenir le diplôme de

**Habilitation à Diriger des Recherches
de l'Université de Paris**

Spécialité Mathématiques Appliquées

par

Maya DE BUHAN

Composition du jury

Rapporteurs : Grégoire ALLAIRE
Franck BOYER
Olivier PIRONNEAU

Examineurs : Anne-Sophie BONNET-BEN DHIA
Pascal FREY
Juliette LEBLOND
Axel OSSES
Marcela SZOPOS

Table des matières

Remerciements	5
Préambule	7
Bibliographie	13
1 La méthode AEI : une méthode de régularisation adaptative	15
1.1 Fondements de la méthode	15
1.1.1 Introduction	15
1.1.2 Références sur les méthodes de régularisation	16
1.1.3 Une nouvelle paramétrisation	17
1.1.4 Un processus adaptatif	18
1.1.5 Prise en compte de l'anisotropie	18
1.1.6 L'algorithme AEI	19
1.1.7 Calcul du gradient et minimisation de la fonctionnelle	21
1.1.8 Génération des données et ajout de bruit	22
1.2 Application à la diffraction acoustique inverse	22
1.2.1 Introduction	22
1.2.2 Quelques références sur les méthodes de diffraction acoustique inverse	22
1.2.3 Le problème inverse	23
1.2.4 Résultats numériques	26
1.3 Application à la diffraction électromagnétique inverse	28
1.3.1 Introduction	28
1.3.2 Quelques références sur les méthodes de diffraction électromagnétique inverse	29
1.3.3 Le problème inverse	29
1.3.4 Résultats numériques	30
1.4 Imagerie micro-onde pour la détection des accidents vasculaires cérébraux	33
1.4.1 Introduction	33
1.4.2 Références sur les méthodes d'imagerie micro-onde	35
1.4.3 Le problème direct	35

1.4.4	Le problème inverse	37
1.4.5	Résultats numériques	38
1.4.6	Conclusion	39
1.5	Perspectives	40
2	La méthode C-bRec : une méthode de reconstruction globalement convergente	43
2.1	Fondements de la méthode illustrés sur un exemple	43
2.1.1	Introduction	44
2.1.2	Références sur les méthodes de reconstruction globalement convergentes .	45
2.1.3	L'idée fondatrice de la méthode C-bRec	47
2.1.4	Une inégalité de Carleman adéquate	47
2.1.5	L'algorithme C-bRec	48
2.1.6	Le résultat de convergence	49
2.1.7	Une première difficulté	50
2.2	Mise en oeuvre numérique illustrée sur un exemple	52
2.2.1	Génération des données, ajout de bruit et régularisation	52
2.2.2	Discrétisation et minimisation de la fonctionnelle	53
2.2.3	Critères d'arrêt et erreur	55
2.2.4	Résultats numériques	55
2.3	Application à la récupération de la vitesse dans l'équation des ondes	60
2.3.1	Le problème inverse	60
2.3.2	L'algorithme C-bRec	61
2.3.3	Résultats numériques	63
2.4	Application à une équation de réaction-diffusion	66
2.4.1	Le problème inverse	67
2.4.2	Une inégalité de Carleman pour la chaleur	68
2.4.3	L'algorithme C-bRec	69
2.4.4	Résultats numériques	71
2.5	Perspectives	74
3	Une méthode automatique d'appariement de formes	77
3.1	Fondements de la méthode	77
3.1.1	Introduction	77
3.1.2	Quelques références sur les méthodes d'appariement de formes	77
3.1.3	L'appariement de formes comme un problème d'optimisation de formes .	78
3.1.4	Dérivée de forme de la fonctionnelle et direction de descente	79

	3
3.1.5	Paramétrisation par des déplacements élastiques 80
3.1.6	L'algorithme d'appariement de formes 81
3.2	Mise en oeuvre numérique et premiers exemples 82
3.2.1	Exemples numériques 82
3.2.2	Comparaison avec une autre fonctionnelle de coût 85
3.2.3	Perspectives 86
3.3	Application en reconstruction faciale 86
3.3.1	Références sur les méthodes de reconstruction faciale 86
3.3.2	Acquisition des données 88
3.3.3	Une méthode d'enveloppement 89
3.3.4	Déformation du modèle cranio-facial sur le crâne inconnu. 90
3.3.5	Résultats et discussion 92
3.3.6	Perspectives 94
Bibliographie	95

Remerciements

Je souhaiterais tout d'abord remercier Grégoire Allaire, Franck Boyer et Olivier Pironneau qui ont accepté de consacrer leur temps si précieux pour lire et évaluer mon travail. Merci pour vos rapports détaillés et précis et pour vos encouragements qui m'ont d'autant plus touchée que je porte une estime particulière à vos travaux. Je remercie aussi Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia, Juliette Leblond et Marcela Szopos d'honorer ma soutenance de leur présence. Merci d'être pour moi des modèles de réussite, chacune dans votre domaine.

Mes remerciements vont également à mes directeurs de thèse, Pascal Frey et Axel Osses, qui m'ont tous les deux, à leur manière, appris de nombreuses choses. Merci Pascal pour ton enthousiasme et pour m'avoir embarquée dans des projets ambitieux, source de surprises avancées. Merci Axel pour ton incroyable rigueur, ta pédagogie et pour m'avoir fait découvrir la richesse des problèmes inverses. J'espère que je saurai apporter autant aux doctorant.e.s que j'encadrerai.

Je tiens tout particulièrement à remercier chaleureusement mes coauteurs, sans qui rien n'aurait pu être possible : Lucie Baudouin, Sylvain Ervedoza, Muriel Boulakia, Erica Schwindt, Marion Darbas, Marie Kray, Pierre-Henri Tournier, Frédéric Nataf et les membres du projet ANR MEDIMAX, Chiara Nardoni, Charles Dapogny, Lydie Uro et les membres du projet Sorbonne Université FaciLe, Antoine Gloria, Marina Vidrascu, Patrick Le Tallec, Philippe Moireau, Dominique Chapelle et Nicolae Cindea. J'ai eu une chance inouïe de pouvoir collaborer avec vous et j'espère que nous continuerons à interagir.

Au sein du laboratoire MAP5, j'ai eu la chance de bénéficier d'un environnement de travail particulièrement favorable (avec une vue imprenable sur Notre-Dame!). Je tiens à remercier les cinq piliers du laboratoire : sa gestionnaire Marie-Hélène Gbaguidi, ses directrices d'unité successives Annie Raoult, Fabienne Comte et Anne Estrade et la directrice de l'UFR, Christine Graffigne. Merci pour votre gentillesse et votre efficacité! S'il faisait bon travailler au MAP5, c'est également grâce aux collègues que j'ai eu l'opportunité de côtoyer, à commencer par mon co-bureau Georges Koepfler, mais également Manon Defosseux, Céline Duval, Flora Alarcon, Julie Delon, Florent Benaych-Georges, Bérénice Grec, Nicolas Meunier, Marc Briant, Sébastien Martin, Camille Pouchol, Raphaël Lachieze-Rey, Grégory Nuel, Nathalie Eisenbaum, Ellen Saada, Etienne Birmelé, Eric Luçon, Rémy Abergel, Lionel Moisan, Antoine Chambaz, Andrés Almansa, Olivier Bouaziz, Bruno Galerne et Joan Glaunès. Vous me manquez!

Je suis également reconnaissante envers Frédéric Rousset et Quentin Mérigot pour leur accueil au laboratoire de mathématiques d'Orsay où, malgré les restrictions, j'ai déjà pu entrevoir l'ambiance de travail stimulante qui y règne.

Je profite également de cette page pour remercier quelques mathématicien.ne.s, avec qui je n'ai pas (encore) eu l'occasion de collaborer, mais que j'ai toujours autant de plaisir à retrouver au gré des conférences et événements : Evelyne Miot, Yannick Privat, Morgan Morancey, Pierre Lissy, Julie Valein, Emmanuelle Crépeau, Karine Beauchard, Ludovic Gagnon, Vincent Perrollaz, Michel Duprez, Thibault Liard, Pauline Lafitte, Laurent Bourgeois, Christophe Hazard,

Sonia Fliss, Jérémy Dardé, Marc Bonnet, Bérangère Delourme, Lucas Chesnel, Pierre Millien, Elie Bretin, Laurent Sepeccher, Habib Ammari, Houssein Haddar, Matthieu Léautaud, Camille Laurent, Fatiha Alabau, Thierry Horsin, Olivier Glass, Luc Robbiano, Jérôme Le Rousseau, Franck Sueur, Emmanuel Trélat, Michel Cristofol, Eric Bonnetier, Karim Ramdani, Cédric Bellis, Takeo Takahashi, Romain Joli, Alberto Mercado, Eduardo Cerpa, Nicolás Carreño, Thierry Colin, Gabriel Peyré, Agnès Desolneux, Jean-Marie Mirebeau, Albert Cohen, Yvon Maday, Frédéric Lagoutière, Céline Grandmont, Laurent Boudin, Jean-François Babadjian, Bruno Després, ainsi que Ludovic Goudenège, Flore Nabet, Annabelle Collin, Emeric Bouin, Thomas Rey et les membres d'Opération Postes, Barbara Schapira, Victorita Dolean et Indira Chatterji sur le forum parité. Merci pour nos échanges et vos conseils. Merci de rendre notre communauté mathématique si compétente et conviviale.

Enfin, merci à ma famille - et spécialement à mon père pour la relecture de ce manuscrit - pour son soutien sans faille.

Préambule

Depuis mon arrivée au laboratoire de Mathématiques Appliquées de Paris 5 en janvier 2012, mon intérêt s'est concentré sur des problèmes inverses de récupération de paramètres dans des équations aux dérivées partielles. Ce sont ces travaux que je souhaite vous présenter dans ce manuscrit. Mais avant de rentrer dans le vif du sujet, je voudrais profiter de cette introduction pour faire un inventaire des différentes difficultés que l'on rencontre dans les problèmes inverses. Cela me permettra d'expliquer plus précisément à quelles problématiques répondent mes travaux. Pour un panorama plus large concernant les problèmes inverses, je vous invite à consulter les livres de Michel Kern [1-39] et de Guy Chavent [1-17].

Un problème est dit inverse lorsqu'il consiste à déterminer les causes d'un phénomène connaissant les effets. Dans ce manuscrit, nous considérons des phénomènes physiques ou biologiques qui peuvent se modéliser par une équation aux dérivées partielles (EDP). Elle pourra être de nature hyperbolique (Sec 1.2, Sec 2.1-2.3), parabolique (Sec 2.4) ou elliptique (Sec 1.3 et 1.4). Cette équation dépend d'un certain nombre de paramètres : des données initiales, des conditions au bord, du terme source (Sec 2.4), de coefficients intrinsèques (Sec 2.1-2.3), de la forme du domaine (Ch 3) ou de celle d'un obstacle (Sec 1.2 et Sec 1.3). On suppose alors que l'un de ces paramètres est inconnu mais que l'on a accès à des données supplémentaires, au travers de mesures expérimentales sur la solution de l'EDP. Ces données peuvent être internes (Sec 1.2, Sec 2.4) ou localisées sur le bord du domaine (Sec 1.3, Sec 2.1-2.3), mesurées pendant un intervalle de temps donné (Sec 1.2, Sec 2.1-2.3) ou à des temps ponctuels (Sec 2.4), porter sur la solution elle-même ou sur ses dérivées, etc.

L'intérêt des problèmes inverses est double. Tout d'abord ils permettent d'estimer les paramètres inconnus du modèle direct afin d'utiliser ensuite ce dernier à des fins prédictives. Mais leurs grandes forces résident dans leur capacité à imager un milieu. Le principe réside dans le fait que les coefficients d'un modèle varient spatialement dans le milieu en fonction des propriétés physiques de ce dernier. Donc leur récupération permet de discriminer les différentes zones de ce milieu, par exemple de détecter un sous-marin dans un océan ou une tumeur dans un tissu sain. C'est cette application qui est utilisée à la Section 1.4 en utilisant les micro-ondes pour cartographier la permittivité électrique du cerveau.

Pour donner une formulation générale des problèmes que nous considérerons par la suite, nous allons introduire trois espaces de Hilbert. Soient donc P l'espace des paramètres, U l'espace des solutions et D l'espace des données, munis des normes $\|\cdot\|_P$, $\|\cdot\|_U$ et $\|\cdot\|_D$ respectivement. On note alors \mathcal{M} l'opérateur direct qui à un paramètre $p \in P$ associe la donnée $d \in D$, au travers de mesures de la solution $u[p] \in U$ de l'équation aux dérivées partielles (voir le schéma de la Figure 1). On va supposer que cette EDP est toujours bien posée et qu'il existe donc un ensemble de paramètres admissibles P_{adm} , convexe et fermé de P , tel que pour tout $p \in P_{adm}$, il existe une unique solution $u[p] \in U$ qui dépend continument de p .

Dans ce manuscrit, nous ne considérerons que des problèmes pour lesquels l'opérateur \mathcal{M} est non linéaire. La non linéarité peut venir de l'équation aux dérivées partielles elle-même (Sec

2.4), du fait que la solution $u[p]$ dépend non linéairement du paramètre p bien que l'EDP sous-jacente soit linéaire (Ch 1 et Sec 2.1-2.3), ou plus rarement du fait que l'opérateur de mesures est non linéaire en la solution. Les problèmes inverses non linéaires constituent une famille fondamentalement plus difficile de problèmes inverses pour lesquels il existe moins de résultats généraux.

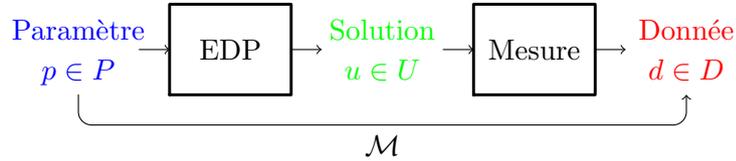


Figure 1 – Notations utilisées dans ce manuscrit.

Le problème inverse consiste alors à retrouver un paramètre exact, noté p_* et supposé appartenir à P_{adm} , à partir de données observées d^{obs} de $\mathcal{M}(p_*)$. Si la donnée d^{obs} est dans l'espace atteignable $\mathcal{M}(P_{adm})$, le problème peut se formuler de la manière suivante :

$$\text{Chercher un paramètre } p \in P_{adm} \text{ tel que } \mathcal{M}(p) = d^{obs}. \quad (1)$$

La première question que l'on se pose est celle du caractère bien posé (au sens de Hadamard [1-64]) : est-ce que (1) admet une unique solution qui dépend continûment de la donnée d^{obs} ?

Puisque $d^{obs} \in \mathcal{M}(P_{adm})$ alors l'existence est garantie par définition. Mais il peut y avoir un défaut

- (P1) d'unicité, si \mathcal{M} n'est pas injectif. Dans ce cas, même si $d^{obs} = \mathcal{M}(p_*)$, il se peut que p et p_* ne coïncident pas.
- (P2) de stabilité, si \mathcal{M}^{-1} n'est pas continu. Le fait que d^{obs} approche les données exactes $\mathcal{M}(p_*)$ ne signifie alors pas nécessairement que p approche p_* .

Ces questions sont fondamentales en problèmes inverses et ont conduit à de très nombreux travaux que je mentionnerai au Chapitre 2 de ce manuscrit. C'est en particulier le type de résultats que j'ai obtenus lors de ma thèse concernant un problème inverse en viscoélasticité [A16]

Par ailleurs, dans les applications, d^{obs} n'appartient jamais à l'espace atteignable $\mathcal{M}(P_{adm})$, soit parce que \mathcal{M} ne représente pas de manière précise le processus que l'on étudie (erreur de modèle), soit à cause de bruit dans les données (erreur de mesures). Dans ce cas, la notion de solution à (1) n'a plus de sens. Pour remédier à ce constat, l'une des techniques les plus courante est la reformulation du problème inverse sous la forme de la minimisation d'une fonctionnelle d'erreur entre les données observées et les données synthétiques, solutions du problème direct. Ainsi, le problème devient

$$\text{Chercher un paramètre } p \in P_{adm} \text{ qui minimise } F(p) = \frac{1}{2} \|\mathcal{M}(p) - d^{obs}\|_D^2. \quad (2)$$

Cette formulation s'appelle une méthode de moindres carrés et F est la fonctionnelle de coût ou fonction objectif. Si cette formulation permet de redonner un sens à la notion de solution, des difficultés subsistent. En particulier,

- (P3) Si $\mathcal{M}(P_{adm})$ est non fermé, il peut ne pas y avoir existence du projeté de d^{obs} dans $\mathcal{M}(P_{adm})$. Dans ce cas, rien ne garantit que le minimum de F (qui existe car F est positive) soit atteint en un point de P_{adm} .

- (P4) Si $\mathcal{M}(P_{adm})$ est non convexe, il peut ne pas y avoir unicité et stabilité de la projection de d^{obs} dans $\mathcal{M}(P_{adm})$.
- (P5) Si F est non convexe, elle peut présenter de nombreux minima locaux. Un algorithme de minimisation classique ne sera alors pas assuré de converger vers le minimum global de F . C'est à cette troisième question que nous nous intéressons dans le Chapitre 2 de ce manuscrit.

Dans le cas où \mathcal{M} est linéaire, F est toujours convexe, solutionnant le point (P5). Le point (P4) ne pose pas non plus de problème car l'ensemble $\mathcal{M}(P_{adm})$ est alors convexe et la projection, si elle existe, est toujours unique et Lipschitz continue. Le point (P3) (le possible manque d'existence de la projection) subsiste, mais il peut être résolu, simultanément avec les points (P1) et (P2), par une méthode de régularisation appropriée. Cette question sera abordée au Chapitre 1. Par contre, dans le cas non linéaire, du fait de la possible non unicité et non continuité de la projection, on ne peut pas espérer garantir le caractère bien posé pour tout $d^{obs} \in D$.

Une dernière série de questions concernent la résolution numérique du problème (2). Avant de pouvoir résoudre ce problème de dimension infinie, il faut le réduire à un problème de dimension finie. Pour cela, il faut choisir une paramétrisation finie pour le paramètre p (voir Section 1.1) et également une discrétisation adéquate de l'EDP, de l'opérateur de mesure et de la fonctionnelle F . Les questions qui se posent sont alors les suivantes :

- (P6) Au niveau discret, est-ce que les propriétés de F sont préservées et en particulier sont elles uniformes vis-à-vis du pas de discrétisation ? Problème abordé à la Section 2.2.
- (P7) Est-ce que le paramètre obtenu par minimisation de la fonctionnelle discrète converge (en un sens à définir) vers le paramètre exact p_* lorsque le pas de discrétisation tend vers 0 ?
- (P8) Peut-on obtenir le minimiseur en un temps acceptable en pratique. En effet, les méthodes itératives nécessitent de résoudre de nombreuses fois l'EDP, conduisant à des temps de calculs parfois prohibitifs. Cela a été la préoccupation au coeur du travail décrit à la Section 1.4.

Ainsi, la question de savoir si la minimisation de F va effectivement conduire à récupérer le coefficient inconnu p_* en cache en fait plusieurs autres de nature fondamentalement différentes et faisant appel à divers domaines des mathématiques (analyse, analyse numérique et optimisation respectivement).

J'ai choisi d'organiser ce manuscrit en trois chapitres, chacun présentant une méthodologie développée ces dernières années pour répondre à l'une des problématiques listées ci-dessus. Pour chaque méthodologie, je présente tout d'abord ses fondements, puis sa mise en oeuvre sur différents exemples académiques et enfin, j'envisage son application à un cas biomédical concret. Chaque chapitre est indépendant et possède sa propre bibliographie. Afin de garder une certaine cohérence dans mon exposé, j'ai pris le parti de ne pas présenter mes travaux de thèse [A12–A16] et de post-doctorat [A17, A18], en lien également avec les problèmes inverses.

Chapitre 1 : La méthode AEI, une méthode de régularisation adaptative

Dans le premier chapitre, je présente une méthode de régularisation adaptative, nommée *Adaptive Eigenspace Inversion method*, que j'ai introduite pendant ma thèse [A15]. Comme vous le verrez, cette méthode est relativement simple à mettre en oeuvre et améliore grandement la stabilité (problématique (P2)) et la précision des résultats du problème inverse. Elle intervient dans le cadre de la résolution d'un problème inverse de récupération de coefficients au travers de la minimisation d'une fonctionnelle de coût telle que (2) qui dépend classiquement de l'écart

entre la solution numérique et les données expérimentales. L'originalité de la méthode réside dans la manière de paramétrer le problème. Dans le cas particulier de la récupération d'un obstacle (coefficient présentant une discontinuité), la méthode propose un processus adaptatif qui adapte conjointement le maillage et la base de paramétrisation en fonction du résultat obtenu à l'étape précédente. L'adaptation de base consiste à chercher le coefficient inconnu dans l'espace engendré par les fonctions propres d'un opérateur elliptique choisi judicieusement en fonction de la solution obtenue à l'itération précédente. Ce processus permet de concentrer les variations des fonctions de base dans les régions où le coefficient varie le plus, c'est à dire au voisinage de l'interface de l'obstacle qui est ainsi capturée de manière plus précise. Dans le travail [A2] réalisé avec Marie Kray, nous nous intéressons à l'application de cette méthode dans le cas d'un problème de diffraction inverse pour l'équation des ondes. L'article [A6] en collaboration avec Marion Darbas étend cette approche au problème de la diffraction électromagnétique inverse. Ce travail a été réalisé dans le cadre du projet ANR MEDIMAX où nous nous intéressons à la détection des accidents vasculaires cérébraux par imagerie micro-onde. Les travaux [A5, A8] de post-doctorat de Pierre-Henri Tournier, co-encadré avec Frédéric Nataf, traitent de ce sujet.

Chapitre 2 : La méthode C-bRec, une méthode de reconstruction globalement convergente

Avec Lucie Baudouin et Sylvain Ervedoza, nous nous intéressons aux problèmes inverses de détermination de coefficients dans des équations d'évolution à partir d'une seule mesure de la solution sur une partie du domaine. Alors que les résultats d'unicité et de stabilité pour ces problèmes sont généralement bien connus, nous avons développé ces dernières années un algorithme pour les résoudre. L'algorithme C-bRec (pour *Carleman based Reconstruction Algorithm*) a été présenté initialement dans [A1] dans le cas de la récupération d'un potentiel dans l'équation des ondes. La nouveauté est que grâce à une inégalité de Carleman adéquate, nous prouvons que cet algorithme est globalement convergent, c'est-à-dire qu'il converge vers la solution exacte quelque soit la donnée initiale. En ce sens, il remédie au problème des minima locaux dont souffrent les méthodes classiques de type moindres carrés (problématique (P5)). Dans [A4] et toujours dans le cas de la récupération d'un potentiel pour l'équation des ondes, nous avons amélioré l'algorithme en levant des obstacles numériques liés à la présence des poids de Carleman dans la fonctionnelle et proposé de nombreux exemples numériques pour illustrer ses propriétés de convergence. La convergence est très rapide en comparaison avec les méthodes de moindres carrés car la fonctionnelle à minimiser à chaque itération est continue strictement convexe et coercive. Récemment, nous avons généralisé l'approche à d'autres cas : d'une part à la récupération non plus d'un potentiel mais de la vitesse de propagation de l'onde ([A11] avec Axel Osses) permettant d'envisager des applications en imagerie médicale et d'autre part à la récupération d'un terme source dans une équation parabolique non linéaire ([A10] avec Erica Schwindt et Muriel Boulakia) avec à la clef une application en détection de polluants atmosphériques.

Chapitre 3 : Une méthode d'appariement de formes automatique

Dans ce dernier chapitre, je présente les travaux réalisés avec Chiara Nardoni, lors de sa thèse co-encadrée par Pascal Frey. Nous nous intéressons au problème d'appariement de formes suivant : étant donnée une forme de référence et une forme cible, notre objectif consiste à déformer le maillage de la forme de référence en un maillage de calcul valide de la forme cible. Dans [A3] avec Charles Dapogny, en nous appuyant sur des techniques d'optimisation de formes, nous construisons la transformation comme une suite de déplacements élastiques, solutions d'un

problème de minimisation d'une énergie volumique dépendant de la distance signée entre les formes. La méthode a été implémentée en deux et trois dimensions d'espace. Dans [A9] avec Lydie Uro, nous comparons cette approche à une stratégie plus classique faisant intervenir la distance entre les frontières des formes.

Dans [A7], toujours avec Chiara Nardoni, nous développons une nouvelle méthode de reconstruction faciale pour la médecine légale. L'objectif est de proposer un visage possible pour un crâne donné, à des fins d'identification. L'approche retenue combine certains aspects classiques tels que l'utilisation d'une base de données crâne/visage pour apprendre les relations entre les deux et des aspects plus originaux : (i) nous utilisons la méthode d'appariement de formes du paragraphe ci-dessus pour relier le crâne inconnu aux éléments de la base de données, (ii) le visage final est vu comme un masque élastique 3D qui est adapté sur le crâne inconnu. Dans notre approche, le crâne est considéré dans son ensemble, comme une surface, et non restreint à quelques points anatomiques positionnés manuellement comme c'est le cas dans les méthodes de la littérature. En particulier, notre approche est totalement automatique.

Bibliographie

Travaux présentés dans ce manuscrit

- [A1] L. Baudouin, M. de Buhan, S. Ervedoza. *Global Carleman estimates for waves and applications*, Communications in Partial Differential Equations, 38(5):823-859, 2013. 10, 43, 48
- [A2] M. de Buhan, M. Kray. *A new approach to solve the inverse scattering problem for waves: combining the TRAC and the Adaptive Inversion methods*. Inverse Problems, 29:085009, 2013. 10, 15, 77
- [A3] M. de Buhan, C. Dapogny, P. Frey, C. Nardoni. *An optimization method for elastic shape matching*. Comptes Rendus Mathématique, 354(8):783-787, 2016. 10, 77
- [A4] L. Baudouin, M. de Buhan, S. Ervedoza. *Convergent algorithm based on Carleman estimates for the recovery of a potential in the wave equation*, SIAM Numerical Analysis, 55(4):1578-1613, 2017. 10, 43
- [A5] P.H. Tournier, M. Bonazzoli, V. Dolean, F. Rapetti, F. Hecht, F. Nataf, I. Aliferis, I. El Kanfoud, C. Migliaccio, M. de Buhan, M. Darbas, S. Semenov, C. Pichot. *Numerical Modeling and High Speed Parallel Computing: New Perspectives for Tomographic Microwave Imaging for Brain Stroke Detection and Monitoring*. IEEE Antennas and Propagation Magazine, 59(5):98-110, 2017. 10, 15, 77
- [A6] M. de Buhan, M. Darbas. *Numerical resolution of an electromagnetic inverse medium problem at fixed frequency*. Computers and Mathematics with Applications, 74(12):3111 - 3128, 2017. 10, 15
- [A7] M. de Buhan, C. Nardoni. *A facial reconstruction method based on new mesh deformation techniques*, Forensic Sciences Research, 3(3):256-273, 2018. 11
- [A8] P.H. Tournier, I. Aliferis, M. Bonazzoli, M. de Buhan, M. Darbas, V. Dolean, F. Hecht, P. Jolivet, I. El Kanfoud, C. Migliaccio, F. Nataf, S. Semenov, C. Pichot. *Microwave imaging of cerebrovascular accidents by using High Performance Computing*, Parallel Computing, 85, 2019. 10, 15
- [A9] M. de Buhan, C. Nardoni, L. Uro. *Volumic and surfacic shape matching : comparison of two optimization methods*, soumis. 11
- [A10] M. Boulakia, M. de Buhan, E. Schwindt. *Numerical reconstruction based on Carleman estimates of a source term in a reaction-diffusion equation*, ESAIM :COCV, 27 S27, 34p, 2020. 10, 43
- [A11] L. Baudouin, M. de Buhan, S. Ervedoza, A. Osses. *Carleman-based Reconstruction algorithm*, SIAM J. Numer. Anal., 59(2), pp. 998-1039, 2021. 10, 43

Travaux non présentés dans ce manuscrit

- [A12] M. de Buhan, A. Osses. *A stability result in parameter estimation of the 3D viscoelasticity system*. C. R. Acad. Sci. Paris, 347:1373-1378, 2009. 9, 75
- [A13] M. de Buhan, P. Frey. *A generalized model of nonlinear viscoelasticity: numerical issues and applications*. Int. J. Numer. Meth. Eng., 86(13):1544-1557, 2011. 9, 75
- [A14] M. de Buhan, P. Frey. *Modelling and simulation of the nonlinear viscoelastic behavior of brain structures on complex domains*. hal-00472813, 2010. 9
- [A15] M. de Buhan, A. Osses. *Logarithmic stability in determination of a 3D viscoelastic coefficient and a numerical example*. Inverse Problems, 26(9):95006-95043, 2010. 9, 15
- [A16] M. de Buhan. *Problèmes inverses et simulations numériques en viscoélasticité 3D*. PhD thesis, UPMC et Universidad de Chile, 2010. 8, 9, 82
- [A17] D. Chapelle, N. Cîndea, M. de Buhan, P. Moireau. *Exponential convergence of an observer based on partial field measurements for the wave equation*. Mathematical Problems in Eng., 581053, 2012. 9
- [A18] M. de Buhan, A. Gloria, P. Le Tallec, M. Vidrascu. *Reconstruction of a constitutive law for rubber from in silico experiments*. International Journal of Solids and Structures, 62:158-173, 2015. 9
- [A19] M. de Buhan, S. Ervedoza, A. Osses. *Recovery of the bottom profile in a 1-D tank containing a fluid modeled by the Saint-Venant equations*. en rédaction, 2020.
- [A20] P.-H. Maire, M. de Buhan, A. Diaz, C. Dobrzynski, G. Kluth, F. Lagoutière. *A cell-centered arbitrary lagrangian eulerian method for multi-material compressible flows*. ESAIM: Proc, 24:1-13, 2008.
- [A21] I. El Kanfoud, V. Dolean, C. Migliaccio, J. Lanteri, I. Aliferis, C. Pichot, P.-H. Tournier, F. Nataf, F. Hecht, S. Semenov, M. Bonazzoli, F. Rapetti, R. Pasquetti, M. de Buhan, M. Kray, M. Darbas. *Whole-microwave system modeling for brain imaging*. IEEE CAMA, 1-4, 2015.

Chapitre 1

La méthode AEI : une méthode de régularisation adaptative

Ce chapitre est dédié à la présentation de la méthode AEI (pour *Adaptive Eigenspace Inversion*) dont j'ai introduit l'idée de base pendant ma thèse [A15]. Comme nous le verrons, cette méthode de régularisation adaptative permet de résoudre des problèmes inverses mal-posés en améliorant la stabilité et la précision de la reconstruction. Dans la première section, je développe donc les fondements de la méthode. Puis la Section 1.2 présente le travail [A2] réalisé avec Marie Kray dans lequel nous nous intéressons à l'application de cette méthode dans le cas d'un problème de diffraction inverse pour l'équation des ondes. La Section 1.3 étend cette approche au problème de la diffraction électromagnétique inverse, ce qui correspond à l'article [A6] en collaboration avec Marion Darbas. Ce travail est une étape préliminaire dans le cadre du projet ANR MEDIMAX, porté par Christian Pichot, où nous nous intéressons à la détection des accidents vasculaires cérébraux par imagerie micro-onde. Ce sera l'objet de la Section 1.4 et correspond aux travaux [A5, A8] avec Pierre-Henri Tournier, alors post-doctorant co-encadré avec Frédéric Nataf, et les membres du projet ANR. Enfin, je termine ce chapitre par une présentation de l'utilisation de la méthode AEI par d'autres auteurs et par quelques perspectives concernant l'analyse théorique de la méthode. Tous les résultats numériques de ce chapitre ont été obtenus grâce au logiciel de calculs par éléments finis FreeFem++ [1-34].

1.1 Fondements de la méthode

1.1.1 Introduction

Nous nous intéressons au problème inverse de récupération d'un paramètre p_* dans une équation aux dérivées partielles. Dans ce chapitre, p_* sera un coefficient de l'équation, fonction de la seule variable d'espace x dans un domaine borné Ω . En reprenant les notations introduites dans le préambule de ce manuscrit (voir Figure 1), on suppose que l'on a accès à des observations d^{obs} , qui diffèrent éventuellement de la solution exacte $\mathcal{M}(p_*)$ compte-tenu des erreurs de modèle ou de mesure. Pour résoudre ce problème, on peut de manière classique chercher à minimiser une fonctionnelle de coût

$$F(p) = \frac{1}{2} \|\mathcal{M}(p) - d^{obs}\|_D^2, \quad (1.1)$$

qui dépend de l'écart dans une certaine norme entre la solution numérique $\mathcal{M}(p)$ associée au paramètre p et les observations. Comme nous l'avons vu, même en l'absence d'erreur dans les mesures, le problème inverse est en général mal posé dans la norme sur D considérée et il est

alors indispensable de le régulariser avant d'envisager de le résoudre.

1.1.2 Références sur les méthodes de régularisation

Un processus de régularisation (voir Kirsch [1-40], Engl *et al.* [1-23]) consiste à ajouter de l'information de différentes natures au problème inverse original afin d'atteindre le caractère bien posé. Régulariser un problème mal posé, c'est le remplacer par un autre, bien posé, de sorte que l'erreur commise par ce remplacement soit compensée par le gain de stabilité. L'information ajoutée *a priori* doit entrer le moins possible en conflit avec celle venant des données du modèle, au risque de voir le paramètre optimal régularisé s'écarter de la valeur exacte p_* afin de satisfaire les deux informations.

Régularisation de Tikhonov

La régularisation la plus connue est celle de Tikhonov [1-61] qui consiste à ajouter à la fonctionnelle F introduite en (1.1) un terme de la forme :

$$R(p) = \alpha \|p - p_e\|_P^2,$$

où p_e est une valeur estimée *a priori* du coefficient inconnu p_* . Le choix du paramètre de régularisation α est crucial. Si α est trop petit, la reconstruction sera instable, mais si α est trop grand, la méthode convergera vers la valeur p_e *a priori* différente du coefficient p_* que l'on cherche à récupérer. Un compromis entre stabilité et précision doit alors être trouvé.

Les propriétés de la régularisation de Tikhonov ont été largement étudiées dans le cas où \mathcal{M} est linéaire, voir par exemple les ouvrages de Baumeister [1-8], Morozov [1-46] ou Bjork [1-12]. Le résultat principal est que le problème régularisé est bien posé dès que $\alpha > 0$ et que lorsque α converge vers zéro, le paramètre récupéré converge vers la solution exacte la plus proche de p_e plus lentement que le niveau de bruit dans les données d^{obs} . Le cas non linéaire cependant s'avère beaucoup plus délicat et rien ne garantit par exemple que le problème régularisé soit bien posé.

Régularisation par paramétrisation

Puisque le paramètre recherché p est une fonction, il convient de le discrétiser avant d'envisager de le récupérer numériquement. Un choix naturel consiste alors à utiliser une approximation de p sur le maillage de Ω choisi pour discrétiser l'EDP. On se ramène alors à un problème de dimension finie pour lequel p vit dans \mathbb{R}^N où N est le nombre de degrés de liberté sur le maillage. Une décomposition en valeurs singulières, introduite par Golub et Reinsch [1-27], qui peut être menée sur le problème linéarisé, permet alors d'estimer le nombre de paramètres indépendants qu'il est possible de récupérer pour un certain niveau d'incertitude sur les données. Ce nombre est en général bien inférieur à N et il est nécessaire de choisir une autre paramétrisation, qui grâce à des hypothèses supplémentaires sur le paramètre à récupérer, dépendra d'un plus petit nombre d'inconnues, ce qui va avoir pour conséquence de régulariser le problème.

Une première approche consiste par exemple à séparer le maillage sur lequel est résolue l'EDP de celui sur lequel est approché le coefficient p et à choisir ce dernier maillage plus grossier pour diminuer la taille de l'espace de minimisation. Il est alors possible de mettre en place un processus itératif où l'on vient raffiner le maillage successivement, en ajoutant des degrés de liberté, jusqu'à ce que la valeur de la fonction coût passe en dessous du seuil de bruit sur les données. Dans de nombreux cas (Liu [1-43], Naeval [1-48]), cette approche dite *scale-by-scale* car elle recherche les caractéristiques du paramètre inconnu successivement d'une échelle

grossière à une échelle fine, permet de converger vers le minimum global de la fonction objective. Malheureusement, il n'existe à l'heure actuelle aucune explication mathématique rigoureuse de ce phénomène. La méthode AEI fait partie de ce type de méthodes de régularisation, mais le choix de la paramétrisation diffère. Voyons cela plus en détails.

1.1.3 Une nouvelle paramétrisation

Dans notre approche, nous proposons de chercher le coefficient p dans l'espace engendré par les $L \in \mathbb{N}$ premières fonctions propres du Laplacien, à savoir qui se décompose en :

$$p(x) = \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^L p_i \varphi_i(x),$$

où la fonction φ_0 est un relèvement de la trace sur $\partial\Omega$ de la valeur exacte de p_* , que l'on suppose donc connue au bord du domaine et qui est solution de :

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_0 = 0, & \text{dans } \Omega, \\ \varphi_0 = p_*, & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

et les φ_i sont les vecteurs propres associés aux valeurs propres λ_i solutions de

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_i = \lambda_i\varphi_i & \text{dans } \Omega, \\ \varphi_i = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.2)$$

Les inconnues à retrouver par la minimisation de la fonctionnelle F définie en (1.1) sont alors les réels p_i pour $i = 1$ à L . Sur la Figure 1.1 (a), nous traçons deux fonctions propres du Laplacien définies en (1.2) dans le cas $2d$ où Ω est le disque de centre $(0, 0)$ et de rayon 1.

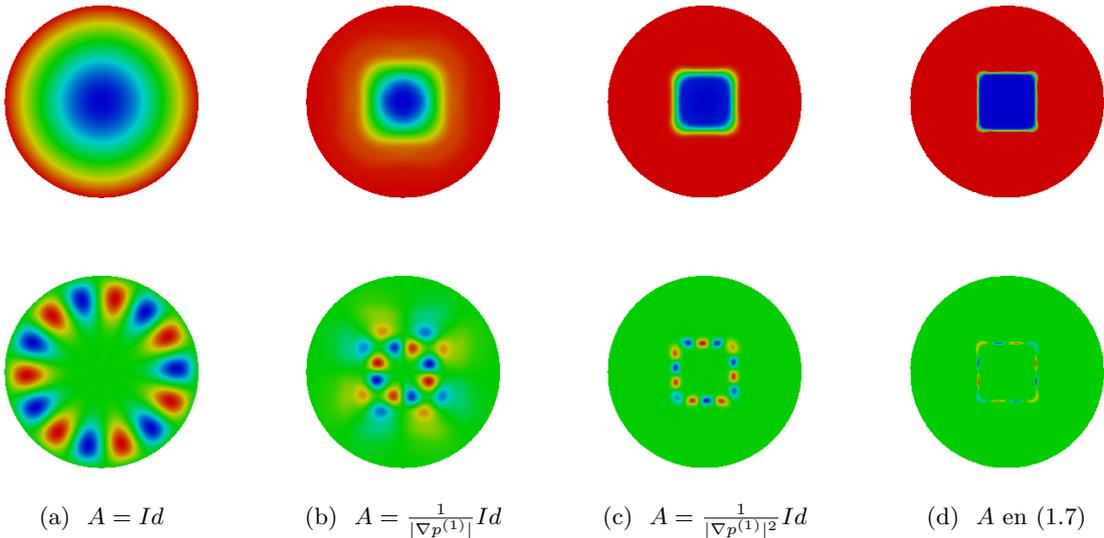


Figure 1.1 – Comparaison des vecteurs propres numéro 1 (en haut) et 26 (en bas) du problème (1.4) pour plusieurs choix de la matrice A dans le cas d'un obstacle de forme carrée.

Comme dans la méthode *scale-by-scale*, cette approche permet de découpler la taille N du maillage de calcul sur lequel est résolu l'EDP et la dimension L de l'espace de minimisation.

Mais l'intérêt de cette paramétrisation est aussi qu'elle agit comme un filtre passe-bas, en faisant l'hypothèse *a priori* que les hautes fréquences apportent moins d'information pertinente sur le coefficient. Comme précédemment, il est possible de mettre en place un processus itératif en ajoutant un à un des degrés de liberté à la base (ce qui se fait simplement en augmentant L) pour approcher de mieux en mieux le coefficient exact.

1.1.4 Un processus adaptatif

Dans le cas particulier de la récupération d'un obstacle O (coefficient p_* présentant une discontinuité sur ∂O), la méthode propose ensuite un processus adaptatif (nommé AEB pour *Adaptive Eigenspace Basis*) afin d'améliorer la précision du résultat. Ainsi, après avoir calculé une première solution $p^{(1)}$, nous utilisons cette solution pour, d'une part adapter le maillage mais également trouver une autre base qui représente mieux le coefficient. L'adaptation de maillage utilisée est classique, basée sur la hessienne de la solution $p^{(1)}$ (voir Frey et Georges [1-26]) et elle permet de concentrer les noeuds du maillage dans la région où p varie le plus. L'adaptation de base consiste à chercher le coefficient dans l'espace engendré par les L premières fonctions propres d'un opérateur elliptique, à savoir :

$$p(x) = \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^L p_i \varphi_i(x) \quad (1.3)$$

où les réels p_i sont les nouvelles inconnues et les fonctions φ_i sont solutions du problème

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (A(x)\nabla \varphi_i) = \lambda_i \varphi_i & \text{dans } \Omega, \\ \varphi_i = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.4)$$

avec la matrice A choisie judicieusement en fonction de $p^{(1)}$. Remarquez que le problème (1.4) coïncide avec le problème (1.2) pour le choix $A = Id$. Nous proposons alors de prendre

$$A(x) = \frac{1}{|\nabla p^{(1)}(x)|^r} Id, \quad r \in \mathbb{N}. \quad (1.5)$$

Ce choix de matrice permet de concentrer les variations des fonctions propres dans les régions où le coefficient $p^{(1)}$ varie le plus, c'est à dire au voisinage de l'interface de l'obstacle O . Ainsi, l'interface peut être capturée de manière plus précise et la reconstruction est améliorée sans augmenter la taille de l'espace de minimisation. Sur la Figure 1.1 (b) et (c) sont tracées certaines fonctions propres de l'opérateur (1.4) pour $r = 1$ et $r = 2$ respectivement. Dans cet exemple, p_* correspond à un obstacle O carré centré en $(0, 0)$ et de coté 0.6 et $p^{(1)}$ est défini par (1.3) où les p_i sont les projetés :

$$p_i = \int_{\Omega} (p_* - \varphi_0) \varphi_i dx, \quad 1 \leq i \leq L = 50,$$

avec φ_i donnés par (1.2)

1.1.5 Prise en compte de l'anisotropie

Enfin, sur la Figure 1.1 (d), nous présentons un autre choix de A , défini en (1.7), qui est anisotrope. L'idée est de prendre en compte l'orientation de l'interface de O et de donner une préférence aux variations des fonctions de base dans la direction du gradient de $p^{(1)}$. Pour faire cela, en tout point x du domaine Ω , nous considérons un nouveau repère orthonormé (x, X_1, X_2) ,

illustré sur la Figure 1.2, dont le premier axe est localement orienté par le gradient de $p^{(1)}$ et nous définissons la matrice de changement de base P de la manière suivante :

$$P(x) = \frac{1}{|\nabla p^{(1)}(x)|^2} \begin{pmatrix} \frac{\partial p^{(1)}}{\partial x_1} & -\frac{\partial p^{(1)}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial p^{(1)}}{\partial x_2} & \frac{\partial p^{(1)}}{\partial x_1} \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

Dans ce nouveau système, nous choisissons de donner plus de poids aux variations dans la direction du gradient en posant :

$$A(x) = \frac{1}{|\nabla p^{(1)}(x)|^2} P(x)C(x)P^{-1}(x), \quad (1.7)$$

avec

$$C(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{|\nabla p^{(1)}(x)|^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

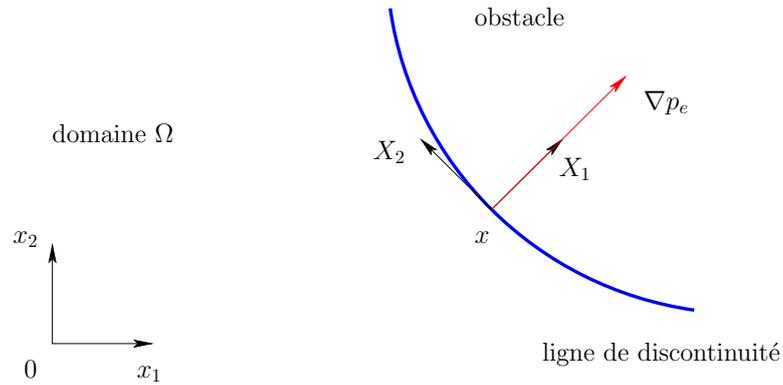


Figure 1.2 – Illustration du changement de système de coordonnées associé à la matrice définie en (1.6).

1.1.6 L'algorithme AEI

Finalement, la méthode AEI, telle qu'elle a été initialement introduite, combine l'utilisation des bases de vecteurs propres adaptée avec une inversion classique par un algorithme de Newton et propose un processus global dans lequel nous utilisons successivement les quatre choix de A :

Algorithme 1.1

Entrée : $p^{(0)} = \varphi_0$.

Pour k allant de 1 à 4

1. Adapter le maillage de calcul par rapport à $p^{(k-1)}$.
2. Choisir

$$A = \begin{cases} |\nabla p^{(k-1)}|^{-(k-1)} & \text{si } k < 4, \\ |\nabla p^{(k-1)}|^{-2} P C P^{-1} & \text{si } k = 4. \end{cases}$$

3. Calculer les fonctions propres de l'opérateur défini en (1.4) associé à A .
4. Obtenir $p^{(k)}$ en minimisant la fonctionnelle (1.1) par un algorithme initialisé par $p^{(k-1)}$.

Sortie : $p^{(4)}$.

Sur la Figure 1.3, nous illustrons le processus d'adaptation de maillage et de base de l'Algorithme 1.1 dans le cas où p_* correspond à un obstacle O carré centré en $(0,0)$ et de côté 0.6 et $L = 50$. Dans cet exemple, à chaque itération k , l'étape 3 de minimisation de la fonctionnelle est remplacée par la projection du coefficient exact p_* dans la nouvelle base calculée à l'étape 2. Les maillages ont tous le même nombre de sommets.

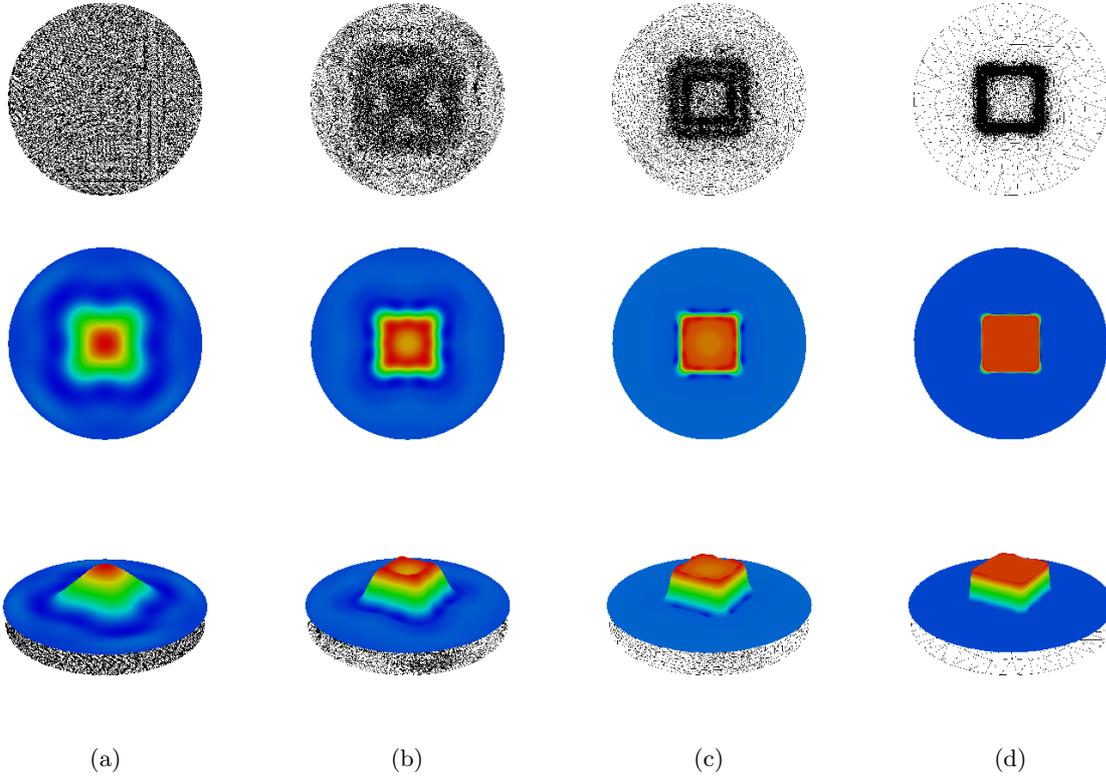


Figure 1.3 – Illustration de l'Algorithme 1.1 dans le cas où p_* est connu et erreur de projection. (a) $k = 1$, erreur = 1.30%. (b) $k = 2$, erreur = 0.56%. (c) $k = 3$, erreur = 0.19%. (d) $k = 4$, erreur = 0.06%.

Le choix du nombre L est un problème délicat. En effet, s'il est trop grand, la résolution sera coûteuse et le problème risque d'être mal posé. Mais s'il est trop petit, on ne sera pas en mesure de représenter correctement p_* . Par exemple, on ne pourra pas détecter la présence d'un obstacle de taille caractéristique inférieure à la plus petite longueur d'onde considérée, à savoir :

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda_L}}.$$

Pour choisir L , il faut donc avoir une connaissance *a priori* de la taille des éléments que l'on souhaite pouvoir distinguer. Ce choix peut éventuellement évoluer au cours du processus adaptatif, ce sera le cas à la Section 1.3.

1.1.7 Calcul du gradient et minimisation de la fonctionnelle

Nous présentons ici les étapes d'obtention du gradient de la fonctionnelle F . Nous devons d'abord calculer :

$$\begin{aligned} DF(p, \delta p) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} (F(p + \varepsilon \delta p) - F(p)) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \left(\|\mathcal{M}(p + \varepsilon \delta p) - d^{obs}\|_D^2 - \|\mathcal{M}(p) - d^{obs}\|_D^2 \right) \end{aligned}$$

Or, nous avons :

$$\mathcal{M}(p + \varepsilon \delta p) = \mathcal{M}(p) + \varepsilon M_p \delta p + o(\varepsilon^2),$$

où M_p est l'opérateur linéarisé de \mathcal{M} autour de p . Donc,

$$\begin{aligned} DF(p, \delta p) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \left(2\varepsilon (M_p \delta p, \mathcal{M}(p) - d^{obs})_D + \varepsilon^2 \|M_p \delta p\|_D^2 + o(\varepsilon^2) \right) \\ &= (M_p \delta p, \mathcal{M}(p) - d^{obs})_D. \end{aligned}$$

Sous cette forme, pour chaque direction δp , on doit calculer $M_p \delta p$ ce qui fait intervenir la résolution de l'EDP. La méthode de l'état adjoint permet alors de simplifier l'expression et de calculer le gradient de la fonctionnelle F avec un coût indépendant de la taille de l'espace P des paramètres. Pour cela, nous introduisons l'opérateur M_p^* adjoint de M_p qui va de l'espace des données D dans l'espace des paramètres P , pour en déduire :

$$DF(p, \delta p) = (\delta p, M_p^*(\mathcal{M}(p) - d^{obs}))_P.$$

Sous cette forme, pour chaque p , nous pouvons calculer le terme $M_p^*(\mathcal{M}(p) - d^{obs})$ une seule fois et obtenir le gradient pour n'importe quelle direction δp en calculant simplement un produit scalaire dans D .

Dans les sections qui suivent, nous résolvons le problème de minimisation de F définie en (1.1) par un algorithme BFGS de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno [1-45]. C'est une méthode permettant de résoudre un problème d'optimisation non linéaire sans contraintes. La méthode BFGS est dérivée de la descente de gradient. L'idée principale de cette méthode est d'éviter de construire explicitement la hessienne de F et de construire, à la place, une approximation en analysant les différents gradients DF successifs.

Algorithme 1.2

Initialisation : Choisir p_0 et $H_0 = Id$.

A chaque itération ℓ ,

1. Trouver la direction d_ℓ en résolvant $H_\ell d_\ell = -DF(p_\ell)$.
2. Effectuer une recherche linéaire pour trouver le pas optimal t_ℓ dans la direction trouvée et ensuite mettre à jour

$$p_{\ell+1} = p_\ell + t_\ell d_\ell.$$

3. Poser $y_\ell = DF(p_{\ell+1}) - DF(p_\ell)$.
4. Actualiser

$$H_{\ell+1} = H_\ell + \frac{y_\ell y_\ell^T}{y_\ell^T d_\ell} - \frac{H_\ell d_\ell d_\ell^T H_\ell}{d_\ell^T H_\ell d_\ell}.$$

Arrêt si $\|DF(p_\ell)\| < \epsilon$.

1.1.8 Génération des données et ajout de bruit

Dans tout ce chapitre, nous travaillons avec des données synthétiques. La génération des données consiste alors à résoudre numériquement l'EDP et à calculer $d_* = \mathcal{M}(p_*)$ pour le paramètre exact donné p_* . Afin d'éviter le *inverse crime* (voir Colton-Kress [2-16] pour cette notion), nous introduisons un biais en prenant des maillages et des schémas numériques différents pour la génération des données synthétiques et pour le calcul de $\mathcal{M}(p)$ associé au paramètre courant p à chaque étape de la minimisation de (1.1).

Sur les données générées, on ajoute un bruit gaussien multiplicatif

$$d^{obs} = d_*(1 + \delta\mathcal{N}(0, 1)), \quad (1.8)$$

où $\mathcal{N}(0, 1)$ satisfait une loi normale centrée d'écart type 1 et δ est le niveau de bruit. Ce modèle de bruit est multiplicatif. Le choix est motivé par l'Equation (3.7) page 134 dans Colton *et al.* [1-18]. Il permet de modéliser les erreurs de mesures faites au niveau des récepteurs.

Une fois le problème inverse résolu, nous pouvons calculer l'erreur L^2 relative sur le coefficient de la manière suivante :

$$\text{err}_p = \frac{\|p_\infty - p_*\|_2^2}{\|p_*\|_2^2}, \quad (1.9)$$

où p_* est le coefficient exact et p_∞ le coefficient récupéré numériquement à convergence. Cette erreur est à mettre en perspective avec le niveau de bruit δ dans les données d'entrée.

Dans les sections qui suivent, nous allons voir l'utilisation de la méthode AEI dans deux applications, en diffraction acoustique et électromagnétique.

1.2 Application à la diffraction acoustique inverse

1.2.1 Introduction

Dans cette section, nous cherchons à retrouver la position, la forme et les propriétés physiques d'un obstacle O de \mathbb{R}^2 . Pour cela, une onde acoustique incidente u^I à support compact en temps est envoyée dans le milieu initialement au repos. L'onde u^S diffractée par l'obstacle est enregistrée sur le bord Γ du domaine Ω contenant O pendant le temps T . Voir l'illustration sur la Figure 1.4. Le champ total $u = u^I + u^S$ satisfait l'équation des ondes :

$$\partial_t^2 u - \nabla \cdot (c_*^2(x) \nabla u) = 0 \quad \text{dans } (0, T) \times \mathbb{R}^2,$$

associée à des conditions initiales nulles et c_* représente la vitesse exacte de l'onde dans le milieu. La vitesse en dehors de l'obstacle est supposée connue et homogène, égale à c_0 .

1.2.2 Quelques références sur les méthodes de diffraction acoustique inverse

La littérature concernant les problèmes inverses pour les ondes est vaste et la liste qui suit n'est pas exhaustive. En particulier, le problème qui consiste à retrouver un coefficient $c(x)$ régulier sera abordé à la Section 2.3. Ici, nous nous restreignons au problème dit de la diffraction acoustique inverse, pour lequel $c(x)$ présente une discontinuité sur le bord d'un obstacle O que l'on cherche à reconstruire. Nous renvoyons aux ouvrages de Colton, Coyle et Monk [1-18] et de Cakoni et Colton [1-14] pour les résultats théoriques à ce sujet.

Concernant les méthodes numériques, nous pouvons mentionner les méthodes itératives répertoriées dans le livre de Tarantola [1-60], les méthodes de lignes de niveaux proposées par

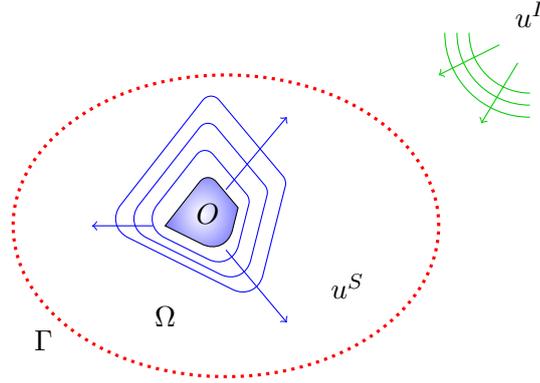


Figure 1.4 – Diffraction d’une onde incidente u^I par un obstacle O et enregistrement de l’onde diffractée u^S sur Γ .

Burger et Osher [1-13], l’algorithme MUSIC développé par Devaney [1-22], qui a de nombreux points communs avec la célèbre méthode de *linear sampling* introduite par Colton et Kirsch [1-19] dont font partie la *probe method* [1-36], la *singular-source method* [1-11] et la méthode de factorisation [1-41], et enfin la *point-source method* de Potthast [1-55]. Ces méthodes ont été introduites dans le domaine harmonique. Dans le domaine temporel qui nous intéresse, nous pouvons citer les travaux de Lines et Chandler-Wilde [1-44] sur la *point source method*, ceux de Haddar *et al.* [1-32] sur la *linear sampling* et ceux de Cassier et Hazard [1-16] pour les techniques de retournement temporel.

En général, ces méthodes n’ont pas besoin de connaître de quel type d’obstacle il s’agit (réfléchissant, absorbant, homogène ou non...) mais s’attachent seulement à déterminer sa position et sa forme. Dans notre cas, nous cherchons également à retrouver la valeur de la vitesse de propagation dans l’obstacle. Notre approche combine alors deux méthodes :

- la méthode TRAC (pour *Time-Reversed Absorbing Condition method*) développée par Assous *et al* [1-5], qui permet de reconstruire et de régulariser l’onde diffractée dans Ω à partir des données mesurées au bord et de réduire ainsi la taille du domaine de calcul ;
- la méthode AEI introduite à la Section 1.1 et qui repose sur un processus d’adaptation de base et de maillage pour augmenter la précision et la stabilité de la reconstruction.

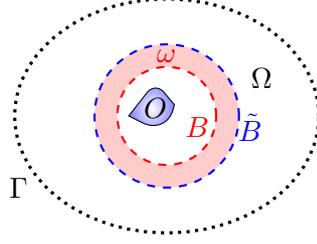
1.2.3 Le problème inverse

Principe de la méthode TRAC

Si on utilise le fait que l’équation des ondes est réversible en temps, l’onde diffractée inverse $u_R^S(t) := u^S(T - t)$ est également solution de l’équation des ondes :

$$\begin{cases} \partial_t^2 u_R^S - c_0^2 \Delta u_R^S = 0 & \text{dans } (0, T) \times (\Omega \setminus O), \\ u_R^S(t) = u^S(T - t) & \text{sur } (0, T) \times \Gamma, \\ u_R^S = ? & \text{sur } (0, T) \times \partial O, \end{cases}$$

munie de conditions initiales nulles (si T est suffisamment grand pour supposer que u est nulle dans Ω pour $t > T$). Cependant ce problème est indéterminé car on ne connaît pas O et *a fortiori*

Figure 1.5 – Définitions des domaines B , \tilde{B} et ω utilisés dans la Section 1.2.

pas la condition à appliquer sur ∂O . On introduit donc B , une boule qui est supposée englober entièrement l'obstacle O (voir Figure 1.5 pour les notations).

On reconstruit alors l'onde diffractée inverse dans $\Omega \setminus B$ en résolvant

$$\begin{cases} \partial_t^2 w - c_0^2 \Delta w = 0 & \text{dans } (0, T) \times (\Omega \setminus B), \\ w(t, \cdot) = u^S(T - t, \cdot) & \text{sur } (0, T) \times \Gamma, \\ \text{TRAC}(w) = 0 & \text{sur } (0, T) \times \partial B, \end{cases}$$

où on impose sur ∂B des conditions absorbantes (introduites par Engquist et Majda [1-24]), retournées en temps, qui sont définies par :

$$\text{TRAC}(w) := \partial_t w + c_0 \partial_\nu w - c_0 \frac{w}{2r}.$$

Dans [1-6], Assous, Kray *et al* montrent que, en première approximation, w coïncide avec l'onde diffractée inverse u_R^S . L'intérêt de la méthode TRAC est double :

- Elle permet de réduire les temps de calcul en remplaçant les mesures réelles sur Γ par des données reconstruites sur ∂B ,
- Elle a un fort pouvoir régularisant conduisant à des erreurs sur les données sur ∂B indépendantes des erreurs de mesures sur Γ .

La méthode AEI

Soit $B \subset \mathbb{R}^2$ le domaine obtenu à la première étape grâce à la méthode TRAC et soit \tilde{B} un autre domaine ouvert contenant strictement B . Nous introduisons $\omega = \tilde{B} \setminus B$, illustré sur la Figure 1.5. Nous notons $d^{obs}(t, x) := u^I(T - t, x) + w(t, x)$ l'onde totale reconstruite par la méthode TRAC dans $(T_1, T_2) \times \omega$. Cette dernière est notre entrée pour le problème inverse, différente de la mesure exacte d_* associée à c_* du fait de l'approximation faite par la méthode TRAC et d'un bruit éventuel dans les mesures de u^S sur Γ .

Nous considérons alors l'équation des ondes posée dans \tilde{B} associée à des conditions de bord de Dirichlet :

$$\begin{cases} \partial_t^2 v - \nabla \cdot (c^2(x) \nabla v) = 0 & \text{dans } (T_1, T_2) \times \tilde{B}, \\ v = d^{obs} & \text{sur } (T_1, T_2) \times \partial \tilde{B}, \\ v(T_1) = 0 \text{ et } \partial_t v(T_1) = 0 & \text{dans } \tilde{B}, \end{cases} \quad (1.10)$$

avec $c^2(x) = c_0^2 + p(x)\chi_B(x)$, pour tout $x \in \tilde{B}$, où χ_B est la fonction caractéristique de B . Le temps T_1 (respectivement T_2) est le premier temps (resp. le dernier temps) pour lequel la mesure d^{obs} dans ω est non nulle. Nous avons $0 < T_1 < T_2 < T$. Le problème inverse que nous

considérons consiste alors à

Trouver p tel que la solution v du système (1.10) associée à p coïncide avec d^{obs} dans $(T_1, T_2) \times \omega$.

Pour résoudre le problème inverse, nous cherchons le minimiseur de la fonctionnelle

$$J(p) = \frac{1}{2} \int_{T_1}^{T_2} \int_{\omega} |v - d^{obs}|^2 dx dt. \quad (1.11)$$

Théorème 1.1. *Le gradient de la fonctionnelle J définie en (1.11) est donné par*

$$DJ(p, \delta p) = - \int_B \delta p(x) \left(\int_{T_1}^{T_2} \nabla v \cdot \nabla v^* dt \right) dx.$$

où v^* est la solution du problème adjoint :

$$\begin{cases} \partial_t^2 v^* - \nabla \cdot (c^2(x) \nabla v^*) = \begin{cases} v - d^{obs} & \text{dans } (T_1, T_2) \times \omega, \\ 0 & \text{dans } (T_1, T_2) \times B, \end{cases} \\ v^* = 0 & \text{sur } (T_1, T_2) \times \partial \tilde{B}, \\ v^*(T_2) = 0 \text{ et } \partial_t v^*(T_2) = 0 & \text{dans } \tilde{B}. \end{cases} \quad (1.12)$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer la méthode de l'adjoint introduite en Section 1.1.7 et de construire alors l'opérateur adjoint M_p^* . Pour cela, on remarque que ici $M_p \delta p = \delta v|_{(T_1, T_2) \times \omega}$ où δv est solution de l'équation linéarisée

$$\partial_t^2 \delta v - \nabla \cdot (c^2(x) \nabla \delta v) = \nabla \cdot (\delta p(x) \chi_B \nabla v) \quad \text{dans } (T_1, T_2) \times \tilde{B}, \quad (1.13)$$

avec des conditions initiales et de bord nulles. On calcule alors

$$\begin{aligned} DJ(p, \delta p) &= (M_p \delta p, \mathcal{M}(p) - d^{obs})_D = \int_{T_1}^{T_2} \int_{\omega} \delta v (v - d^{obs}) dx dt \\ &= \int_{T_1}^{T_2} \int_{\tilde{B}} \delta v (\partial_t^2 v^* - \nabla \cdot (c^2(x) \nabla v^*)) dx dt, \end{aligned}$$

où on a introduit v^* la solution du problème adjoint (1.12). On peut alors intégrer par parties et utiliser (1.13)

$$\begin{aligned} DJ(p, \delta p) &= \int_{T_1}^{T_2} \int_{\tilde{B}} (\partial_t^2 \delta v - \nabla \cdot (c^2(x) \nabla \delta v)) v^* dx dt = \int_{T_1}^{T_2} \int_{\tilde{B}} \nabla \cdot (\delta p(x) \chi_B \nabla v) v^* dx dt \\ &= - \int_B \delta p(x) \left(\int_{T_1}^{T_2} \nabla v \cdot \nabla v^* dt \right) dx = (\delta p, M_p^*(\mathcal{M}(p) - d^{obs}))_P \end{aligned}$$

□

1.2.4 Résultats numériques

Génération des données synthétiques

Afin de générer nos données synthétiques, nous utilisons une source ponctuelle en espace, à support compact en temps. Nous choisissons une fonction de Ricker, voir [1-44] :

$$f(t) = \begin{cases} \left(1 - 2\pi^2 (\nu_0 t - 1)^2\right) e^{-\pi^2 (\nu_0 t - 1)^2}, & \text{si } t \in (0, T_s) \text{ et } x = x_s, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases} \quad (1.14)$$

où ν_0 est la fréquence centrale du signal, x_s est la position de la source en dehors du domaine Ω et T_s est le temps d'émission de la source.

Nous définissons λ la longueur d'onde correspondant à ν_0 . Le domaine de calcul global D est alors une boule de rayon 10λ , la source ponctuelle étant au bord de ce domaine, tandis que Ω est une boule concentrique de rayon 5λ . À l'intérieur du domaine, nous avons une inclusion de taille caractéristique de l'ordre de λ . La vitesse de propagation exacte dans le milieu est choisie de la manière suivante :

$$c_*^2 = \begin{cases} 1 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus O, \\ 3 & \text{dans } O. \end{cases} \quad (1.15)$$

Pour discrétiser le problème direct, nous utilisons une méthode d'éléments finis \mathbb{P}^1 en espace, sur un maillage conforme à la forme de l'inclusion O et un schéma saute-mouton en temps. La taille caractéristique du maillage est $h = \lambda/10$ et la CFL est prise égale à $\sqrt{2}/8$. Pour appliquer la méthode TRAC, nous choisissons de prendre B comme une boule de rayon 1.4λ autour de l'inclusion et \tilde{B} comme la boule concentrique de rayon 2λ . Nous travaillons alors avec un nouveau maillage, conforme au domaine B et indépendant de celui utilisé pour le problème direct.

Pour résoudre le problème inverse, nous discrétisons les équations (1.10) en espace avec des éléments finis de Lagrange \mathbb{P}^1 sur le maillage de \tilde{B} . Sur la Figure 1.6, nous illustrons la réduction de la taille du domaine obtenue grâce à l'utilisation de la méthode TRAC : de 10λ (Figure 1.6 (a)) pour le domaine de calcul D contenant la source à 1.4λ (Figure 1.6 (d)) pour la zone B où est résolu le problème inverse. Nous réduisons ainsi le nombre de degrés de liberté de 138678 à 2448. En temps, nous discrétisons les équations (1.10) en utilisant un schéma implicite centré. Puisque le schéma est implicite, nous n'avons pas besoin de satisfaire une condition de stabilité et pouvons réduire le nombre de pas de temps. De plus, le temps total de simulation vaut maintenant $T_2 - T_1 < T$ grâce à la réduction de la taille du domaine, qui permet de ne propager l'onde incidente que depuis $\partial\tilde{B}$. Finalement, nous avons divisé le temps de calcul total par plus de 500.

Pour résoudre le problème inverse, nous utilisons l'Algorithme 1.1 de la méthode AEI avec une base de $L = 100$ fonctions propres. Nous utilisons les fonctions incluses dans FreeFem++ pour résoudre le problème aux valeurs propres (1.4), pour l'adaptation de maillages et pour l'Algorithme 2.1 du BFGS avec une erreur de convergence $\epsilon = 5 \cdot 10^{-4}$.

Reconstruction numérique par la méthode AEI

Comme première illustration, nous regardons le cas où l'inclusion O est un disque de rayon λ . Sur la Figure 1.7, nous montrons le coefficient exact et le coefficient retrouvé dans le domaine de calcul D complet. Cela permet de montrer qu'à cette échelle, les deux résultats sont très similaires. Sur la Figure 1.8, nous traçons les itérations successives de l'Algorithme 1.1 de la méthode AEI en faisant un zoom sur B , là où nous résolvons réellement le problème inverse.

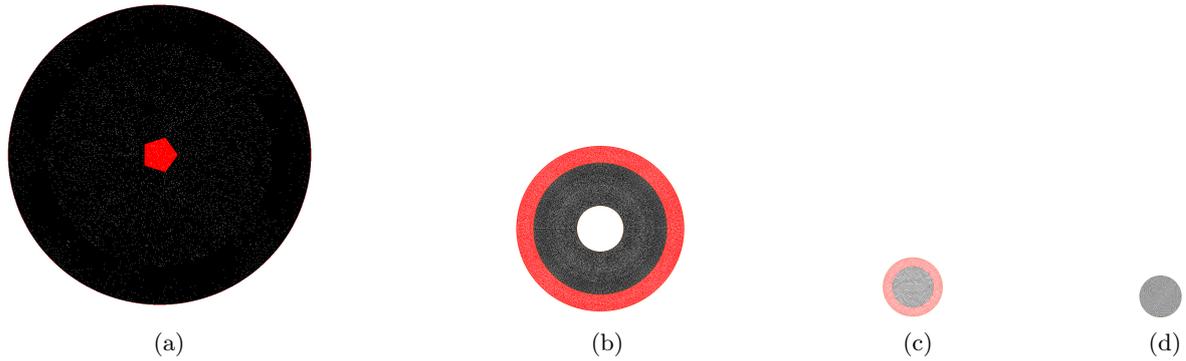


Figure 1.6 – Illustration de la réduction de la taille du domaine : (a) maillage pour le problème direct, conforme à l'inclusion O (ici un pentagone), rayon $R = 10\lambda$, 138678 noeuds ; (b) maillage pour la méthode TRAC conforme avec Γ et B , rayon $R = 5\lambda$, 31383 noeuds ; (c) maillage pour le problème inverse dans \tilde{B} , conforme au domaine B , rayon $R = 2\lambda$, 2448 noeuds ; (d) maillage pour retrouver p dans B , rayon $R = 1.4\lambda$, 3573 noeuds.

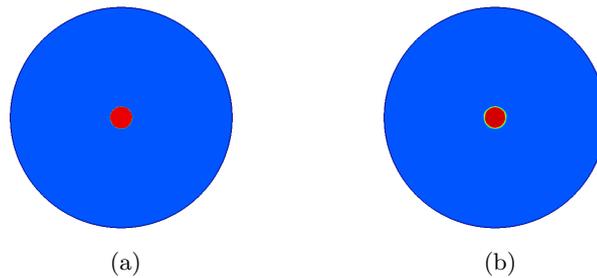


Figure 1.7 – Résultat de la reconstruction dans le domaine complet D : (a) le coefficient exact p_* , (b) le coefficient $p^{(4)}$ retrouvé à la dernière itération de l'Algorithme 1.1.

Nous observons à chaque itération une amélioration de la reconstruction de la forme et des propriétés de l'inclusion.

Nous présentons également les résultats obtenus pour un pentagone sur la Figure 1.9 et pour une ellipse trouée sur la Figure 1.10 en présence de bruit dans les données. Grâce au pouvoir régularisant de la méthode TRAC, le résultat dépend peu du niveau de bruit. Sur ces figures, nous avons superposé la forme du coefficient exact, qui était bien sûr inconnue, sur ceux reconstruits. Signalons également que les échelles de couleur sont les mêmes pour toutes les figures, ce qui permet de constater que le coefficient reconstruit a la bonne intensité à l'extérieur comme à l'intérieur de l'inclusion.

Les erreurs, calculées par la formule (1.9), sont reportées dans les Figures correspondantes. Finalement, la Figure 1.11 présente les maillages pour chaque exemple obtenus à la dernière itération de l'Algorithme 1.1. Ces maillages sont raffinés près de l'interface de l'inclusion et conservent le même nombre de degrés de liberté que les maillages initiaux.

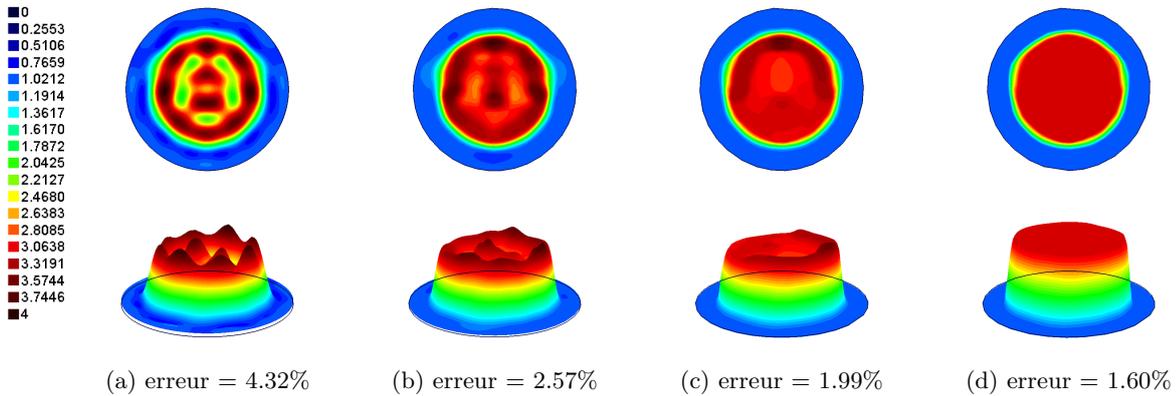


Figure 1.8 – Reconstruction de la forme et des propriétés d'un disque pénétrable en utilisant la méthode AEI de l'Algorithme 1.1 : (a) Résultat obtenu à l'Etape $k=1$. (b) Résultat obtenu à l'Etape $k=2$. (c) Résultat obtenu à l'Etape $k=3$. (d) Résultat obtenu à l'Etape $k=4$.

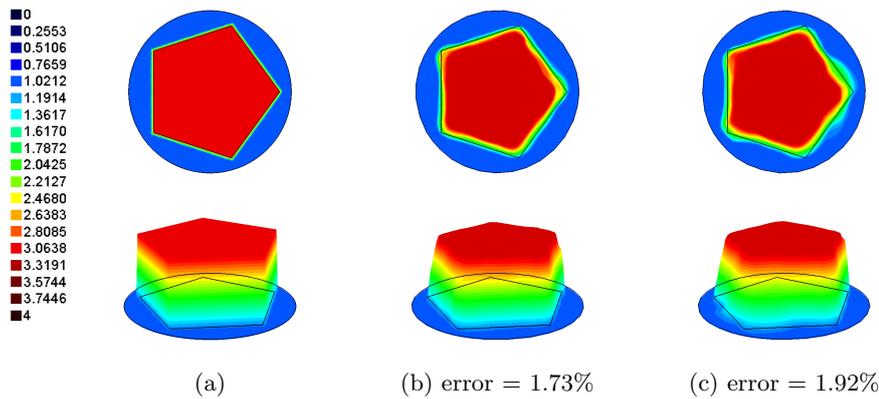


Figure 1.9 – Reconstruction de la forme et des propriétés d'un pentagone en utilisant les méthodes TRAC et AEI : (a) Vitesse de propagation exacte p_* à l'extérieur et à l'intérieur de l'inclusion. (b) Résultat obtenu à partir des données exactes. (c) Résultat obtenu à partir des données bruitées de 20%.

1.3 Application à la diffraction électromagnétique inverse

1.3.1 Introduction

Dans cette section, nous nous intéressons à la résolution numérique d'un problème inverse en électromagnétisme. Plus précisément, nous considérons le problème de détermination de l'indice de réfraction d'un milieu, c'est-à-dire de la permittivité diélectrique (partie réelle) et de la conductivité électrique (partie complexe), à partir d'un nombre fini $M \in \mathbb{N}^*$ de mesures du champs au bord. Les équations sont les équations de Maxwell dans le domaine fréquentiel dans un ouvert borné en deux dimensions. Pour des raisons en lien avec l'application qui sera présentée à la section suivante, nous nous restreignons à une seule fréquence d'émission.

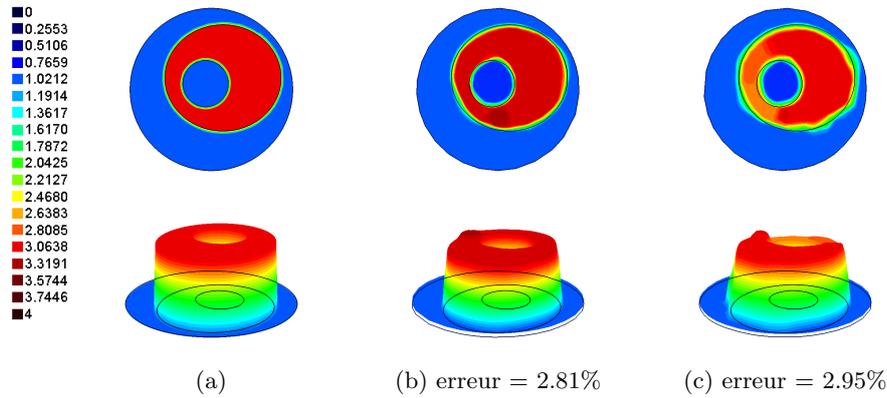


Figure 1.10 – Reconstruction de la forme et des propriétés d’une ellipse trouée en utilisant les méthodes TRAC et AEI : (a) Vitesse de propagation à l’extérieur et à l’intérieur de l’inclusion O . (b) Résultat obtenu à partir des données exactes. (c) Résultat obtenu à partir des données bruitées de 20%.

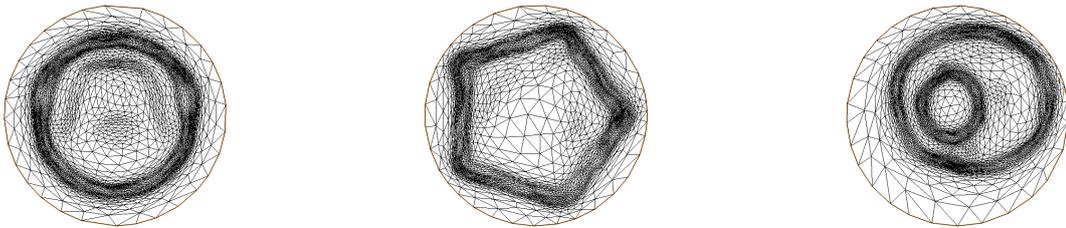


Figure 1.11 – Maillages construits avec FreeFem++ à l’Etape 4 de l’adaptation.

1.3.2 Quelques références sur les méthodes de diffraction électromagnétique inverse

D’un point de vue mathématique, le problème inverse considéré est très mal posé. En effet, on sait que l’indice de réfraction n’est entièrement déterminé que par la connaissance complète de l’opérateur Dirichlet-Neuman sur tout le bord (e.g. Ola, Paiväranta et Somersalo [1-53], Caro, Ola et Salo [1-15], Kenig, Salo et Uhlman [1-38])

Plusieurs auteurs se sont intéressés à la détection d’inhomogénéités dans les paramètres électromagnétiques d’un milieu. Ammari *et al* (e.g. [1-2, 1-3]) ont introduit des méthodes asymptotiques pour reconstruire des obstacles de petite amplitude. Ceci a conduit à la construction de méthodes numériques pour la localisation des défauts (e.g. Ammari *et al* [1-1], Asch et Me-fire [1-4], Darbas et Lohrengel [1-21]).

D’autres méthodes de diffraction inverse ont été appliquées avec succès en électromagnétisme : sans être exhaustif, nous pouvons citer la *linear sampling* par Haddar et Monk [1-33], une méthode de Newton préconditionnée initiée par Hohage [1-35], ou la *regularized recursive linearization method* proposée par Bao et Li [1-9].

1.3.3 Le problème inverse

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^2 de frontière Γ régulière. Nous notons μ_0 et ε_0 les perméabilité et permittivité du vide. Nous supposons que Ω est rempli d’un matériau non magnétique (i.e.

perméabilité constante $\mu = \mu_0$) et isotrope de permittivité diélectrique ε_* et de conductivité électrique σ_* . Nous considérons une dépendance en temps harmonique. Ainsi le champ électrique E satisfait l'équation suivante, posée dans le domaine fréquentiel

$$\nabla \times (\nabla \times E) - \kappa^2 p_* E = 0, \text{ dans } \Omega, \quad (1.16)$$

où $\kappa = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ est le nombre d'onde et la fonction

$$p_*(x) = \frac{1}{\varepsilon_0} \left(\varepsilon_*(x) + i \frac{\sigma_*(x)}{\omega} \right), \quad x \in \Omega, \quad (1.17)$$

est l'indice de réfraction du milieu, inconnue que l'on cherche à retrouver. Nous imposons la condition de bord

$$(\nabla \times E) \times \nu = g, \quad \text{sur } \Gamma. \quad (1.18)$$

Les résultats d'existence et d'unicité pour le problème (1.16)-(1.18) peuvent être trouvés dans Colton et Kress [1-20]. Pour $1 \leq j \leq M$, nous notons $E_j[p]$ la solution de (1.16)-(1.18) associée à l'indice de réfraction p et à une condition de bord g_j donnée. Le problème inverse qui nous intéresse est le suivant :

Etant donnée une fréquence $\omega > 0$, nous voulons reconstruire le coefficient exact $p_*(x)$, $x \in \Omega$, défini par (1.17), à partir de mesures d_j^{obs} de $E_j[p_*] \times \nu$ sur une partie Γ_0 du bord, pour $1 \leq j \leq M$.

Le problème s'écrit sous la forme d'un problème d'optimisation, à savoir la minimisation de la fonctionnelle suivante

$$F(p) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^M \int_{\Gamma_0} |E_j[p] \times \nu - d_j^{obs}|^2 d\gamma. \quad (1.19)$$

Grâce à la méthode de l'adjoint présentée en Section 1.1.7, on peut obtenir le résultat suivant :

Théorème 1.2. *Le gradient de la fonctionnelle F définie en (1.19) au point p et dans la direction δp est donné par*

$$DF(p, \delta p) = -\kappa^2 \Re \left(\sum_{j=1}^M \int_{\Omega} \delta p E_j[p] \cdot E_j^*[p] dx \right), \quad (1.20)$$

où \Re désigne la partie réelle et E_j^* est la variable adjointe, solution du problème :

$$\nabla \times (\nabla \times E_j^*) - \kappa^2 p E_j^* = 0, \text{ dans } \Omega, \quad (1.21)$$

avec les conditions de bord

$$(\nabla \times \overline{E_j^*}) \times \nu = \begin{cases} (E_j[p] \times \nu - d_j^{obs}) \times \nu, & \text{sur } \Gamma_0, \\ 0, & \text{sur } \Gamma \setminus \Gamma_0. \end{cases} \quad (1.22)$$

1.3.4 Résultats numériques

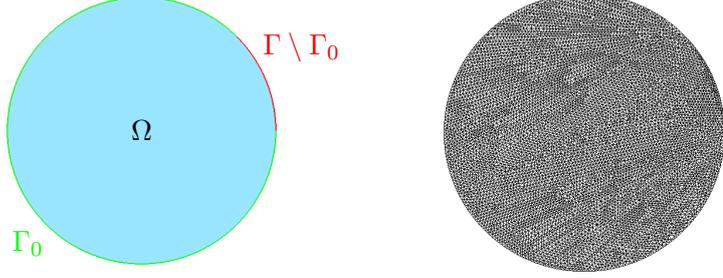
Génération des données synthétiques

Le domaine Ω est le cercle unité. La partition de sa frontière est illustrée sur la Figure 1.12 (a). Les observations sont collectées sur la partie $\Gamma_0 := \{(\cos(t), \sin(t)), t \in [\gamma\pi, 2\pi]\}$ où le

paramètre $\gamma \in [0, 2[$. Nous cherchons des coefficients constants par morceaux

$$p_* = \begin{cases} p_1 & \text{dans } O, \\ p_0 & \text{dans } \Omega \setminus O, \end{cases}$$

où p_0 et p_1 sont des nombres complexes constants.

(a) Zone d'observation Γ_0 .

(b) Maillage triangulaire utilisé.

Figure 1.12 – Domaine de calcul utilisé dans les exemples.

Pour $1 \leq j \leq M$, nous choisissons une onde incidente plane

$$E_j^{\text{inc}}(x) = \eta_j^\perp e^{i\kappa\sqrt{p_0}\eta_j \cdot x}, \quad (1.23)$$

de vecteur d'onde $\eta_j = (\cos(2(j-1)\pi/M), \sin(2(j-1)\pi/M))^t$. Le vecteur η_j^\perp est un vecteur unitaire orthogonal à η_j et $\sqrt{p_0}$ est la racine carrée définie sur les nombres complexes. Des exemples de telles ondes planes sont illustrés sur la Figure 1.13. Les ondes incidentes sont atténuées par les propriétés dissipatives du milieu.

Les données synthétiques d_j^{obs} sont obtenues en résolvant le problème direct (1.16)-(1.18) pour le coefficient exact p_* et les données au bord $g_j := (\nabla \times E_j^{\text{inc}}) \times \nu$. Nous adoptons des éléments finis d'arête de Nédélec du premier ordre [1-52] qui fournissent des espaces d'approximation naturels pour $H(\text{curl}; \Omega)$, espaces dans lequel le problème (1.16) est bien posé. Les fonctions de base sont associées aux arêtes du maillage. Les données d'entrée du problème inverse sont alors les M couples (d_j^{obs}, g_j) , $j = 1, \dots, M$.

Reconstruction numérique par la méthode AEI

On applique la méthode AEI de l'Algorithme 1.1 à la minimisation de la fonctionnelle (1.19). Le nombre L de fonctions propres utilisées dans l'expansion (1.3) est déterminé automatiquement de la manière suivante. A chaque étape k de la méthode AEI, nous débutons avec $L = 1$ et nous l'augmentons de 10 en 10. Nous arrêtons quand le fait d'ajouter 10 fonctions propres à la base ne permet pas de diminuer de manière significative la valeur de la fonctionnelle F . Ainsi, nous fixons $L^{(k)}$ à la première valeur L telle que le critère d'arrêt suivant soit satisfait :

$$\frac{F(p^{(k)}[L]) - F(p^{(k)}[L+10])}{F(p^{(k)}[L])} < \theta, \quad (1.24)$$

où $\theta > 0$ dépend du niveau de bruit δ qui est supposé connu *a priori*.

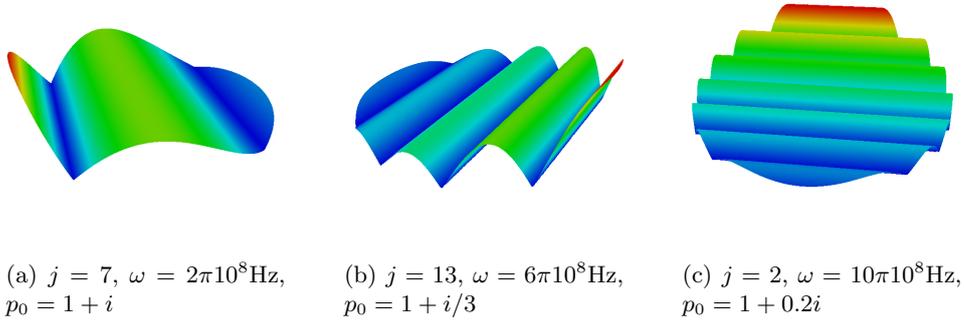


Figure 1.13 – Ondes incidentes utilisées pour illuminer le domaine.

À chaque itération de la minimisation, afin d'évaluer le gradient DF , nous résolvons les $2M$ EDP (celles pour calculer E_j et G_j pour $1 \leq j \leq M$) en parallèle grâce à MPI. Le Tableau 1.1 rassemble les valeurs numériques utilisées dans les exemples. Dans toutes les figures, l'échelle de

ω	γ	M	α	ϵ	θ	ϵ_0	μ_0
$2\pi 10^8 \text{ Hz}$	0.1	16	0	10^{-3}	10^{-3}	$8.85 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$	$4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$

Tableau 1.1 – Valeurs des variables fixées pour les exemples.

couleur, représentée sur la Figure 1.14 est la même.

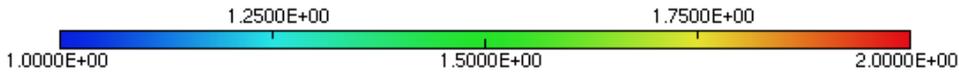


Figure 1.14 – Echelle de couleur pour les figures de la Section 1.3.

Nous mettons en place le processus d'adaptation pour récupérer le coefficient exact p_* suivant

$$p_* = \begin{cases} 2 + 2i & \text{dans } O, \\ 1 + i & \text{dans } \Omega \setminus O, \end{cases}$$

où l'obstacle est une ellipse $O := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1 - 0.2)^2 + 0.7(x_2 + 0.1)^2 \leq 0.09\}$. Nous traçons sur la Figure 1.15 les coefficients reconstruits successivement $p^{(k)}$, $k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$, ainsi que la valeur de l'erreur err_p qui décroît à chaque étape. On constate que la première étape de la méthode AEI permet de localiser la perturbation dans les coefficients électromagnétiques, et les autres étapes de retrouver sa forme et sa valeur. Pour les étapes 1 à 4, la dimension $L^{(k)}$ des espaces propres est de 71, 41, 51 et 51, et le nombre correspondant d'itérations BFGS est de 100, 34, 13 et 7. Le temps de calcul total est de 5592, 1840, 831 et 578 secondes, incluant celui de la recherche du $L^{(k)}$. Le nombre de sommets de chaque maillage adapté est d'environ 30 000.

Sur la Figure 1.16, nous présentons les résultats obtenus à l'Etape $k = 4$ à partir de données bruitées pour différents niveaux de bruit suivant la formule (1.8). Comme on pouvait s'y attendre, l'erreur de reconstruction augmente avec le bruit mais reste stable. Les résultats sont

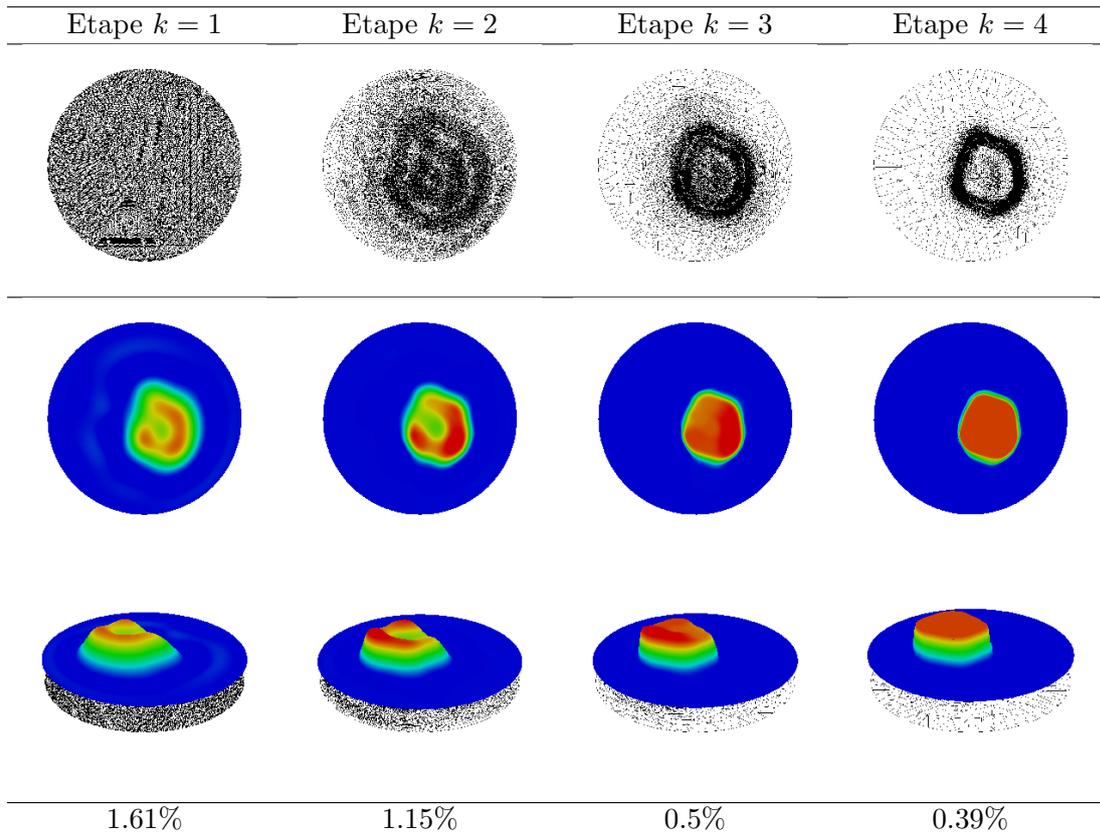


Figure 1.15 – Application de la méthode AEI pour récupérer une fonction constante par morceaux en l’absence de bruit. Pour chaque étape $k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$ de l’Algorithme 1.1, on représente de haut en bas : le maillage, la partie réelle de $p^{(k)}$ en vue $2d$, la partie réelle de $p^{(k)}$ en vue $3d$ et l’erreur finale err_p définie en (1.9).

satisfaisants même avec 10% de bruit.

Comme précisé en introduction, ce travail était une étape préliminaire, qui consistait à valider l’utilisation de la méthode AEI pour les équations de Maxwell en $2d$ sur des exemples académiques, afin de l’utiliser ensuite dans le cadre du projet que j’expose dans la section suivante.

1.4 Imagerie micro-onde pour la détection des accidents vasculaires cérébraux

1.4.1 Introduction

Un accident vasculaire cérébral (AVC) est une défaillance de la circulation du sang qui affecte une région plus ou moins importante du cerveau. Il existe deux sortes d’AVC illustrés sur la Figure 1.17. Le plus courant que l’on rencontre dans 85% des cas est l’AVC ischémique. Il est lié à l’obstruction d’un vaisseau sanguin par un caillot de sang, ce qui entraîne une diminution de la circulation sanguine et provoque la mort des cellules nerveuses alors privées d’oxygène. L’AVC hémorragique quand à lui est causé par la rupture d’un vaisseau sanguin entraînant une

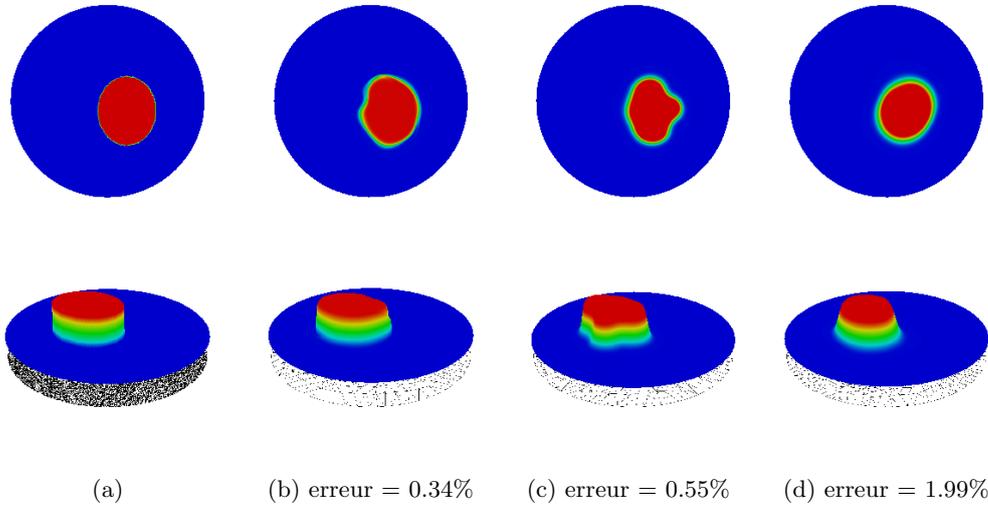


Figure 1.16 – Reconstruction d’une ellipse en utilisant la méthode AEI : (a) Coefficient exact $\Re(p_*)$. (b) Permittivité reconstruite $\Re(p^{(4)})$ avec 2% de bruit dans les données et $\theta = 5.10^{-3}$. (c) Permittivité reconstruite $\Re(p^{(4)})$ avec 5% de bruit dans les données et $\theta = 1.10^{-2}$. (d) Permittivité reconstruite $\Re(p^{(4)})$ avec 10% de bruit dans les données et $\theta = 5.10^{-2}$.

hémorragie à l’intérieur du cerveau.

Le fait de pouvoir rapidement détecter l’AVC est d’une importance fondamentale dans la survie du patient. Plus le traitement est rapide et plus les dommages seront réversibles et les chances de récupération élevées. Mais il est aussi primordial au moment du diagnostic de savoir de quel type d’AVC il s’agit. En effet, dans le cas d’un AVC ischémique, on pourra injecter en intraveineuse un fluidifiant afin de dissoudre le caillot. Mais cette thrombolyse peut entraîner le décès du patient dans le cas d’un AVC hémorragique.

Pour différencier une ischémie d’une hémorragie on utilise le scanner (computerized tomography scan) ou l’IRM (imagerie par résonance magnétique). Ces deux techniques fournissent des images de grande qualité, avec une résolution de l’ordre du millimètre et un diagnostic très fiable. Par contre, ces modalités d’acquisition sont coûteuses et ne sont accessibles que dans les

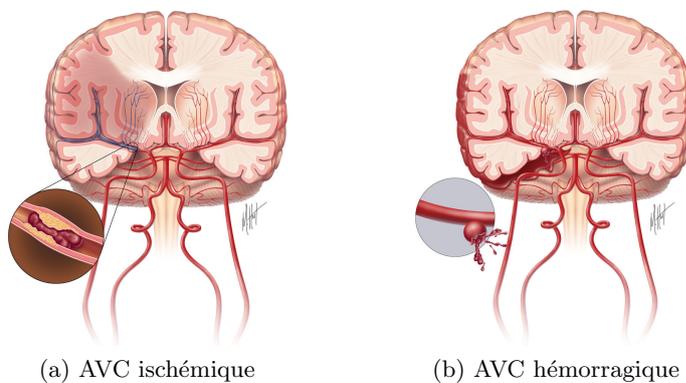


Figure 1.17 – Illustration des deux types d’accidents vasculaires cérébraux



Figure 1.18 – Technologie envisagée (reproduit avec la permission de la société EMTensor).

services médicaux spécialisés. Sachant que chaque minute compte dans la prise en charge d'un AVC, il n'est pas étonnant que l'on cherche des techniques alternatives : l'imagerie micro-onde (ou tomographie électromagnétique haute fréquence) en fait partie.

1.4.2 Références sur les méthodes d'imagerie micro-onde

L'imagerie micro-onde présente de nombreux avantages, comme d'être rapide, portable et relativement peu coûteuse. Par ailleurs, elle utilise des signaux micro-ondes de basse intensité de l'ordre de 1 mWatt appliqués à la tête durant 2 à 2.5 secondes, plus faibles que ceux émis par un téléphone portable au cours d'un appel. Cette modalité repose sur le fait que les deux types d'AVC entraînent des variations opposées dans les propriétés diélectriques des tissus atteints, variations que l'on est capable de différencier aux hautes fréquences (autour de 1GHz).

C'est ainsi que plusieurs sociétés dont EMTensor GmbH (Vienne, Autriche) [1-58] avec qui nous avons collaboré dans le cadre de l'ANR MEDIMAX orientent leurs efforts vers le développement de dispositifs médicaux d'acquisition de mesures électromagnétiques. Ces derniers pourraient idéalement être installés dans les véhicules d'intervention et permettre de poser le diagnostic avant l'arrivée aux urgences (voir Figure 1.18).

Depuis le travail séminal en imagerie micro-onde par Lin et Clarke [1-42], d'autres méthodes ont vu le jour. Elles peuvent se classer en deux catégories : les méthodes qualitatives [1-47, 1-59, 1-62, 1-63] qui sont rapides mais ne permettent pas de différencier entre les deux types d'AVC et les méthodes quantitatives basées sur la minimisation d'une fonctionnelle de coût non linéaire [1-37, 1-53] et qui souffrent de temps de calculs élevés. Il y a ainsi une forte demande de méthodes qui soient quantitatives mais également suffisamment rapides pour permettre un diagnostic d'urgence ou un suivi pendant le traitement.

1.4.3 Le problème direct

Dispositif expérimental

Le prototype développé par EMTensor GmbH (voir Figure 1.19 (b)) est une chambre métallique de 28.5 cm de diamètre et de 28 cm de hauteur, composée de 5 anneaux de 32 antennes, qui sont des guides d'onde rectangulaires en céramique. La tête du patient est insérée dans la chambre représentée sur la Figure 1.19 (a). La chambre est remplie d'un liquide de transmission et une membrane plastique permet d'isoler la tête.

Chaque antenne émet successivement un signal de fréquence fixe, typiquement de 1 GHz. L'onde électromagnétique se propage dans la chambre et au travers de l'objet à imager en fonction de leurs propriétés électromagnétiques. Les données récupérées sont les coefficients de diffraction mesurés par les 160 antennes réceptrices. Le faible nombre de données de sortie permet

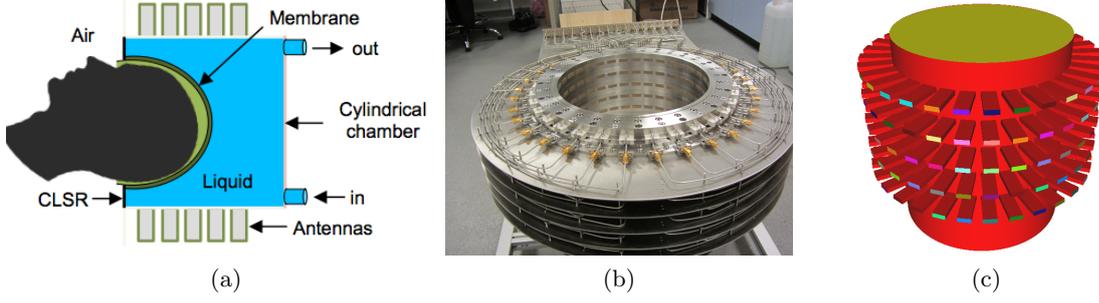


Figure 1.19 – (a) Principe de fonctionnement de l'appareil de mesure. (b) Prototype développé par EMTensor. (c) Le domaine de calcul correspondant.

un envoi rapide à un centre de calcul externe, où les machines HPC pourront calculer les images 3d du cerveau du patient et les transmettre à l'hôpital, voir Figure 1.18.

Modélisation

Notons $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ le domaine représentant l'intérieur de la chambre (voir Figure 1.19 (c)). Dans Ω , nous considérons un matériau diélectrique linéaire, isotrope, non-magnétique, dissipatif et hétérogène, de permittivité diélectrique $\varepsilon_*(x) > 0$ et de conductivité électrique $\sigma_*(x) \geq 0$. Chaque antenne $j = 1, \dots, M$ émet un signal périodique en temps de fréquence angulaire ω et d'amplitude complexe $E_j(x)$ solution des équations de Maxwell :

$$\nabla \times (\nabla \times E_j) - \mu_0(\omega^2 \varepsilon_* - i\omega \sigma_*)E_j = 0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (1.25)$$

On introduit alors $p_* = \mu_0(\omega^2 \varepsilon_* - i\omega \sigma_*)$ et la permittivité complexe relative ε_r donnée par la relation $\varepsilon_r \varepsilon_0 = \varepsilon_* - i\frac{\sigma_*}{\omega}$.

Concernant les conditions de bord, l'équation (1.25) est munie de conditions de type conducteur parfait sur les murs métalliques Γ_m et de conditions d'impédance sur les sections de sortie Γ_j , resp. Γ_i des guides d'onde émetteurs j et récepteurs $i = 1, \dots, M$, $i \neq j$ (voir e.g. [1-10]) :

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times E_j) - \mu_0(\omega^2 \varepsilon_* - i\omega \sigma_*)E_j &= 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ E_j \times \nu &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_m, \\ (\nabla \times E_j) \times \nu + i\beta \nu \times (E_j \times \nu) &= g_j \quad \text{sur } \Gamma_j, \\ (\nabla \times E_j) \times \nu + i\beta \nu \times (E_j \times \nu) &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_i, i \neq j. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Ici β est le nombre d'onde correspondant à la propagation d'un mode fondamental dans le guide d'onde.

Calcul des paramètres de diffraction

Afin de calculer les homologues numériques des paramètres de réflexion et de transmission obtenus par les appareils de mesure, nous utilisons la formule suivante qui est adaptée dans le cas de guides d'onde ouverts :

$$S_{ij} = \frac{\int_{\Gamma_i} \overline{E_j} \cdot E_i^0 d\gamma}{\int_{\Gamma_i} |E_i^0|^2 d\gamma}, \quad i, j = 1, \dots, M, \quad (1.27)$$

où E_i^0 est un mode fondamental du i -ème guide d'onde récepteur et E_j est la solution du problème (1.25) où le j -ème guide d'onde émet le signal. Les S_{ij} pour $i \neq j$ sont les paramètres de transmission et les S_{jj} sont les paramètres de réflexion.

Sur la Figure 1.20 nous comparons les paramètres de transmission calculés par la simulation avec un ensemble de mesures obtenues par EMTensor. Pour ce cas test, la chambre est remplie d'un liquide de transmission homogène pour lequel la permittivité relative complexe à la fréquence de $f = 1$ GHz est $\varepsilon_r^{\text{gel}} = 44 - 20i$.

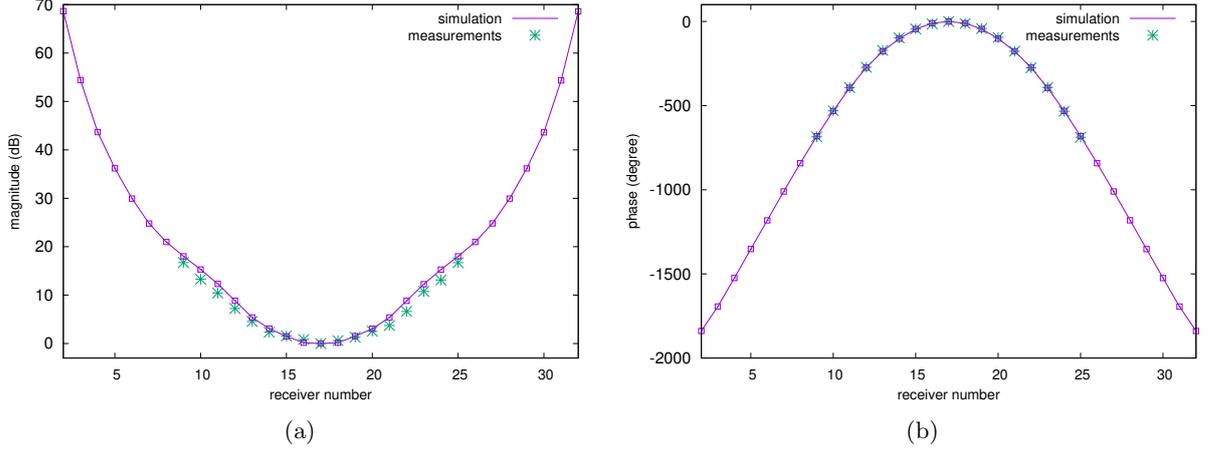


Figure 1.20 – L'amplitude normalisée en dB (a) et la phase en degrés (b) des paramètres de transmission calculés par la simulation et mesurés expérimentalement.

1.4.4 Le problème inverse

Nous notons $E_j[p]$ la solution du problème direct (1.26) associé à un paramètre $p = \mu_0(\omega^2\varepsilon - i\omega\sigma)$. Les paramètres de diffraction correspondants seront notés $S_{ij}[p]$ (1.27) pour $i, j = 1, \dots, M$. Le problème inverse que nous considérons est le suivant :

Trouver la permittivité diélectrique ε et la conductivité σ dans Ω , de telle sorte que la solution $E_j[p]$ conduise à des paramètres de diffraction $S_{ij}[p]$ qui coïncident avec les paramètres de diffraction mesurés S_{ij}^{obs} , pour $i, j = 1, \dots, M$.

On cherche alors à minimiser la fonctionnelle

$$F(p) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^M \frac{|S_{ij}[p] - S_{ij}^{\text{obs}}|^2}{|S_{ij}^{\text{empty}}|^2} + \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} |\nabla p|^2, \quad (1.28)$$

où les S_{ij}^{obs} correspondent aux mesures de $S_{ij}[p_*]$, éventuellement bruitées, et les S_{ij}^{empty} sont les paramètres calculés par simulation dans la chambre uniquement remplie de liquide de transmission, sans objet à l'intérieur. Dans cette section, nous n'utilisons pas encore la méthode AEI pour discrétiser et régulariser le problème. Ainsi, on ajoute le terme de régularisation de Tikhonov (voir Section 1.1.2) qui permet de réduire les effets de bruit dans les données. Le paramètre de régularisation α est pour l'instant choisi empiriquement pour assurer un bon compromis entre la réduction des effets du bruit et l'obtention d'une image reconstruite pertinente.

Nous calculons la différentielle de F dans une direction arbitraire δp grâce à la méthode de l'adjoint (rappelée en 1.1.7)

$$DF(p, \delta p) = \Re \left[\int_{\Omega} \overline{\delta p} \sum_{j=1}^M \overline{E_j \cdot F_j} \right] + \alpha \int_{\Omega} \nabla \delta p \cdot \nabla p,$$

où nous avons introduit la solution $F_j[p]$ du problème adjoint suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \times (\nabla \times F_j) - p F_j = 0 & \text{dans } \Omega, \\ F_j \times \nu = 0 & \text{sur } \Gamma_m, \\ (\nabla \times F_j) \times \nu + i\beta \nu \times (F_j \times \nu) = \frac{(S_{ij}[p] - S_{ij}^{obs}) \overline{E_i^0}}{\int_{\Gamma_i} |E_i^0|^2} & \text{sur } \Gamma_i, i = 1, \dots, M, \end{array} \right. \quad (1.29)$$

Les résultats numériques présentés à la Section 1.4.5 sont obtenus en utilisant l'algorithme d'optimisation L-BFGS (variante optimisée du BFGS décrit en 1.1.7). Chaque évaluation de F nécessite la résolution du problème direct (1.26) tandis que le calcul du gradient nécessite la solution du problème direct (1.26) mais également celle du problème adjoint (1.29). Cependant, les problèmes directs et adjoints utilisent le même opérateur permettant de n'assembler la matrice qu'une seule fois.

1.4.5 Résultats numériques

Simulation directe d'un AVC hémorragique en utilisant un modèle de tête virtuelle

Le modèle numérique de tête virtuelle provient d'images scanner et d'IRM et consiste en une carte de la permittivité de $362 \times 434 \times 362$ points. La Figure 1.21 (a) montre une coupe sagittale de la tête. Pour la simulation, la tête est immergée dans la chambre présentée sur la Figure 1.21 (b). Afin de simuler un AVC hémorragique, on ajoute un ellipsoïde dans lequel la valeur de la permittivité complexe ε_r a été augmentée à $68 - 44i$ et nous simulons l'évolution de l'AVC hémorragique en augmentant la taille de l'ellipsoïde. Les données synthétiques sont obtenues en résolvant le problème direct sur un maillage composé de 17.6 millions de tétraèdres (correspondant approximativement à 20 points par longueur d'onde).

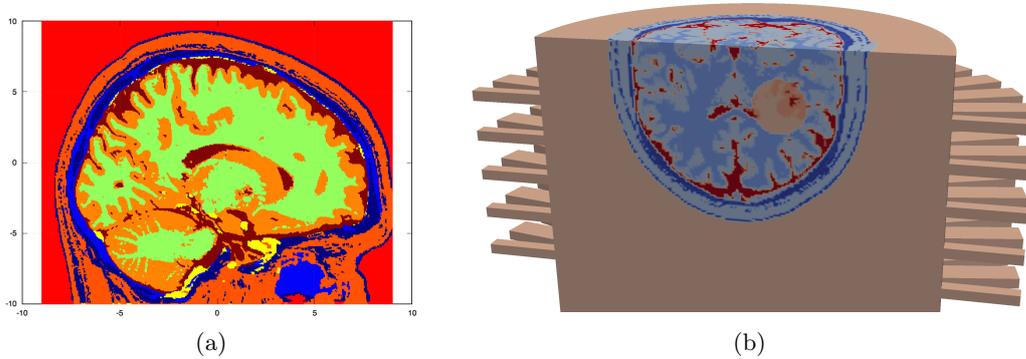


Figure 1.21 – (a) Coupe sagittale de la tête. (b) Tête virtuelle immergée dans la chambre de mesure, comportant un AVC hémorragique simulé sous la forme d'un ellipsoïde.

Reconstruction d'un AVC hémorragique à partir de données synthétiques.

Nous ajoutons du bruit sur les parties réelles et imaginaires des paramètres S_{ij}^{obs} (10% de bruit additif Gaussien). Nous utilisons une approximation linéaire par morceaux pour le coefficient p , défini sur le même maillage que celui utilisé pour résoudre les problèmes direct et inverse. Chaque reconstruction est initialisée par la solution correspondant au liquide de transmission seul, en l'absence de tout objet dans la chambre, et s'arrête pour un critère de convergence de 10^{-2} sur la valeur de la fonctionnelle de coût, ce qui prend environ 30 itérations du L-BFGS. La Figure 1.22 montre la partie imaginaire des permittivités exacte et reconstruite pour trois étapes d'évolution de l'AVC hémorragique : (a) sain, (b) petit et (c) grand AVC.

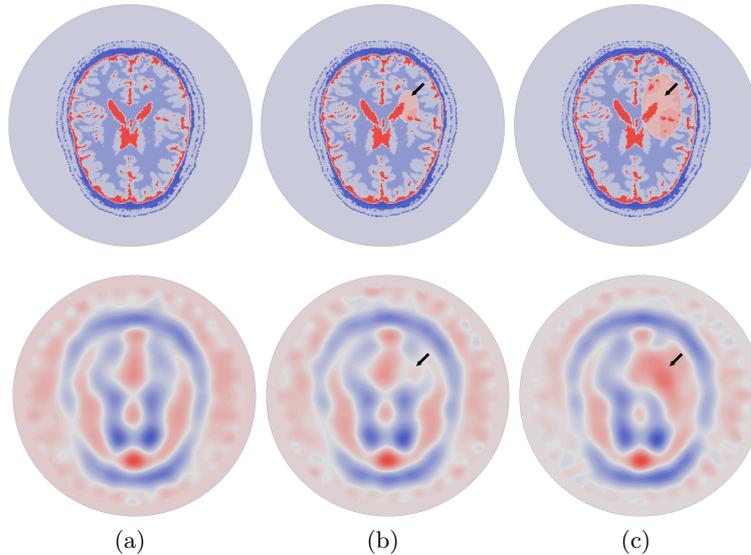


Figure 1.22 – En haut : partie imaginaire de la permittivité exacte pour le cerveau sain (a), avec un petit (b) ou un grand (c) AVC (indiqué par une flèche noire). En bas : reconstructions correspondantes obtenues par résolution du problème inverse.

Il est difficile de quantifier la qualité de la reconstruction pour des techniques d'imagerie de faible résolution comme l'imagerie micro-onde. Bien qu'il soit connu que l'imagerie micro-onde n'est pas une technique suffisamment précise pour retrouver les fines hétérogénéités du cerveau, nous observons que les images reconstruites permettent de suivre l'apparition et l'évolution de l'AVC hémorragique, ainsi que de caractériser le sens de variation des coefficients diélectriques du cerveau et ainsi de différencier entre les différents types d'AVC.

1.4.6 Conclusion

Par un exemple numérique dans une configuration réaliste, nous illustrons ainsi la capacité des techniques d'imagerie micro-onde à détecter et suivre l'évolution des AVC. Les résultats ont été obtenus sur le super ordinateur Curie. Nous avons développé un outil qui permet de reconstruire une image du cerveau en moins de 2 minutes en utilisant 4096 coeurs. Cette étude a été possible grâce au calcul massivement parallèle et facilitée par l'utilisation des outils FreeFem++ et HPDDM développés par des membres du projet ANR. Ce temps de calcul est suffisamment faible pour envisager des applications en diagnostic rapide ou en suivi d'AVC à l'hôpital. La prochaine étape serait la mise en place de la méthode AEI dans cet exemple, ainsi que la validation de ces résultats sur des données cliniques.

1.5 Perspectives

Depuis les premiers travaux, plusieurs auteurs ont travaillé au développement, à l'étude et à la mise en oeuvre de la méthode AEI pour des problèmes inverses, en combinaison avec d'autres approches originales. Cela a commencé par les travaux de thèse de Nahum [1-49] qui s'est intéressé à l'utilisation de l'approche dans le domaine fréquentiel. Il a tout d'abord montré que dans le cas où p_* présente des discontinuités jusqu'au bord du domaine Ω (voir un exemple sur la Figure 1.23), il est judicieux d'adapter également φ_0 et de le choisir comme la solution de

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (A(x)\nabla\varphi_0) = 0, & \text{dans } \Omega, \\ \varphi_0 = p_*, & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

avec le même choix de A que pour (1.4). Mais il a surtout mis en évidence que l'opérateur

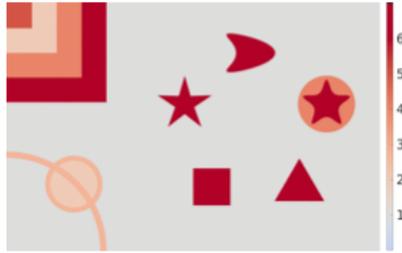


Figure 1.23 – Illustration empruntée à Baffet *et al* [1-7]. Un exemple de coefficient p_* constant par morceaux présentant des obstacles (courbes de discontinuité fermées) et des lignes de discontinuité allant jusqu'au bord du domaine.

elliptique (1.4) associé à la matrice A (1.5) pour $r = 1$ est une linéarisation du gradient du terme de régularisation utilisé dans l'approche *Total Variation penalized* [1-56] :

$$R(p) = \int_{\Omega} |\nabla p| dx, .$$

Cette régularisation est bien connue en traitement d'images pour être capable d'éliminer le bruit d'une image tout en préservant la netteté des contours. Il n'est pas surprenant que la base AE hérite de propriétés similaires.

Dans Grote, Kray et Nahum [1-29], ils proposent de combiner la méthode AEI avec un processus de *frequency stepping* qui consiste à augmenter itérativement la fréquence d'émission, avec des résultats très positifs. Ce travail a été étendu à la récupération simultanée de plusieurs paramètres dans Grote et Nahum [1-30]. Dans Graff, Grote, Nataf et Assous [1-28], les auteurs combinent la méthode TRAC présentée en Section 1.2, la méthode AEI et une technique de séparation de sources qu'ils ont développée. Plus récemment, Nahum, Seppi et Cattin [1-50] appliquèrent la méthode AEI dans le contexte de l'endoscopie et Faucher, Scherzer et Barucq [1-25] en imagerie sismique.

Dernièrement, la méthode a également été étendue à d'autres types de problèmes mal posés, celui de l'optimisation topologique par Sanders, Bonnet et Aquino [1-57] et celui de la segmentation d'images médicales par Nahum et Cattin [1-51]. Dans ces cas, il n'est plus question de résoudre un problème inverse associé à une EDP au travers de la minimisation d'une fonctionnelle telle (1.1). Néanmoins, l'idée AEB d'utiliser la paramétrisation (1.3) sur la base de vecteurs propres de l'opérateur (1.4) et de l'adapter au cours des itérations est utilisée. Tous ces travaux

laissent entrevoir la possibilité d'appliquer la méthode à d'autres domaines et en particulier j'aimerais faire le lien avec les nombreuses méthodes de régularisation existant en traitement d'images, étude déjà initiée dans [1-30] et [1-25]. Un stage de M2 sur ce sujet débutera en septembre 2020.

Enfin, dans [1-7], Baffet, Grote et Tang proposent une toute première analyse théorique des propriétés de la paramétrisation AEB (ou AS pour *Adaptive Spectral*) dans l'approximation des fonctions constantes par morceaux. Ils démontrent en particulier que les premières fonctions propres sont alors presque constantes par morceaux, en ce sens que leurs gradients sont petits en dehors d'un voisinage des lignes de discontinuités (voir Figure 1.24). Ils proposent également un critère pour adapter la dimension K de l'espace de recherche. Malgré ces avancées, il reste encore beaucoup de choses à comprendre, en particulier pourquoi le processus adaptatif permet d'améliorer les approximations successives de la solution.

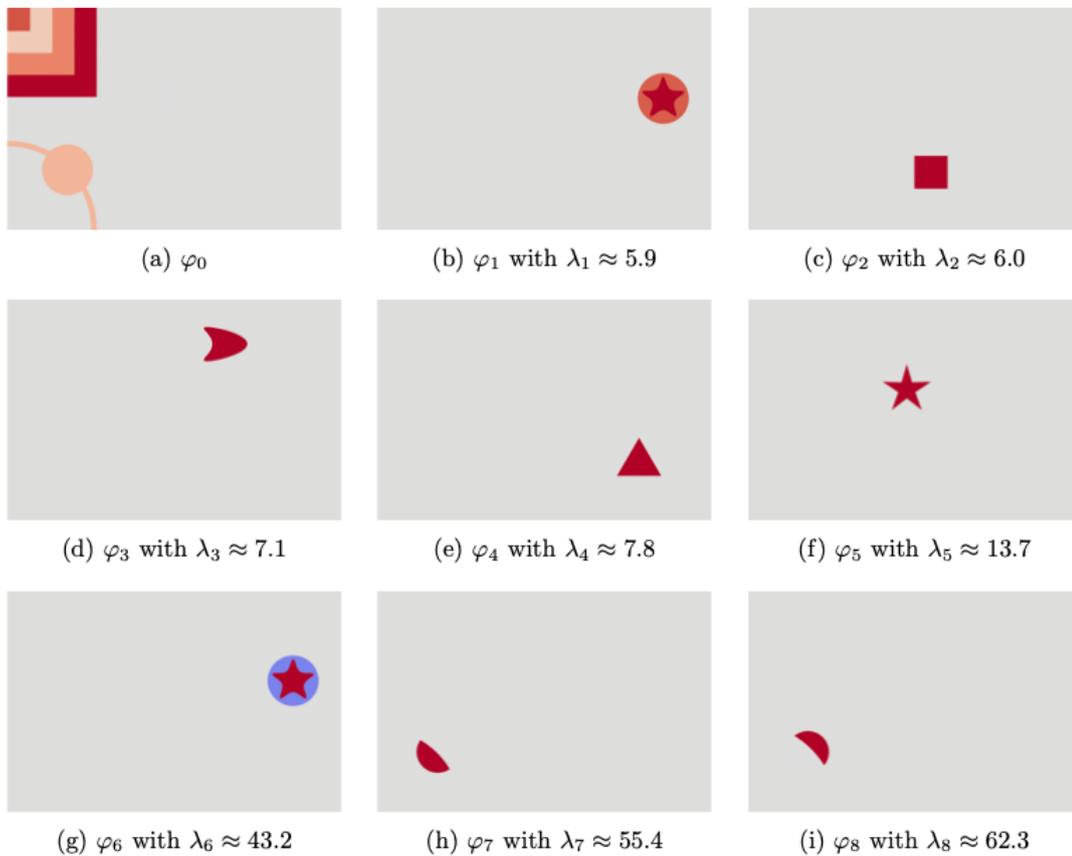


Figure 1.24 – Illustration empruntée à Baffet *et al* [1-7]. Les fonctions propres de l'opérateur (1.4) pour $r = 1$ dans le cas idéal où $p^{(1)} = p_*$ donné sur la Figure 1.23.

Chapitre 2

La méthode C-bRec : une méthode de reconstruction globalement convergente

Dans ce chapitre, je présente la méthode C-bRec (pour *Carleman based Reconstruction*) développée avec Lucie Baudouin et Sylvain Ervedoza pour résoudre des problèmes inverses de détermination de coefficients dans des équations aux dérivées partielles d'évolution. L'originalité de la méthode est l'utilisation d'une inégalité de Carleman, outil théorique jusqu'alors uniquement destiné à démontrer le caractère bien posé du problème inverse, dans la construction de la méthode numérique. De plus, nous prouvons que cette méthode est globalement convergente, c'est-à-dire qu'elle converge vers la solution exacte quelque soit la donnée initiale. En ce sens, elle remédie au problème des minima locaux (problématique (P5) présentée dans le préambule de ce manuscrit) dont souffrent les méthodes de type moindres carrés classiquement utilisées pour résoudre les problèmes inverses. La méthode a été présentée initialement dans [A1, A4] dans le cas de la récupération d'un potentiel dans l'équation des ondes. Cet exemple sera utilisé pour illustrer les fondements de la méthode C-bRec à la Section 2.1, ainsi que pour introduire les différents défis numériques liés à son implémentation à la Section 2.2. Récemment, nous avons généralisé l'approche à d'autres cas : d'une part à la récupération de la vitesse de propagation de l'onde avec Axel Osses [A11], ce qui sera l'objet de la Section 2.3 et d'autre part à la récupération d'un terme source dans une équation de réaction-diffusion avec Muriel Boulakia et Erica Schwindt [A10]. C'est ce que je présenterai en Section 2.4. Afin que la présentation reste concise, les démonstrations des propositions sont omises et certains énoncés sont simplifiés (hypothèses plus fortes, résultat affaibli, notations allégées de la dépendance des variables) sans néanmoins en sacrifier la rigueur. Les résultats numériques de ce chapitre ont été implémentés en langage Python et les codes sont disponibles sur simple demande.

2.1 Fondements de la méthode illustrés sur un exemple

Nous illustrons dans cette section les principes fondamentaux de la méthode C-bRec sur l'exemple le plus simple, celui de la récupération d'un potentiel dans une équation des ondes.

2.1.1 Introduction

Soit Ω un domaine borné régulier de \mathbb{R}^n , $n \geq 1$, et $T > 0$. Nous considérons l'équation des ondes avec potentiel

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u + p(x)u = f, & \text{dans } (0, T) \times \Omega, \\ u = g, & \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega, \\ u(0) = u_0, \quad \partial_t u(0) = u_1, & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (2.1)$$

Le caractère bien posé du problème direct est assuré par le résultat suivant :

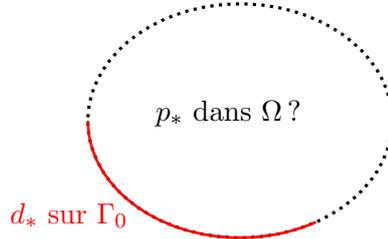
Théorème 2.1 (Lasiacka-Lions-Triggiani [2-31]). *On suppose que $p \in L^\infty(\Omega)$, $f \in L^1(0, T; L^2(\Omega))$, $g \in H^1((0, T) \times \partial\Omega)$, $u_0 \in H^1(\Omega)$ avec $u_0(x) = g(0, x)$ et $u_1 \in L^2(\Omega)$. Alors il existe une unique solution $u \in C^0(0, T; H^1(\Omega)) \cap C^1(0, T; L^2(\Omega))$ à l'équation (2.1). De plus, $\partial_\nu u \in L^2((0, T) \times \partial\Omega)$.*

Le problème inverse qui nous intéresse est alors :

Connaissant les termes sources (f, g) et les données initiales (u_0, u_1) , pouvons nous déterminer le potentiel inconnu $p_*(x)$, $\forall x \in \Omega$, à partir de la connaissance supplémentaire du flux

$$d_* = \partial_\nu u[p_*] = \nabla u[p_*] \cdot \nu, \quad \text{sur } (0, T) \times \Gamma_0,$$

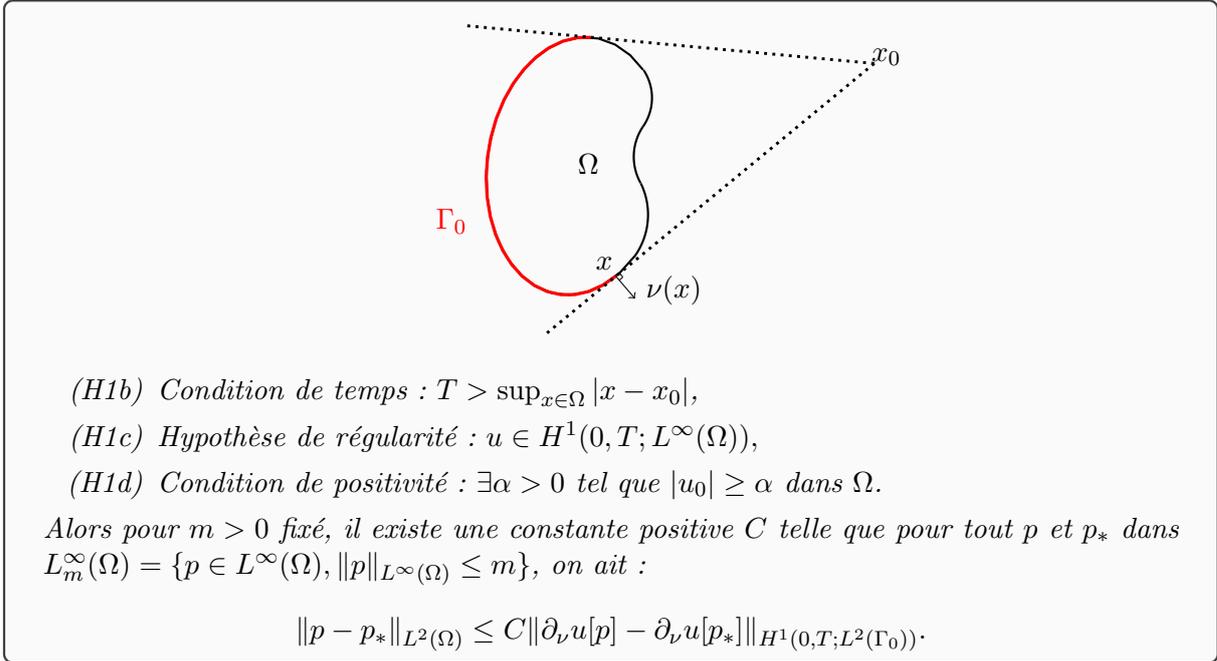
où $u[p_*]$ est la solution de (2.1) associée au coefficient p_* , ν est la normale unitaire sortante définie sur $\partial\Omega$ et Γ_0 est une partie de $\partial\Omega$?



Avant d'aller plus loin, soulignons que nous nous intéressons ici au cas où l'on n'effectue qu'une seule mesure associée à un seul jeu de données (f, g, u_0, u_1) . La question de la détermination des coefficients à partir de la connaissance de l'opérateur Dirichlet-Neumann a été regardée par Belishev [2-8] ou Isakov [2-21]. Mentionnons également que le problème inverse considéré a été beaucoup étudié dans la littérature, à commencer par le résultat d'unicité dans le célèbre article de Bukhgeim-Klibanov [2-12], qui a introduit l'utilisation des estimations de Carleman pour ces études. Par la suite, des résultats de stabilité ont été obtenus, d'abord sur la base des propriétés d'observabilité de l'équation des ondes par Puel-Yamamoto [2-35], puis affinés grâce à l'utilisation des estimations de Carleman par Yamamoto [2-39] et Imanuvilov-Yamamoto [2-18, 2-19]. Nous renvoyons le lecteur intéressé par ces questions d'unicité et de stabilité pour les problèmes inverses de récupération de coefficients dans des EDPs aux travaux de synthèse de Klibanov [2-24, 2-26]. Dans notre cas, le résultat de stabilité Lipschitz qui nous intéresse (et plus particulièrement les hypothèses sous lesquelles il est valide) se met sous la forme :

Théorème 2.2 (Baudouin [2-3]). *Sous les hypothèses suivantes*

(H1a) *Condition géométrique : $\exists x_0 \notin \bar{\Omega}$ tel que $\Gamma_0 \supset \{x \in \partial\Omega, (x - x_0) \cdot \nu(x) \geq 0\}$,*



Remarque Les conditions géométrique (H1a) et de temps (H1b) sont naturelles du point de vue de l'observabilité, et apparaissent dans le contexte de la technique des multiplicateurs développée par Ho [2-17] et Lions [2-33]. Elles sont plus restrictives que les résultats d'observabilité bien connus de Bardos-Lebeau-Rauch [2-2] basés sur l'étude du comportement des rayons de l'optique géométrique. Cependant, les conditions (H1a)-(H1b) donnent des résultats beaucoup plus robustes, et ceci est d'une importance primordiale dans notre approche.

2.1.2 Références sur les méthodes de reconstruction globalement convergentes

Compte-tenu du résultat de stabilité de Théorème 2.2, une méthode intuitive pour calculer p_* consisterait à minimiser la fonctionnelle de coût :

$$F(p) = \frac{1}{2} \|\partial_\nu u[p] - d_*\|_{H^1(0, T; L^2(\Gamma_0))}^2. \quad (2.2)$$

Le problème est que la fonctionnelle F n'est en général pas convexe. La présence de nombreux minima locaux implique que les algorithmes de minimisation traditionnels ne convergent en général pas vers le minimum global de F , à moins de pouvoir les initialiser dans un voisinage de ce minimum (voir Figure 2.1).

Sur la Figure 2.2, j'illustre le fait qu'en fonction de l'initialisation de la minimisation, la convergence peut également avoir lieu vers un minimum local de la fonctionnelle F (c'est le cas (b)). Dans cet exemple 1d, la minimisation de F est réalisée par un algorithme BFGS et le gradient de F est calculé par la méthode de l'adjoint (voir la Section 1.1.7 pour cette approche).

Une méthode est dite globalement convergente si on peut garantir sa convergence vers la solution à partir de n'importe quelle donnée initiale. Les méthodes de reconstruction globalement convergentes restent rares, même si des travaux décisifs dans cette direction ont été faits depuis les années 90, en particulier ceux de Klivanov basés sur les inégalités de Carleman. L'idée originale d'introduire les poids de Carleman dans la fonction de coût pour rendre



Figure 2.1 – Illustration de la convergence locale des descentes de gradient dans le cas d'une fonctionnelle non convexe.

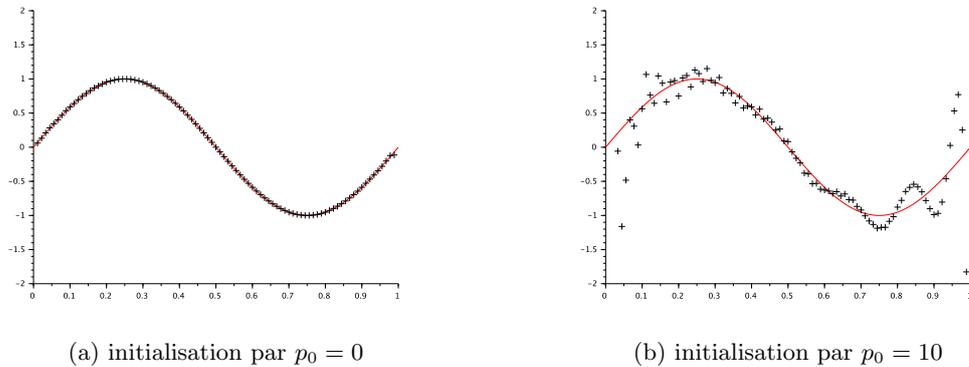


Figure 2.2 – Minimisation de F définie en (2.2) dans le cas où $p_*(x) = \sin(2\pi x)$ (courbe continue rouge). Résultats à convergence (croix noires) pour deux initialisations différentes.

le problème convexe remonte à l'article [2-25]. Pour un état de l'art sur ces questions, nous renvoyons au livre de Beilina et Klivanov [2-6]. Depuis, de nombreux autres travaux ont été proposés par Klivanov et ses co-auteurs sur différents modèles, parmi lesquels nous pouvons citer en particulier Beilina-Klivanov [2-7] pour la récupération d'une densité dans une équation des ondes, Klivanov-Li-Zhang [2-29] et Smirnov-Klivanov-Nguyen [2-37] dans le cas plus délicat où la donnée initiale est une masse de Dirac, Kamburg-Klivanov [2-23] pour les problèmes inverses pour les équations paraboliques, Thanh-Beilina-Klivanov-Fiddy [2-38] sur des données réelles, Bakushinskii-Klivanov-Koshev [2-1] pour résoudre les problèmes de Cauchy pour les EDP générales.

La méthode C-bRec appartient à ces méthodes de reconstruction globalement convergentes, parfois dites *méthodes de convexification*. La principale nouveauté de notre approche est qu'elle consiste à minimiser une suite de fonctionnelles quadratiques, pour lesquelles des algorithmes de minimisation efficaces existent, tandis que les travaux cités ci-dessus considèrent une seule fonctionnelle strictement convexe mais qui n'est pas quadratique et n'est donc adaptée qu'aux stratégies de descente de gradient classiques.

2.1.3 L'idée fondatrice de la méthode C-bRec

L'algorithme C-bRec va considérer le potentiel p_* à retrouver comme le point fixe d'une application contractante. C'est en effet un processus itératif qui construit une suite $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ qui va converger vers p_* . A l'itération k , l'idée est de linéariser l'équation (2.1) en considérant celle satisfaite par $v = \partial_t (u[p_k] - u[p_*])$, à savoir

$$\begin{cases} \partial_t^2 v - \Delta v + p_k v = h, & \text{dans } (0, T) \times \Omega, \\ v = 0, & \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega, \\ v(0) = 0, \quad \partial_t v(0) = (p_* - p_k)u_0, & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (2.3)$$

où $h := (p_* - p_k)\partial_t u[p_*]$. Cette approche est ce qu'on appelle la méthode de Bukhgeim et Klibanov [2-12] qui est à la base de la démonstration du résultat de stabilité du Théorème 2.2. On remarque alors que v est l'unique minimiseur de la fonctionnelle :

$$J[h](z) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} e^{2s\varphi} |\partial_t^2 z - \Delta z + p_k z - h|^2 dx dt + \frac{s}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_0} e^{2s\varphi} |\partial_\nu z - \mu|^2 d\gamma dt, \quad (2.4)$$

où on a posé $\mu = \partial_\nu v = \partial_t (\partial_\nu u[p_k] - \partial_\nu u[p_*])$ sur $(0, T) \times \Gamma_0$. La fonction φ qui apparait dans la définition (2.4) est la fonction poids de Carleman (voir sa définition dans le Théorème 2.3) et c'est sa forme particulière qui assure de bonnes propriétés à la fonctionnelle $J[h]$, en particulier sa stricte convexité énoncé dans le Lemme 2.4.

Si on regarde la donnée initiale en vitesse dans (2.3), on constate que p_* peut se déduire de v par la formule

$$p_* = p_k + \frac{\partial_t v(0)}{u_0}, \quad (2.5)$$

où on a supposé que u_0 satisfait l'hypothèse (H4a). Bien sûr, v est inconnu puisque h dépend de l'inconnue p_* . L'idée est alors de minimiser une autre fonctionnelle $J[0]$ associée à la valeur $h = 0$. Dans ce cas, l'unique minimiseur est une autre fonction que nous notons Z . Et l'erreur commise en remplaçant v par Z peut être estimée en fonction de h . Si on applique la formule (2.5) à Z , on n'obtient bien sûr plus p_* mais un autre potentiel que nous allons noter

$$p_{k+1} = p_k + \frac{\partial_t Z(0)}{u_0}.$$

Et la magie est qu'on est capable de montrer que le p_{k+1} ainsi construit est plus proche de p_* que ne l'était le p_k , conduisant ainsi à construire une suite convergente. Nous allons expliquer ce schéma de construction de manière rigoureuse et pour cela nous avons tout d'abord besoin d'une inégalité de Carleman.

2.1.4 Une inégalité de Carleman adéquate

Une inégalité de Carleman [2-14] est une inégalité d'énergie dans des normes à poids. Dans le cas de l'équation des ondes qui nous intéresse, il est possible de démontrer le résultat suivant :

Théorème 2.3. *Supposons les conditions (H1a) et (H1b) satisfaites. Supposons de plus que*

(H1e) $\beta \in (0, 1)$, $\lambda > 0$ et $C_0 \geq T^2$ sont tels que

$$\beta T > \sup_{x \in \Omega} |x - x_0| \quad \text{et} \quad \varphi(t, x) = e^{\lambda(|x-x_0|^2 - \beta t^2 + C_0)}.$$

Alors avec $m > 0$ fixé, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout s et λ suffisamment grands, pour tout $p \in L_m^\infty(\Omega)$, on ait :

$$\begin{aligned} & \underbrace{\sqrt{s} \int_{\Omega} e^{2s\varphi(0)} |\partial_t z(0)|^2 dx}_{\text{énergie initiale}} + s \underbrace{\int_0^T \int_{\Omega} e^{2s\varphi} (|\partial_t z|^2 + |\nabla z|^2 + s^2 |z|^2) dx dt}_{\text{énergie totale}} \\ & \leq C \underbrace{\int_0^T \int_{\Omega} e^{2s\varphi} |\partial_t^2 z - \Delta z + pz|^2 dx dt}_{\text{source}} + Cs \underbrace{\int_0^T \int_{\Gamma_0} e^{2s\varphi} |\partial_\nu z|^2 d\gamma dt}_{\text{observations}}, \end{aligned}$$

pour tout $z \in \mathcal{T} = \{z \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \partial_t^2 z - \Delta z + pz \in L^2((0, T) \times \Omega), \partial_\nu z \in L^2((0, T) \times \Gamma_0)\}$ et $z(0) = 0$ dans Ω .

Remarquez que dans tout ce chapitre, C sera une constante générique qui ne dépendra jamais ni de s ni de k . L'estimation de Carleman du Théorème 2.3 est assez classique et peut être trouvée dans la littérature à plusieurs endroits, parmi lesquels Lavrentiev-Romanov-Shishatskiï [2-32] et Zhang [2-40]. Cependant, la preuve du fait que le terme d'énergie initiale peut être ajouté dans la partie gauche lorsque $z(0) = 0$ dans Ω n'est pas explicitement écrit dans les références susmentionnées, bien que ce soit l'un des points importants de la preuve du résultat du Théorème 2.2. Par souci de clarté, j'omets la preuve de ce résultat qui peut être trouvée dans [A1].

Cette inégalité servira dans la démonstration du résultat de convergence du Théorème 2.5 qui sera valide sous les mêmes hypothèses. Elle est également à la base de la preuve du résultat suivant qui garantit que la fonctionnelle $J[h]$ définie en (2.4) admet un unique minimiseur

Lemme 2.4. *Supposons les hypothèses du Théorème 2.3 satisfaites. Alors, pour tout $s > 0$ et $k \in \mathbb{N}$, la fonctionnelle $J[h]$ définie en (2.4) est continue, strictement convexe et coercive sur \mathcal{T} muni d'une norme pondérée adéquate.*

2.1.5 L'algorithme C-bRec

On peut maintenant énoncer les différentes étapes de l'algorithme de résolution du problème inverse.

Algorithme 2.1

Initialisation : Choisir n'importe quel $p_0 \in L_m^\infty(\Omega)$.

Itération : Connaissant $p_k \in L_m^\infty(\Omega)$,

1. Calculer $u[p_k]$ solution de

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u + p_k u = f, & \text{dans } (0, T) \times \Omega, \\ u = g, & \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega, \\ u(0) = u_0, \quad \partial_t u(0) = u_1, & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (2.6)$$

et poser $\mu = \partial_t (\partial_\nu u[p_k] - d_*)$ sur $(0, T) \times \Gamma_0$.

2. Minimiser la fonctionnelle

$$J[0](z) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} e^{2s\varphi} |\partial_t^2 z - \Delta z + p_k z|^2 dx dt + \frac{s}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_0} e^{2s\varphi} |\partial_\nu z - \mu|^2 d\gamma dt, \quad (2.7)$$

sur l'espace \mathcal{T} et noter Z son unique minimiseur.

3. Poser alors

$$\tilde{p}_{k+1} = p_k + \frac{\partial_t Z(0)}{u_0},$$

où u_0 est la condition initiale de (2.1).

4. Finalement, définir

$$p_{k+1} = \Pi_m(\tilde{p}_{k+1}),$$

$$\text{où } \Pi_m(p) = \begin{cases} p, & \text{si } |p| \leq m, \\ \text{sign}(p)m, & \text{si } |p| > m. \end{cases}$$

L'Étape 4 de projection est là pour garantir que le coefficient p_{k+1} reste bien dans $L_m^\infty(\Omega)$ afin de pouvoir à l'itération suivante appliquer à nouveau l'inégalité de Carleman. Cet algorithme présente l'avantage d'être convergent pour n'importe quelle donnée initiale $p_0 \in L_m^\infty(\Omega)$ sans connaissance *a priori* sur p_* mise à part celle de m . Il s'agit bien d'un algorithme globalement convergent. C'est ce qu'énonce le résultat suivant.

2.1.6 Le résultat de convergence

Théorème 2.5. *Supposons les hypothèses (H1a)-(H1b)-(H1c)-(H1d)-(H1e) satisfaites. Supposons également que $p_* \in L_m^\infty(\Omega)$. Alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout s suffisamment grand et pour tout $k \in \mathbb{N}$, on ait*

$$\int_{\Omega} e^{2s\varphi(0)} |p_k - p_*|^2 dx \leq \left(\frac{C}{\sqrt{s}} \right)^k \int_{\Omega} e^{2s\varphi(0)} |p_0 - p_*|^2 dx.$$

En particulier, si s est assez grand, la suite $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ fournie par l'Algorithme 2.1 converge vers p_ lorsque k tend vers l'infini.*

Démonstration. Dans ce cas particulier, la démonstration du résultat de convergence est très simple. Ecrivons d'abord les équations d'Euler Lagrange satisfaites respectivement par :

— Z le minimiseur de $J[0]$:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}J[0](Z, z) &= \int_0^T \int_{\Omega} e^{2s\varphi} (\partial_t^2 Z - \Delta Z + p_k Z) (\partial_t^2 z - \Delta z + p_k z) dx dt \\ &\quad + s \int_0^T \int_{\Gamma_0} e^{2s\varphi} (\partial_\nu Z - \mu) \partial_\nu z d\gamma dt = 0, \end{aligned}$$

— v le minimiseur de $J[h]$ défini en (2.4) :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}J[h](v, z) &= \int_0^T \int_{\Omega} e^{2s\varphi} (\partial_t^2 v - \Delta v + p_k v - h) (\partial_t^2 z - \Delta z + p_k z) dx dt \\ &\quad + s \int_0^T \int_{\Gamma_0} e^{2s\varphi} (\partial_\nu v - \mu) \partial_\nu z d\gamma dt = 0, \end{aligned}$$

valables pour tout $z \in \mathcal{T}$. En appliquant ces équations à $z = Z - v$ et en soustrayant les deux égalités, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} e^{2s\varphi} |\partial_t^2 z - \Delta z + p_k z|^2 dx dt + s \int_0^T \int_{\Gamma_0} e^{2s\varphi} |\partial_\nu z|^2 d\gamma dt \\ = \int_0^T \int_{\Omega} e^{2s\varphi} h (\partial_t^2 z - \Delta z + p_k z) dx dt. \end{aligned}$$

Ceci implique que

$$\frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} e^{2s\varphi} |\partial_t^2 z - \Delta z + p_k z|^2 dx dt + s \int_0^T \int_{\Gamma_0} e^{2s\varphi} |\partial_\nu z|^2 d\gamma dt \leq \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} e^{2s\varphi} |h|^2 dx dt.$$

Le membre de gauche de cette égalité est précisément le membre de droite de l'inégalité de Carleman du Théorème 2.3. Ainsi, nous obtenons :

$$s^{1/2} \int_{\Omega} e^{2s\varphi(0)} |\partial_t z(0)|^2 dx \leq C \int_0^T \int_{\Omega} e^{2s\varphi} |h|^2 dx dt,$$

où $\partial_t z(0) = \partial_t Z(0) - \partial_t v(0)$. De plus,

$$\begin{aligned} \partial_t Z(0) &= (\tilde{p}_{k+1} - p_k) u_0, \text{ par définition de } \tilde{p}_{k+1} \text{ à l'Etape 3,} \\ \partial_t v(0) &= (p_* - p_k) u_0, \text{ d'après l'équation (2.3)} \\ h &= (p_* - p_k) \partial_t u[p_*]. \end{aligned}$$

Finalement, puisque $\varphi(t) \leq \varphi(0)$ pour tout $t \in (0, T)$ on a :

$$s^{1/2} \int_{\Omega} e^{2s\varphi(0)} |u_0|^2 (\tilde{p}_{k+1} - p_*)^2 dx \leq C \|\partial_t u[p_*]\|_{L^2(0,T;L^\infty(\Omega))}^2 \int_{\Omega} e^{2s\varphi(0)} (p_k - p_*)^2 dx.$$

En utilisant la condition de positivité (H1d) sur u_0 et le fait que

$$|p_{k+1} - p_*| = |\Pi_m(\tilde{p}_{k+1}) - \Pi_m(p_*)| \leq |\tilde{p}_{k+1} - p_*|,$$

car Π_m est Lipschitz et $\Pi_m(p_*) = p_*$, nous déduisons immédiatement que

$$\int_{\Omega} e^{2s\varphi(0)} (p_{k+1} - p_*)^2 dx \leq \frac{C}{\sqrt{s}} \int_{\Omega} e^{2s\varphi(0)} (p_k - p_*)^2 dx \leq \left(\frac{C}{\sqrt{s}} \right)^{k+1} \int_{\Omega} e^{2s\varphi(0)} (p_0 - p_*)^2 dx.$$

Pour s tel que $\frac{C}{\sqrt{s}} < 1$, la suite est bien convergente. \square

2.1.7 Une première difficulté

Bien que l'Algorithme 2.1 introduit précédemment soit satisfaisant d'un point de vue théorique, puisqu'à chaque itération, il consiste simplement en la minimisation d'une fonctionnelle quadratique strictement convexe et coercive, sa mise en oeuvre présente néanmoins quelques difficultés. La première difficulté est dû à la présence dans $J[0]$ définie en (2.7) d'une double exponentielle

$$e^{se^{\lambda(|x-x_0|^2 - \beta t^2 + C_0)}},$$

avec un choix de paramètres s et λ grands et dont la taille effective est difficile à évaluer. En particulier, pour $s = \lambda = 3$ - ce qui n'est bien sûr pas très grand - et avec $\Omega = (0, 1)$, $x_0 \simeq 0^-$, $T \simeq 1^+$ et $\beta \simeq 1^-$, le ratio

$$\frac{\max_{(0,T) \times \Omega} \{\exp(2s\varphi)\}}{\min_{(0,T) \times \Omega} \{\exp(2s\varphi)\}}$$

est de l'ordre de 10^{340} ! L'implémentation de l'Algorithme 2.1 dans ce cas se révèle déjà impossible.

Pour remédier à ce problème, une première idée a été de démontrer une inégalité de Carleman associée à la fonction poids $\varphi(t, x) = |x - x_0|^2 - \beta t^2$ au lieu de $\varphi(t, x) = \exp(\lambda(|x - x_0|^2 - \beta t^2 + C_0))$. Le résultat est le suivant :

Théorème 2.6. *Supposons que les conditions (H1a)-(H1b) sont satisfaites. Supposons de plus que*

(H1f) $\beta \in (0, 1)$ est tel que

$$\beta T > \sup_{x \in \Omega} |x - x_0| \quad \text{et} \quad \varphi(t, x) = |x - x_0|^2 - \beta t^2.$$

Alors pour $m > 0$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout s suffisamment grand, pour tout $p \in L_m^\infty(\Omega)$ et pour tout $z \in \mathcal{T}$:

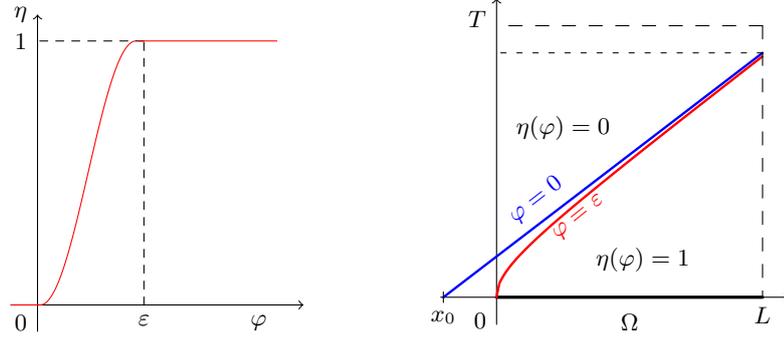
$$\begin{aligned} & \underbrace{\sqrt{s} \int_{\Omega} e^{2s\varphi(0)} |\partial_t z(0)|^2 dx}_{\text{énergie initiale}} + s \underbrace{\int_0^T \int_{\Omega} e^{2s\varphi} (|\partial_t z|^2 + |\nabla z|^2 + s^2 |z|^2) dx dt}_{\text{énergie totale}} \\ & \leq C \underbrace{\int_0^T \int_{\Omega} e^{2s\varphi} |\partial_t^2 z - \Delta z + pz|^2 dx dt}_{\text{source}} + Cs \underbrace{\int_0^T \int_{\Gamma_0} e^{2s\varphi} |\partial_\nu z|^2 d\gamma dt}_{\text{observations}} \\ & + Cs^3 \underbrace{\iint_{\{\varphi < 0\}} e^{2s\varphi} |z|^2 dx dt}_{\text{terme additionnel}}. \end{aligned}$$

La démonstration de ce résultat nécessite bien sûr une adaptation des preuves du Théorème 2.3, la difficulté étant qu'en l'absence de deux paramètres s et λ on a moins de flexibilité dans les estimations. A l'étape 2 de l'Algorithme 2.1, il suffit de considérer à présent la nouvelle fonctionnelle

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{J}}[0](z) &= \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} e^{2s\varphi} |\partial_t^2 z - \Delta z + p_k z|^2 dx dt + \frac{s}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_0} e^{2s\varphi} |\partial_\nu z - \tilde{\mu}|^2 d\gamma dt \\ &+ \frac{s^3}{2} \iint_{\{\varphi < 0\}} e^{2s\varphi} |z|^2 dx dt, \end{aligned}$$

où on a introduit $\tilde{\mu} = \eta(\varphi)\mu$ avec μ défini à l'étape 1 de l'Algorithme 2.1 et $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$ une fonction plateau (illustrée sur la Figure 2.3) telle que $0 \leq \eta \leq 1$ et

$$\eta(\varphi) = \begin{cases} 0, & \text{si } \varphi < 0, \\ 1, & \text{si } \varphi \geq \varepsilon > 0. \end{cases} \quad (2.8)$$

Figure 2.3 – Illustration de la fonction plateau η définie en (2.8).

Avec ce nouveau choix de fonctionnelle, le résultat de convergence du Théorème 2.5, bien que plus technique à démontrer, s'énonce exactement de la même manière. Mentionnons le fait que l'on peut trouver dans Cindea-Fernandez Cara-Münch [2-15] des expériences numériques basées sur la minimisation d'une fonctionnelle quadratique similaire à celle de (2.7), mais avec s et λ petits. Notre objectif est de surmonter cette restriction sur la taille des paramètres de Carleman qui doivent être grands pour assurer la convergence de l'algorithme.

2.2 Mise en oeuvre numérique illustrée sur un exemple

Nous illustrons dans cette section la mise en oeuvre numérique de la méthode C-bRec sur l'exemple de la récupération d'un potentiel dans l'équation des ondes, exemple (2.1) qui a servi d'introduction à la Section 2.1. Le but de cette section est en particulier de présenter les techniques que nous avons mises en place pour rendre l'algorithme implémentable en pratique, sans restriction sur la taille du facteur s , comme cela est nécessaire pour garantir la convergence de l'algorithme (voir Théorème 2.5).

Pour simplifier la présentation, nous expliquons les schémas de discrétisation en une dimension d'espace et nous supposons donc que $\Omega = (0, L)$ pour $L > 0$, $x_0 < 0$ et donc $\Gamma_0 = \{x = L\}$. Notez que dans ce cas, notre problème peut probablement être résolu plus facilement en utilisant les caractéristiques spécifiques de l'équation des ondes 1d (voir par exemple Isakov [2-22]), mais notre but ici est de proposer une approche qui peut être généralisée au cadre multidimensionnel. Notons $N_x \in \mathbb{N}$ le nombre de points de discrétisation intérieurs de $[0, L]$ et $N_t \in \mathbb{N}$ le nombre de pas de temps dans $[0, T]$. Les pas d'espace et de temps sont notés $\Delta x = \frac{L}{N_x + 1}$ et $\Delta t = \frac{T}{N_t + 1}$ respectivement et nous définissons, pour $0 \leq j \leq N_x + 1$ et $0 \leq n \leq N_t + 1$, u_j^n une approximation numérique de la fonction $u(t^n, x_j)$ avec $t^n = n\Delta t$ et $x_j = j\Delta x$.

2.2.1 Génération des données, ajout de bruit et régularisation

Dans tout ce chapitre, nous travaillons avec des données synthétiques. La génération des données consiste alors à résoudre numériquement le système initial (2.1) pour un potentiel exact donné p_* . Afin d'éviter le *inverse crime* (voir Colton-Kress [2-16] pour cette notion), nous introduisons un biais en prenant des maillages et des schémas numériques différents pour la génération des données synthétiques et l'Etape 1 de l'Algorithme 2.1. Ainsi, dans le cas de la récupération

du potentiel, le problème direct (2.1) est résolu par un schéma de différences finies en espace avec $\Delta x = 0.00025$ et un schéma implicite en temps avec $\Delta t = 0.00033$, tandis que pour le problème inverse (2.6), le pas d'espace est de $\Delta x = 0.05$ et le schéma en temps est un schéma d'Euler explicite associé à une CFL égale à 1.

Ensuite, pour $0 \leq n \leq N_t + 1$, nous définissons d_*^n comme l'approximation par différences finies de d_* au temps $t^n = n\tau$ et au point $x = L$. Sur les données générées, on ajoute un bruit gaussien qui selon les applications peut être :

— additif

$$d_{obs}^n = d_*^n + \delta(\max_{\ell} d_*^{\ell})\mathcal{N}(0, 1), \quad 0 \leq n \leq N_t + 1,$$

— ou multiplicatif

$$d_{obs}^n = d_*^n(1 + \delta\mathcal{N}(0, 1)), \quad 0 \leq n \leq N_t + 1,$$

où $\mathcal{N}(0, 1)$ satisfait une loi normale centrée d'écart type 1 et δ est le niveau de bruit.

Un des inconvénients de la méthode présentée est que nous devons dériver en temps les observations d_* . Sur la Figure 2.4, nous traçons le flux d_* par rapport au temps (à gauche) ainsi de sa dérivée temporelle (à droite) dans le cas $1d$ où $p_*(x) = \sin(2\pi x)$. Pour chacun de ces graphiques, la ligne rouge est la donnée sans bruit et la ligne noire correspond aux données bruitées d_{obs} . On constate que même de petites perturbations (bruit) sur les observations peuvent conduire à de grandes perturbations dans leurs dérivées. Afin de partiellement remédier à ce problème, nous régularisons les données grâce à un filtre passe-bas de Butterworth [2-13] associé à une fréquence de coupure supposée connue *a priori*. Nous remplaçons également les formules de différenciation classiques qui génèrent des instabilités par une formule de Savitzki-Golay [2-36] associée à un polynôme cubique et une fenêtre à 5 points. Sur la Figure 2.4, la ligne bleue représente ainsi le signal régularisé, celui qui sert de donnée d'entrée pour la résolution du problème inverse.

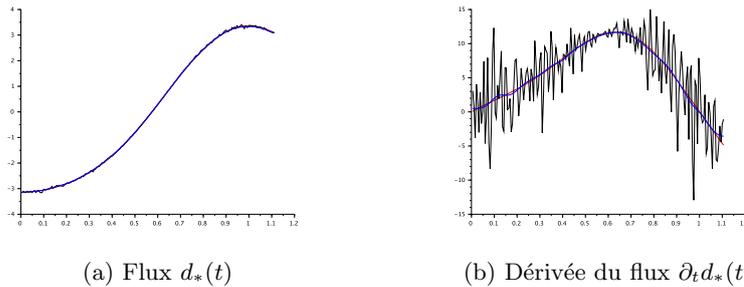


Figure 2.4 – Exemples d'observations $d_*(t)$ au point $x = L$ pour le potentiel $p_*(x) = \sin(2\pi x)$ obtenues par l'équation (2.1). Nous montrons l'impact de l'ajout de 2% de bruit et de la dérivation, ainsi que le résultat obtenu après application du filtre passe-bas.

2.2.2 Discrétisation et minimisation de la fonctionnelle

Un terme de régularisation additionnel

La discrétisation de la fonctionnelle $\tilde{\mathcal{J}}[0]$ se fait de manière classique par différences finies et grâce à des formules du trapèze pour les termes intégraux. Cependant, nous devons faire

particulièrement attention lorsque nous adaptons la fonctionnelle au cadre discret. En particulier, en suivant des idées développées dans le contexte de l'observabilité des ondes discrètes (voir Zuazua [2-41]), nous savons qu'il est nécessaire de pénaliser les hautes fréquences. Dans notre cas, afin de garantir de bonnes propriétés à la fonctionnelle discrète, il est nécessaire de lui ajouter un terme dit de régularisation visqueuse :

$$\frac{s}{2}(\Delta x)^2 \int_0^T \int_{\Omega} e^{2s\varphi} |\nabla \partial_t z|^2 dx dt \quad (2.9)$$

En particulier, ce terme fait en sorte que l'inégalité de Carleman du Théorème 2.6 reste valable au niveau discret et ce uniformément en le pas de discrétisation Δx . Les résultats ont été démontrés par Baudouin-Ervedoza [2-4] en 1d et étendu en 2d par Baudouin-Ervedoza-Osses [2-5]. Une restriction sur la taille de $s\Delta x$, qui doit être bornée, est le prix à payer.

Variable conjuguée

A chaque itération de l'Algorithme 2.1, le processus de minimisation pour $\tilde{J}[0]$ est équivalent à la résolution de la formulation variationnelle suivante : Trouver $Z \in \mathcal{T}$ de sorte que pour tous $z \in \mathcal{T}$,

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} e^{2s\varphi} (\partial_t^2 Z - \Delta Z + p_k Z) (\partial_t^2 z - \Delta z + p_k z) dx dt \\ & + s \int_0^T \int_{\Gamma_0} e^{2s\varphi} \partial_\nu Z \partial_\nu z d\gamma dt + s^3 \iint_{\{\varphi < 0\}} e^{2s\varphi} Z z dx dt = s \int_0^T \int_{\Gamma_0} e^{2s\varphi} \tilde{\mu} \partial_\nu z d\sigma dt. \end{aligned}$$

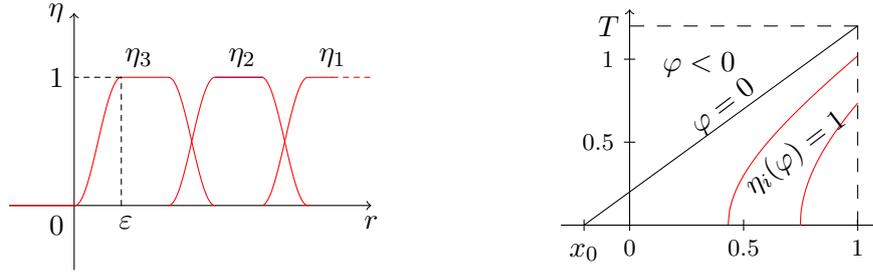
Après discrétisation, cette formulation peut se mettre sous la forme d'un système linéaire $AZ = B$ où B est le vecteur correspondant aux données $\tilde{\mu}$. Du fait de la présence des termes exponentiels dans la matrice A , celle-ci est extrêmement mal conditionnée dès que s augmente. Cependant, un simple changement de variable qui consiste à introduire au niveau discret $Y_j^n = e^{s\varphi(t^n, x_j)} Z_j^n$ pour $0 \leq j \leq N_x + 1$ et $0 \leq n \leq N_t + 1$, permet d'améliorer le conditionnement du système linéaire. Il reste cependant des facteurs exponentiels dans le vecteur des données B .

Un processus progressif

On développe finalement un processus progressif pour résoudre le problème de présence des exponentielles dans B . L'idée est de considérer des intervalles espace-temps dans lesquels la fonction poids φ ne varie pas trop, permettant ainsi de maintenir la précision numérique malgré des valeurs possiblement élevées de s . Dans cet objectif, nous introduisons N fonctions plateau $\{\eta_i\}_{1 \leq i \leq N}$ (représentées sur la Figure 2.5) telles que

$$\forall r \in \mathbb{R}, \quad \sum_{i=1}^N \eta_i(r) = \eta(r),$$

où la fonction η est définie en (2.8). On obtient que, si pour chaque $i \in \{1, \dots, N\}$, on note Z_i l'unique minimiseur de $\tilde{J}[0]$ associée aux mesures $\mu_i = \eta_i(\varphi)\mu$, alors la solution Z associée à $\tilde{\mu}$ est simplement donnée par $Z = \sum_{i=1}^N Z_i$. Cette approche peut par ailleurs être utilisée pour paralléliser la minimisation de $\tilde{J}[0]$.

Figure 2.5 – Définition des fonctions plateau $\{\eta_i\}_{1 \leq i \leq N}$ utilisées dans le processus progressif.

2.2.3 Critères d'arrêt et erreur

La boucle itérative de l'algorithme est arrêtée lorsque le critère suivant est satisfait :

$$\frac{\|p_{k+1} - p_k\|_\infty}{m} \leq \epsilon, \quad (2.10)$$

où ϵ est une tolérance fixe ou lorsque le nombre maximal d'itérations est atteint. Notons p_∞ la solution numérique à convergence.

En l'absence de connaissance de la solution exacte p_* , la qualité de la solution convergée est mesurée par un critère sur les mesures :

$$\text{err}_d = \frac{\|\partial_\nu u[p_\infty] - d_*\|_2}{\|d_*\|_2}, \quad (2.11)$$

qui doit être inférieur au niveau de bruit dans les observations. Lorsque la solution exacte p_* est connue, nous pouvons calculer l'erreur finale

$$\text{err}_p = \frac{\|p_\infty - p_*\|_2}{\|p_*\|_2}.$$

2.2.4 Résultats numériques

Dans toutes les figures de cette section et des suivantes qui présentent des résultats de la reconstruction en $1d$, le coefficient exact que nous voulons récupérer est représenté par une ligne rouge, tandis que le coefficient récupéré par l'algorithme est représenté par une ligne pointillée ou des croix noires. Dans les figures en $2d$, les échelles de couleur ou de gris sont toujours similaires pour le coefficient exact et celui récupéré. Les valeurs numériques utilisées dans les exemples de la Section 2.2 sont rassemblées dans le Tableau 2.1.

Simulations à partir de données sans bruit

Les résultats successifs à chaque itération de l'Algorithme 2.1 dans le cas de la reconstruction du potentiel $p_*(x) = \sin(2\pi x)$ sont présentés sur la Figure 2.6. On peut observer qu'en moins de 3 itérations, le critère de convergence (2.10) pour $\epsilon = 10^{-5}$ est atteint.

En utilisant le même potentiel cible, la Figure 2.7 illustre le processus progressif sur la première itération de l'algorithme. A partir d'une donnée initiale $p_0^0 = 0$, nous représentons successivement

$$p_0^i = p_0^{i-1} + \frac{\partial_t Z_i(0)}{u_0}, \quad 1 \leq i \leq N = 5, \quad (2.12)$$

L	f	g	u_0	u_1	x_0	β	T	s	m	CFL
1	0	2	$2 + \sin(\pi x)$	0	-0.3	0.99	1.3	100	3	1

Tableau 2.1 – Valeurs numériques utilisées pour tous les exemples de reconstruction 1d par l’Algorithme 2.1.

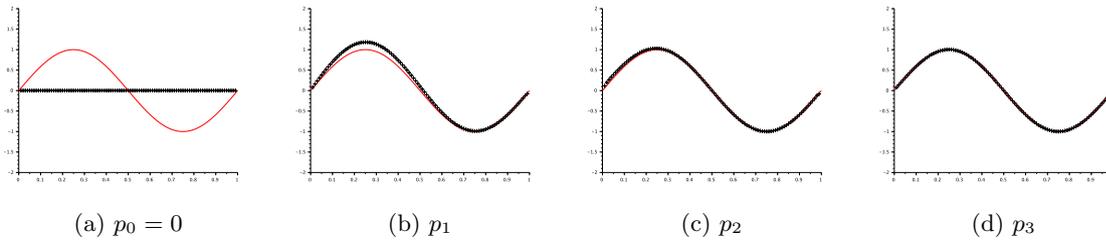


Figure 2.6 – Illustration de la convergence de l’Algorithme 2.1 dans le cas d’un potentiel $p_*(x) = \sin(2\pi x)$.

où Z_i est le minimiseur de $\tilde{J}[0]$ associé aux mesures μ_i .

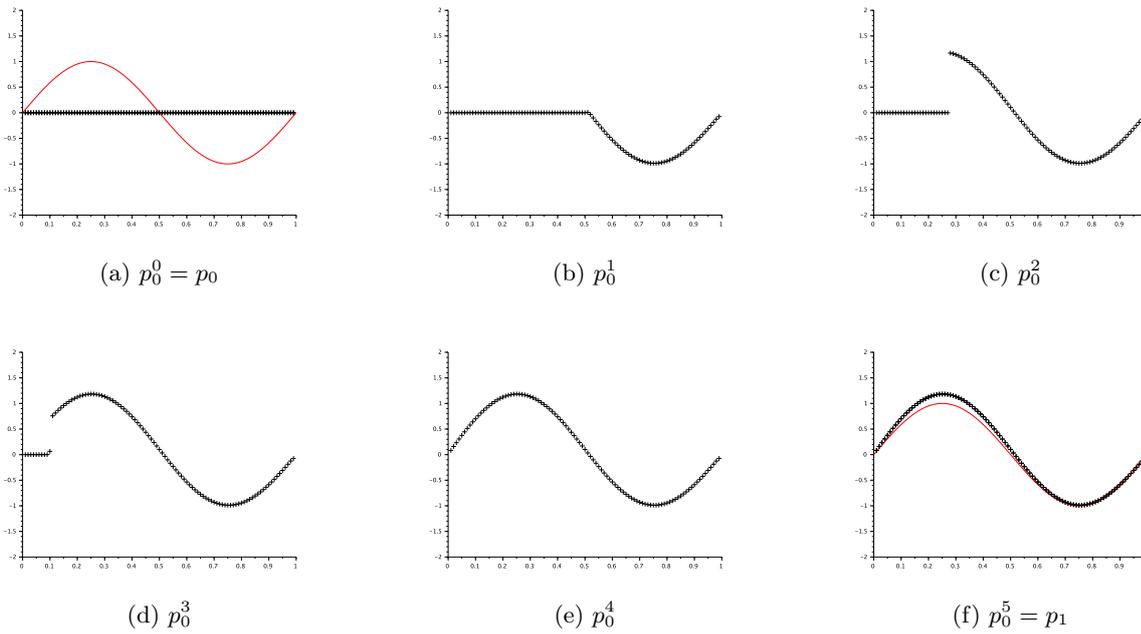


Figure 2.7 – Illustration du processus progressif défini en (2.12) mis en oeuvre à l’Etape 3 de l’Algorithme 2.1 pour $p_*(x) = \sin(2\pi x)$.

Sur la Figure 2.8, divers exemples de reconstruction du potentiel en l’absence de bruit sont présentés. En particulier, l’exemple Figure 2.8 (d) (où l’Algorithme 2.1 est initialisé par $p_0 = 10$) permet d’illustrer le caractère global de la convergence de la méthode. Ce résultat est bien sûr à mettre en regard avec celui obtenu à la Figure 2.2 qui avait permis de mettre en défaut la résolution du problème inverse par moindres carrés.

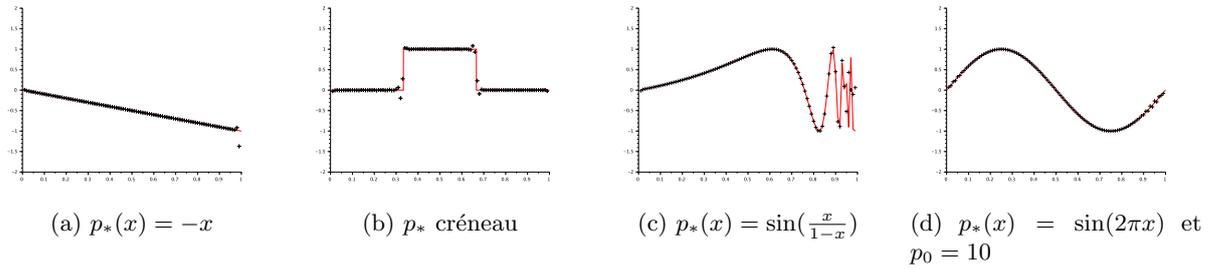
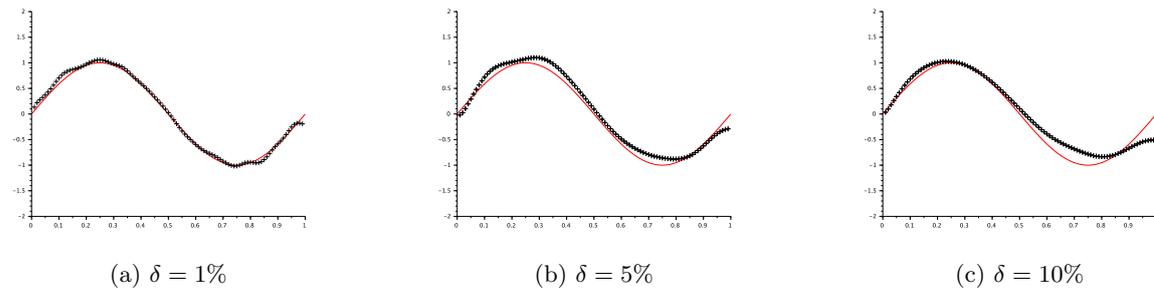


Figure 2.8 – Différents exemples de reconstruction de potentiel par l’Algorithme 2.1.

Simulations avec plusieurs niveaux de bruit

La Figure 2.9 présente les résultats pour $p_*(x) = \sin(2\pi x)$ associés à différents niveaux de bruit dans les mesures ($\delta = 1\%$, 5% et 10% respectivement).

Figure 2.9 – Récupération par l’Algorithme 2.1 du potentiel $p_*(x) = \sin(2\pi x)$ en présence de bruit dans les données. Le niveau de bruit est noté δ .

Mauvais choix des paramètres

Nous rappelons que dans notre approche, il est nécessaire de connaître la borne *a priori* m telle que $p_* \in L_{\leq m}^\infty(\mathbb{R})$. Sur la Figure 2.10, nous illustrons le comportement de l’Algorithme 2.1 dans le cas où une erreur serait faite sur cette borne. On observe que la récupération du potentiel est correcte seulement dans les zones où le potentiel exact p_* est effectivement borné par m . Dans cette situation, la convergence de la procédure n’a pas lieu et le potentiel récupéré rencontre la valeur limite m en plusieurs points, ce qui est un bon indicateur d’erreur. Dans ce cas, il est simplement recommandé de recommencer la procédure après avoir choisi une valeur plus élevée pour m .

Enfin, la Figure 2.11 (a) montre un exemple de résultat obtenu lorsque la fonction est discrétisée sans tenir compte des termes supplémentaires requis pour sa coercivité uniforme par rapport au maillage. Dès la première itération, de fortes oscillations se produisent et s’amplifient avec le processus itératif, qui ne converge tout simplement pas. En (b), nous illustrons la nécessité de choisir un pas de discrétisation spatial Δx suffisamment petit par rapport à la valeur du paramètre s . Là encore, si la taille du maillage est trop grossière, des instabilités numériques apparaissent et le processus ne converge pas.

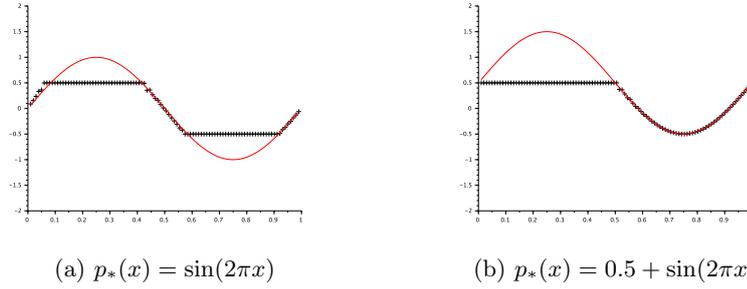


Figure 2.10 – Reconstruction par l’Algorithme 2.1 de potentiels dans le cas d’un mauvais choix sur la borne *a priori* $m = 0.5$.

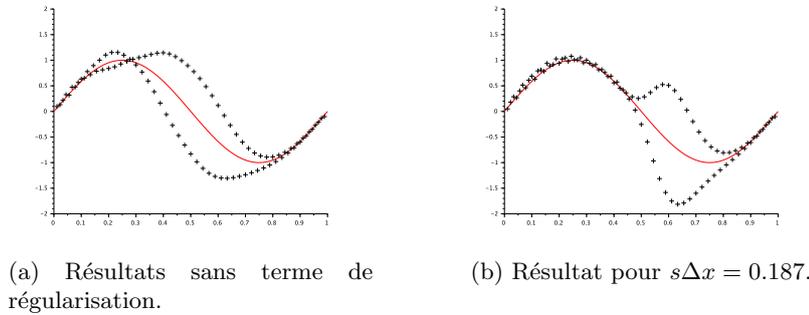


Figure 2.11 – Première itération de l’Algorithme 2.1 : (a) Illustration de la nécessité du terme de régularisation supplémentaire (2.9). (b) Illustration de la condition nécessaire entre s et le pas d’espace Δx .

Jusqu’à présent, nous avons présenté des simulations numériques dans lesquelles l’hypothèse de positivité (H1d) sur u_0 était satisfaite. A titre d’exemple, considérons alors

$$u_0(x) = -a + x, \quad a \in (0, L),$$

qui s’annule à $x = a$ en un seul point isolé. Dans ce cas (voir Figure 2.12), la reconstruction est satisfaisante en dehors d’un petit voisinage de $x = a$.

Simulations en deux dimensions d’espace

Nous avons également effectué quelques reconstructions en deux dimensions où $\Omega = [0, 1]^2$, $x_0 = (-0.3, -0.3)$, $\Gamma_0 = \{x_1 = 1\} \cup \{x_2 = 1\}$, $u_0(x_1, x_2) = 2 + \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2)$, $u_1 = 0$, $f = 0$, $g = 2$, $\beta = 0.99$, $m = 2$ et $CFL = 0.5 \leq \sqrt{2}/2$. La Figure 2.13 présente les résultats obtenus pour trois potentiels différents. Nous avons pris $s = 3$ et ne pouvons pas le prendre plus grand. En effet, diminuer le pas d’espace Δx afin de s’assurer que $s\Delta x$ reste petit conduit à de grands systèmes qui épuisent assez rapidement la mémoire de calcul.

Les sections suivantes présentent l’application de la méthode C-bRec à deux exemples. Le premier est la récupération de la vitesse dans une équation des ondes. Dans ce cas, nous verrons que l’Etape 3 de l’algorithme, celle de la mise à jour de la variable de récurrence p_k , ne peut plus prendre une forme aussi explicite. Il faudra résoudre un deuxième problème inverse sous-jacent, sous la forme de la minimisation d’une seconde fonctionnelle (2.17). Dans la dernière

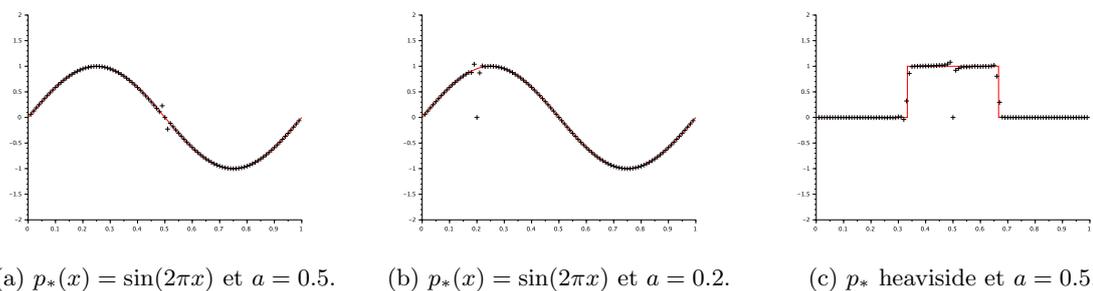
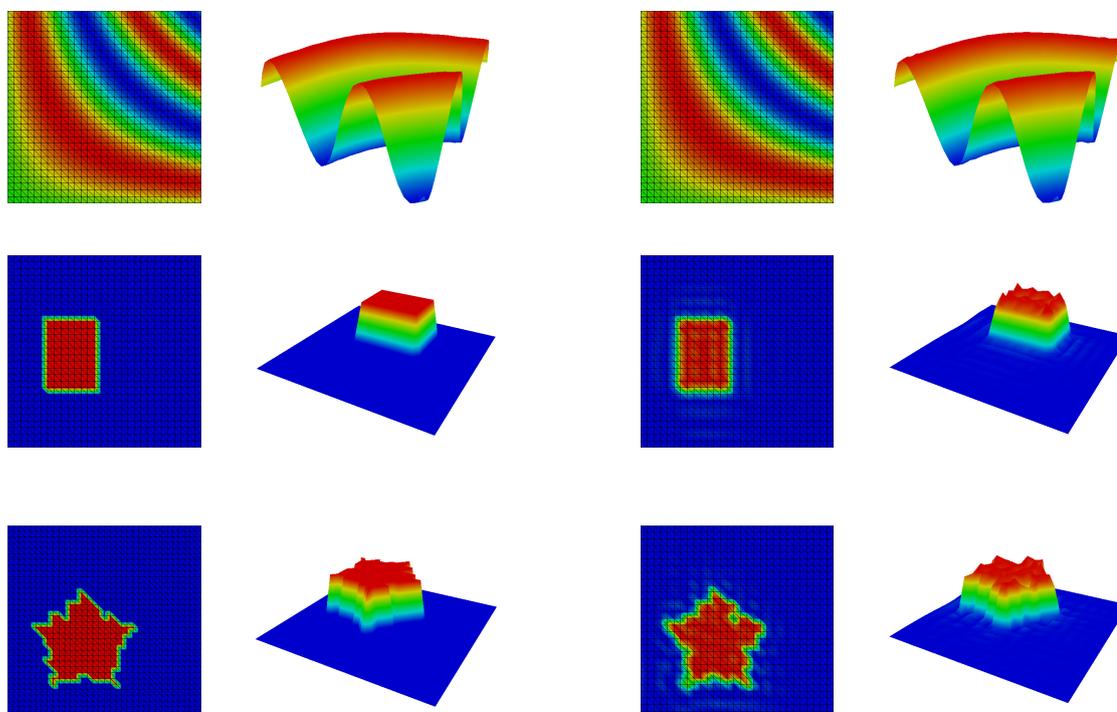


Figure 2.12 – Reconstructions par l’Algorithme 2.1 pour $u_0(x) = -a + x$ qui ne satisfait pas l’hypothèse de positivité (H1d).



(a) Potentiels exacts.

(b) Potentiels récupérés numériquement.

Figure 2.13 – Divers exemples de reconstruction de potentiels en $2d$ par l’Algorithme 2.1.

section, nous nous intéresserons au problème de récupération de la source dans une équation de réaction-diffusion. Cet exemple sera l’occasion de montrer que la méthode C-bRec se généralise sans trop de difficulté à un opérateur parabolique. Par contre, nous verrons que la présence des non-linéarités de l’équation nous oblige à modifier l’approche. De nombreuses étapes dans la mise en oeuvre de ces exemples sont similaires à celles présentées dans la section ci-dessus (génération des données, gestion du bruit, discrétisation, minimisation...) aussi je ne les expliciterai pas à nouveau et me concentrerai sur les spécificités liées à ces nouveaux exemples.

2.3 Application à la récupération de la vitesse dans l'équation des ondes

Dans cette section, nous nous intéressons à la récupération de la vitesse dans une équation des ondes. Ce problème inverse est nettement plus complexe car le paramètre inconnu est imbriqué dans l'opérateur principal, mais il présente un réel intérêt du point de vue des applications

2.3.1 Le problème inverse

Soit Ω un domaine borné régulier de \mathbb{R}^n , $n \geq 1$, et $T > 0$. Nous considérons l'équation des ondes à vitesse variable

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \nabla \cdot (p(x) \nabla u) = f, & \text{dans } (0, T) \times \Omega, \\ u = g, & \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega, \\ u(0) = u_0, \quad \partial_t u(0) = u_1, & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (2.13)$$

Comme précédemment, le problème direct est bien posé

Théorème 2.7 (Lasiocka-Lions-Triggiani [2-31]). *Si on suppose que $p \in W^{1,\infty}(\Omega)$ avec $\inf_{x \in \Omega} p(x) \geq \alpha_0 > 0$, $f \in L^1(0, T; L^2(\Omega))$ et $g \in H^1((0, T) \times \partial\Omega)$, $(u_0, u_1) \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ avec $u_0(x) = g(0, x)$ pour $x \in \partial\Omega$. Alors, le système (2.13) admet une unique solution*

$$u \in C^0(0, T; H^1(\Omega)) \cap C^1(0, T; L^2(\Omega)).$$

De plus, $\partial_\nu u \in L^2((0, T) \times \partial\Omega)$.

Ce résultat fournit en particulier la régularité nécessaire sur les données pour que les différentes fonctionnelles soient bien définies. Le problème inverse qui nous intéresse s'énonce alors :

Connaissant les termes sources (f, g) et les données initiales (u_0, u_1) , peut-on déterminer le carré de la vitesse $p_*(x)$, pour x dans Ω , à partir de la connaissance additionnelle du flux

$$d_* := \partial_\nu u[p_*], \quad \text{sur } (0, T) \times \Gamma_0,$$

où Γ_0 est une partie de $\partial\Omega$?

Concernant ce problème inverse, le résultat de stabilité Lipschitz associé est le suivant :

Théorème 2.8 (dédit de Imanuvilov-Yamamoto [2-19], Klivanov-Yamamoto [2-28]). *On suppose que*

(H2a) *Condition géométrique : $\exists x_0 \notin \bar{\Omega}$ tel que $\Gamma_0 \supset \{x \in \partial\Omega, (x - x_0) \cdot \nu(x) \geq 0\}$,*

(H2b) *Condition de temps : pour un certain $\beta > 0$ donné,*

$$T > \frac{\sup_{x \in \Omega} |x - x_0|}{\sqrt{\beta}},$$

(H2c) *Hypothèse de régularité : $u \in H^2(0, T; W^{2,\infty}(\Omega))$.*

(H2d) *Conditions initiales : $u_1 = 0$ et $u_0 \in W^{3,\infty}(\Omega)$ avec*

$$\inf_{x \in \Omega} |\nabla u_0(x) \cdot (x - x_0)| \geq r_0 > 0.$$

Alors il existe une constante positive C telle que pour tout p et p_* dans \mathcal{V} , on ait :

$$\|p - p_*\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \|\partial_\nu u[p] - \partial_\nu u[p_*]\|_{H^2(0,T;L^2(\Gamma_0))},$$

où l'ensemble admissible \mathcal{V} est défini par

$$\mathcal{V} = \left\{ \begin{array}{l} p \in W^{1,\infty}(\Omega), \quad \nabla \cdot (p \nabla u_0) \in H^1(\Omega), \\ \|\nabla p\|_{L^\infty(\Omega)} \leq m, \quad 0 < \alpha_0 \leq \inf_{\Omega} p \leq \sup_{\Omega} p \leq \alpha_1, \\ p|_{\partial\Omega} = a, \quad \nabla p \cdot \nabla u_0|_{\partial\Omega} = b, \\ \nabla p(x) \cdot (x - x_0) \leq 2(1 - \rho)p(x) \text{ pour } x \in \Omega, \end{array} \right\}. \quad (2.14)$$

Remarquez que l'hypothèse selon laquelle p et p_* sont dans \mathcal{V} implique que l'on suppose connu *a priori* un certain nombre d'informations sur la vitesse exacte p_* , par exemple l'existence de bornes $m > 0$, $0 < \alpha_0 < \alpha_1$ et $\rho \in]0, 1[$, mais également les valeurs de $a = p_*|_{\partial\Omega}$ et $b = \nabla p_* \cdot \nabla u_0$. Le paramètre β qui apparait dans (H2b) dépend en particulier de α_0 et de m .

2.3.2 L'algorithme C-bRec

L'idée de l'algorithme dans le cas de la récupération de la vitesse dans l'équation des ondes (2.13) est assez semblable à celle dans le cas du potentiel (2.1). Elle commence par l'application de la méthode de Bukhgeim et Klibanov. Ainsi, pour un $p_k \in \mathcal{V}$, nous introduisons $v = \eta(\varphi) \partial_t^2 (u[p_k] - u[p_*])$, où η est définie en (2.8), qui est solution de

$$\begin{cases} \partial_t^2 v - \nabla \cdot (p_k \nabla v) = h, & \text{dans } (0, T) \times \Omega, \\ v = 0, & \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega, \\ v(0) = \nabla \cdot ((p_k - p_*) \nabla u_0), \quad \partial_t v(0) = 0, & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (2.15)$$

avec

$$h := \eta(\varphi) \nabla \cdot ((p_k - p_*) \nabla \partial_t^2 u[p_*]) + [\eta(\varphi), \partial_t^2 - \nabla \cdot (p_k \nabla)] \partial_t^2 (u[p_k] - u[p_*]).$$

Et on pose

$$\tilde{\mu} := \partial_\nu v = \eta(\varphi) \partial_t^2 (\partial_\nu u[p_k] - d_*), \text{ sur } (0, T) \times \Gamma_0.$$

On remarque que

— v est l'unique minimiseur de

$$\begin{aligned} J[h](z) &= \int_0^T \int_{\Omega} e^{2s\varphi} |\partial_t^2 z - \nabla \cdot (p_k \nabla z) - h|^2 dx dt + s \int_0^T \int_{\Gamma_0} e^{2s\varphi} |\partial_\nu z - \tilde{\mu}|^2 d\gamma dt \\ &+ s \iint_{\{\varphi < 0\}} e^{2s\varphi} (|\partial_t z|^2 + |\nabla z|^2 + s^2 |z|^2) dx dt + s \int_{\Omega} e^{2s\varphi(T)} (\partial_t z(T)^2 + |\nabla z(T)|^2 + s^2 z(T)^2) dx, \end{aligned} \quad (2.16)$$

sur l'espace $\mathcal{T} = \{z \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \partial_t^2 z - \nabla \cdot (p_k \nabla z) \in L^2((0, T) \times \Omega), \partial_\nu z \in L^2((0, T) \times \partial\Omega), \partial_t z(0) = 0\}$.

— et que p_* est l'unique minimiseur de

$$K[v](p) = \int_{\Omega} e^{2s\varphi(0)} |\nabla \cdot ((p_k - p) \nabla u_0) - v(0)|^2 dx, \quad (2.17)$$

sur l'espace \mathcal{V} , compte-tenu de la donnée initiale en déplacement du système (2.15).

$$\begin{array}{ccc} h & \xrightarrow{\inf_{\mathcal{T}} J[h]} & v & \xrightarrow{\inf_{\mathcal{V}} K[v]} & p_* \\ 0 & \xrightarrow{\inf_{\mathcal{T}} J[0]} & Z & \xrightarrow{\inf_{\mathcal{V}} K[Z]} & p_{k+1} \end{array}$$

Figure 2.14 – Schéma de fonctionnement de la méthode C-bRec dans le cas de la récupération de la vitesse dans l'équation des ondes (2.13).

Le fait que les fonctionnelles en question admettent un unique minimiseur est garanti par le Lemme ci-dessous, qui est une conséquence immédiate des inégalités de Carleman de Klibanov-Timonov [2-27] pour l'équation des ondes et de Klibanov-Yamamoto [2-28] pour une équation hyperbolique d'ordre 1.

Lemme 2.9. *Supposons que (H2a)-(H2b)-(H2d) sont satisfaites, que $p \in \mathcal{V}$ et*

(H1f) $\varphi(t, x) = |x - x_0|^2 - \beta t^2$, pour β donné en (H2b).

Alors, pour tout $s > 0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, les fonctionnelles $J[h]$ et $K[v]$ sont quadratiques, continues, strictement convexes et coercives sur \mathcal{T} et \mathcal{V} respectivement, munis de normes pondérées adéquates.

L'idée est alors simplement de poser p_{k+1} comme l'unique minimiseur de $K[Z]$ définie en (2.17), où Z est l'unique minimiseur de $J[0]$ définie en (2.16) pour $h = 0$. Ce mécanisme est illustré sur la Figure 2.14. L'algorithme est finalement le suivant :

Algorithme 2.2

Initialisation : Choisir n'importe quel $p_0 \in \mathcal{V}$.

Itération : Connaissant $p_k \in \mathcal{V}$,

1. Calculer $u[p_k]$ solution de

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \nabla \cdot (p_k(x) \nabla u) = f, & \text{dans } (0, T) \times \Omega, \\ u = g, & \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega, \\ u(0) = u_0, \quad \partial_t u(0) = u_1, & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

et poser $\tilde{\mu} = \eta(\varphi) \partial_t^2 (\partial_\nu u[p_k] - d_*)$ sur $(0, T) \times \Gamma_0$.

2. Minimiser la fonctionnelle

$$\begin{aligned} J[0](z) &= \int_0^T \int_{\Omega} e^{2s\varphi} |\partial_t^2 z - \nabla \cdot (p_k \nabla z)|^2 dx dt + s \int_0^T \int_{\Gamma_0} e^{2s\varphi} |\partial_\nu z - \tilde{\mu}|^2 d\gamma dt \\ &+ s \iint_{\{\varphi < 0\}} e^{2s\varphi} (|\partial_t z|^2 + |\nabla z|^2 + s^2 |z|^2) dx dt + s \int_{\Omega} e^{2s\varphi(T)} (\partial_t z(T)^2 + |\nabla z(T)|^2 + s^2 z(T)^2) dx, \end{aligned}$$

sur l'espace \mathcal{T} et noter Z son unique minimiseur.

3. Minimiser la fonctionnelle

$$K[Z](p) = \int_{\Omega} e^{2s\varphi(0)} |\nabla (\nabla \cdot ((p_k - p) \nabla u_0) - Z(0))|^2 dx,$$

sur l'espace \mathcal{V} et noter p_{k+1} son unique minimiseur.

La convergence globale dans \mathcal{V} de l'Algorithme 2.2 est garantie par le résultat suivant :

Théorème 2.10. *Supposons que (H2a)-(H2b)-(H2c)-(H2d)-(H1f) sont satisfaites et que $p_* \in \mathcal{V}$. Alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout s suffisamment grand et pour tout $k \in \mathbb{N}$*

$$\|p_{k+1} - p_*\|_s^2 \leq \frac{C}{\inf\{s^2, e^{2s \inf_{\Omega}(\varphi(0)-\varepsilon)}\}} \|p_k - p_*\|_s^2,$$

où ε est celui de la définition (2.8). En particulier, pour s suffisamment grand, la suite $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge fortement vers p_* lorsque $k \rightarrow \infty$ dans la norme

$$\|\delta p\|_s = \sqrt{\int_{\Omega} e^{2s\varphi(0)} (s^2 |\nabla \delta p|^2 + s^4 \delta p^2 + |\nabla(\nabla \cdot (\delta p \nabla u_0))|^2) dx.} \quad (2.18)$$

2.3.3 Résultats numériques

L'initialisation de l'algorithme consiste à exhiber un coefficient p_0 se situant dans la classe \mathcal{V} . C'est un ensemble fermé et convexe de $\mathcal{C} = \{p \in H^1(\Omega), \nabla \cdot (p \nabla u_0) \in H^1(\Omega), p = a \text{ et } \nabla p \cdot \nabla u_0 = b \text{ sur } \partial\Omega\}$ pour la topologie induite par la norme $\|\cdot\|_s$ définie en (2.18). En pratique, nous prenons p_0 comme minimiseur de la fonctionnelle

$$K_{init}(p) = \int_{\Omega} e^{2s\varphi} |\nabla(\nabla \cdot (p \nabla u_0))|^2 dx, \quad (2.19)$$

parmi tous les $p \in \mathcal{C}$. Notez que rien ne garantit que p_0 appartienne à la classe \mathcal{V} , en particulier en ce qui concerne la condition

$$\nabla p(x) \cdot (x - x_0) \leq 2(1 - \rho)p(x) \text{ pour } x \in \Omega,$$

que nous ne vérifions que numériquement à chaque itération.

Le Tableau 2.2 rassemble les valeurs numériques utilisées pour tous les exemples de la Section 2.3. Les informations de convergence (nombre d'itérations, temps de calcul, erreur de convergence) sont indiquées dans le Tableau 2.3.

L	N_x	u_0	g	s	x_0	ε
1	$200L$	x	$x \cos(\pi t)$	10	-0.3	x_0^2
Γ_0	ϵ	N	α_0	α_1	T	N_t
$\{x = L\}$	$1 \cdot 10^{-3}$	1	$0.95 \min(p_*)$	$\max(p_*)/0.95$	donné par (H2b)	selon CFL

Tableau 2.2 – Valeurs numériques des variables utilisées pour tous les exemples numériques d'utilisation de l'Algorithme 2.2 dans le cadre 1d.

Simulations à partir de données sans bruit

Dans cette sous-section, plusieurs résultats de reconstruction obtenus en l'absence de bruit sont présentés. La Figure 2.15 montre l'évolution du coefficient récupéré p_k à chaque itération k du processus de convergence et en dessous le résultat final p_{∞} superposé avec la solution exacte p_* .

Exemple	# itérations	Temps de calcul en s	err _p
Figure 2.15 (a)	4	405	$2 \cdot 10^{-4}$
Figure 2.15 (b)	4	320	$6 \cdot 10^{-4}$
Figure 2.15 (c)	4	264	$1 \cdot 10^{-3}$
Figure 2.17 (a)	4	422	$3 \cdot 10^{-3}$
Figure 2.17 (b)	4	498	$5 \cdot 10^{-3}$
Figure 2.17 (c)	4	478	$9 \cdot 10^{-3}$
Figure 2.19 haut	3	1514	$4 \cdot 10^{-3}$
Figure 2.19 bas	4	1785	$3 \cdot 10^{-3}$

Tableau 2.3 – Résultats de convergence des cas tests. On peut observer que dans tous les cas, le critère de convergence (2.10) pour $\epsilon = 1 \cdot 10^{-3}$ est atteint en moins de 4 itérations. L’Algorithme 2.2 s’exécute sur un ordinateur portable personnel en quelques minutes. L’erreur finale err_p montre l’efficacité de la reconstruction.

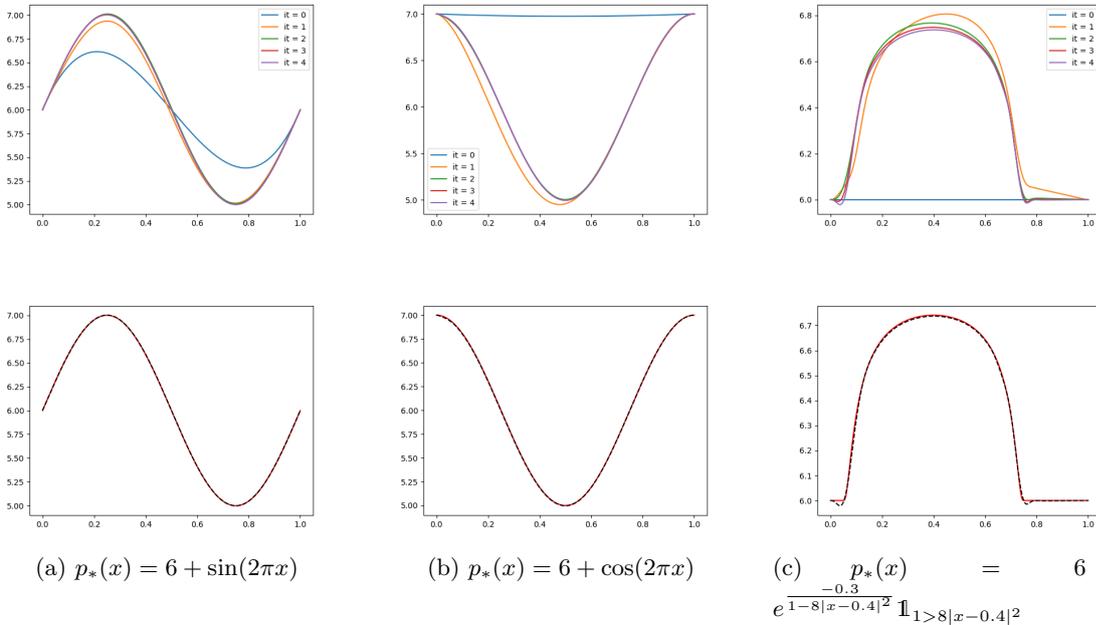


Figure 2.15 – Première ligne : Historique de la convergence du processus de reconstruction par l’Algorithme 2.2. La ligne bleue est la donnée initiale p_0 calculée par la minimisation de K_{init} (2.19). Dans le cas (c), elle est égale au coefficient constant $p_0 = 6$ et ne contient aucune information concernant la position de la bosse. On remarque qu’à la première itération (ligne orange), la reconstruction est déjà très proche de la solution exacte. Deuxième ligne : résultats de la reconstruction finale pour trois exemples différents appartenant à \mathcal{V} .

Simulations avec plusieurs niveaux de bruit

Dans les applications que nous avons en tête, les données d’entrée pour le problème inverse sont directement la dérivée seconde en temps du flux $\partial_t^2 d_*$, mesuré grâce à un accéléromètre. La Figure 2.16 présente ainsi ces observations mesurées au point $x = L$ pendant l’intervalle de temps T dans le cas où la vitesse vaut $p_*(x) = 6 + \sin(2\pi x)$.

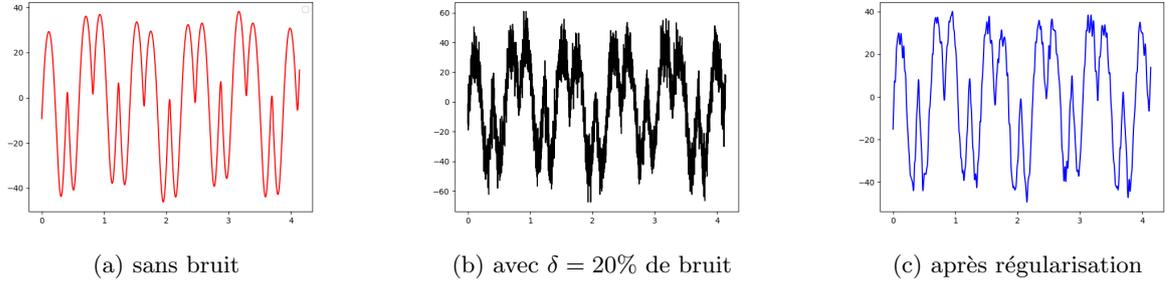


Figure 2.16 – Exemples d'observations $\partial_t^2 d_*(t)$ au point $x = L$ pour le coefficient $p_*(x) = 6 + \sin(2\pi x)$ obtenues avec l'équation (2.13). Nous montrons l'impact de l'ajout de bruit et le résultat obtenu après application du filtre passe-bas.

La Figure 2.17 montre les résultats obtenus par l'Algorithme 2.2 dans le cas où la vitesse vaut $p_*(x) = 6 + \sin(2\pi x)$ avec différents niveaux de bruit ($\delta = 5\%$, 10% et 20%) appliqués directement à $\partial_t^2 d_*$.

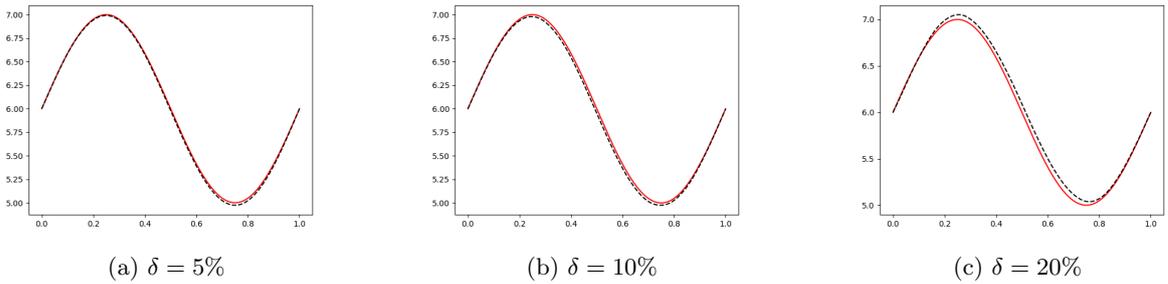


Figure 2.17 – Récupération du coefficient $p_*(x) = 6 + \sin(2\pi x)$ par l'Algorithme 2.2 en présence de bruit dans les données.

Mauvais choix des paramètres

La Figure 2.18 présente plusieurs résultats de reconstruction lorsque certaines hypothèses ne sont pas satisfaites. Dans la première colonne, le temps d'observation est pris égal au temps physique intuitif $T = \frac{L}{\sqrt{\alpha_0}}$, correspondant au temps nécessaire à l'onde la plus lente (celle qui se déplace à la vitesse $\sqrt{\alpha_0}$) pour atteindre la zone d'observation $\{x = L\}$ même si elle part du côté opposé du domaine $\{x = 0\}$. Dans ce cas, la reconstruction est aussi précise que celle obtenue avec le temps beaucoup plus important donné par (H2b). Ensuite, dans la deuxième colonne, nous essayons la même reconstruction mais avec un temps plus court $T = 0,8 \frac{L}{\sqrt{\alpha_0}}$. Dans ce cas, le résultat commence à se détériorer près de la frontière $\{x = 0\}$. Cela illustre le fait que le temps minimal pour obtenir la convergence de l'algorithme est très probablement $\frac{L}{\sqrt{\alpha_0}}$, au lieu de la condition de temps plus restrictive (H2b).

Dans la dernière colonne de la Figure 2.18, nous traçons également les résultats donnés par l'Algorithme 2.2 lorsque le coefficient exact à récupérer ne satisfait pas la condition (2.14) pour un $\rho > 0$. Dans ce cas, nous choisissons un temps très grand $T = L/0.01$. Les expériences

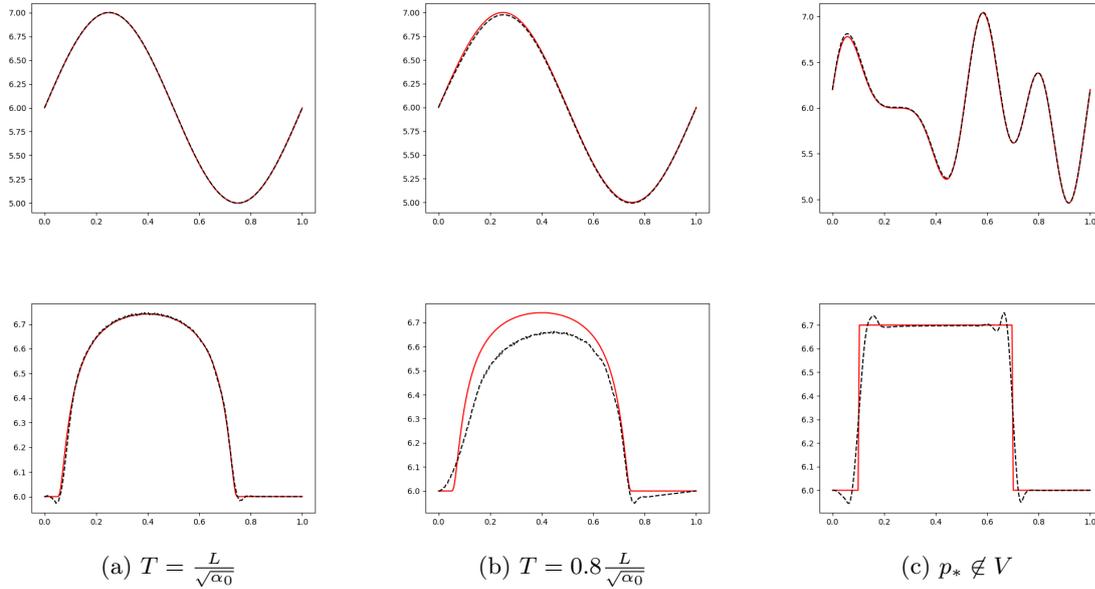


Figure 2.18 – Quelques exemples de reconstruction de vitesses par l’Algorithme 2.2 lorsqu’une hypothèse du Théorème 2.10 n’est pas satisfaite. (a)(b) Le temps d’observation est plus petit que le temps minimal donné dans (H2b). (c) Le coefficient exact p_* n’est pas dans V car il ne remplit pas la condition (2.14) pour un $\rho > 0$.

numériques dans le cas $1d$ semblent indiquer une bonne convergence de l’algorithme, bien que nous ne sachions pas fournir de preuve de convergence dans ce cas. En dimension 2, nous avons trouvé quelques exemples de vitesse (typiquement de la forme $p_*(x) = |x - x_0|^4$), qui ne satisfont pas (2.14) et pour lesquels l’algorithme ne converge pas. Cette dichotomie entre le cas $1d$ et le cas $2d$ est prévisible car la géométrie est beaucoup plus complexe en dimension supérieure ou égale à deux : en particulier, il peut y avoir des rayons suivant les lois de l’optique géométrique qui n’atteindront jamais la zone d’observation, violant alors l’inégalité d’observabilité

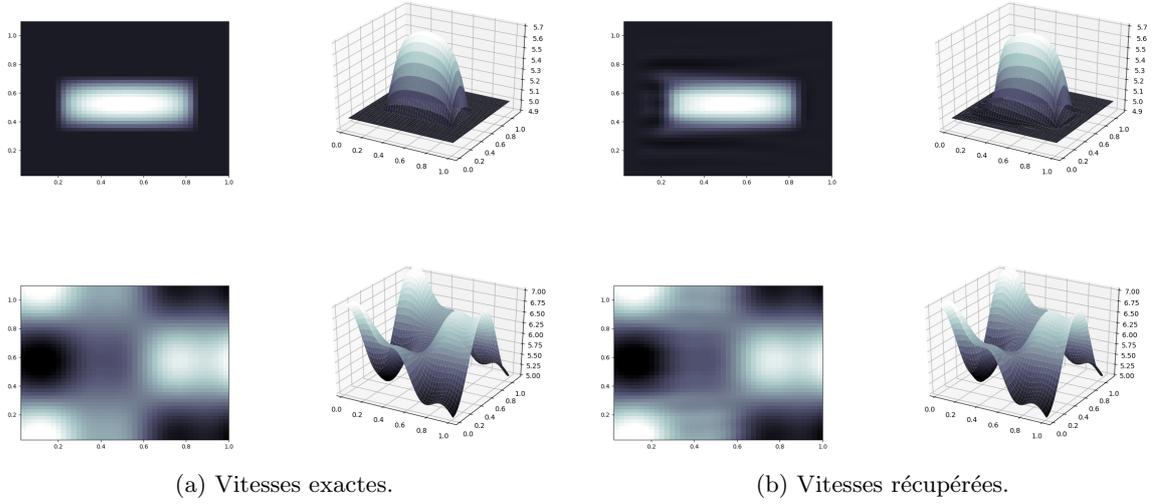
Simulations en deux dimensions d’espace

Nous avons également effectué quelques reconstructions dans $\Omega = [0, 1] \times [0, 1.1]$, discrétisé avec 40 points dans chaque direction, $x_0 = (-0.3, 0.55)$, $s = 5$ et $\Gamma_0 = \{x_2 = 0\} \cup \{x_1 = 1\} \cup \{x_2 = 1.1\}$. La Figure 2.19 présente les résultats obtenus pour deux coefficients différents p_* en l’absence de bruit.

2.4 Application à une équation de réaction-diffusion

Dans cette partie, nous nous intéressons à un problème inverse de récupération du terme source dans une équation de réaction-diffusion. Concernant les applications, ce modèle représente l’évolution d’un polluant dans l’atmosphère et nous cherchons à localiser la source de ce polluant. Cet exemple est l’occasion de décliner la méthode C-bRec dans le cas d’une équation parabolique. Mais ici la difficulté majeure est surtout liée à la non linéarité de l’équation.

En particulier, les propriétés de convexité forte de la fonctionnelle J sont restreintes à des espaces bornés, voir Lemme 2.14 ci-après. De plus, l’opérateur qui apparaît dans la fonctionnelle

Figure 2.19 – Deux exemples en $2d$ de reconstruction de la vitesse par l’Algorithme 2.2.

doit être modifié en ajoutant des opérateurs de troncature (2.30) pour borner les termes non linéaires dans la preuve de convergence de l’algorithme. Enfin, contrairement aux problèmes traités dans les sections précédentes où l’EDP était linéaire, l’introduction de la variable conjuguée $e^{s\varphi}z$ ne permet pas de s’affranchir de la présence des termes exponentiels.

2.4.1 Le problème inverse

Soit Ω un domaine borné régulier de \mathbb{R}^n pour $n \geq 1$ et $T > 0$. Nous considérons l’équation de réaction-diffusion suivante

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + u^3 = p(x)f, & \text{dans } (0, T) \times \Omega, \\ u = g, & \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega, \\ u(0) = u_0, & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (2.20)$$

Pour ce problème direct, nous pouvons montrer le résultat de régularité suivant :

Théorème 2.11. *Supposons que $u_0 \in H^3(\Omega)$, $p \in L^\infty(\Omega)$, $f \in H^1(0, T; L^2(\Omega))$ et $g \in H^1(0, T; H^{3/2}(\partial\Omega)) \cap H^2(0, T; H^{1/2}(\partial\Omega))$. De plus, nous supposons que $f(0) = 0$ dans Ω . Alors la solution u de (2.20) appartient à*

$$u \in C^1(0, T; H^1(\Omega)) \cap H^2(0, T; L^2(\Omega)) \cap H^1(0, T; H^2(\Omega)),$$

avec l’estimation

$$\|u\|_{C^1(0, T; H^1(\Omega))} + \|u\|_{H^2(0, T; L^2(\Omega))} + \|u\|_{H^1(0, T; H^2(\Omega))} \leq M \quad (2.21)$$

où M dépend de T , Ω , m et des normes de u_0 , f et g .

Nous supposons que la donnée initiale u_0 , la condition de Dirichlet g et la fonction f sont connues et nous cherchons à reconstruire la source exacte p_* , supposée ne dépendre que de l’espace. Pour identifier cette inconnue, nous avons accès à deux types de mesures, celle du flux

de la solution sur une partie du bord du domaine et celle de la solution dans tout le domaine à un instant donné :

$$\begin{cases} d_* := \partial_\nu u[p_*], & \text{sur } (0, T) \times \Gamma_0, \\ r_* := u[p_*](T_0), & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (2.22)$$

où $\Gamma_0 \subset \partial\Omega$ et $T_0 \in (0, T)$.

Pour ce problème, en suivant la méthode de Bukhgeim-Klibanov [2-12] et grâce à une inégalité de Carleman que nous montrons pour cet opérateur, nous prouvons le résultat de stabilité Lipschitz suivant :

Théorème 2.12. *Nous supposons que*

$$(H3a) \quad u_0 \in H^3(\Omega) \text{ et } g \in H^1(0, T; H^{3/2}(\partial\Omega)) \cap H^2(0, T; H^{1/2}(\partial\Omega)),$$

$$(H3b) \quad f \in H^1(0, T; L^\infty(\Omega)), \quad f(0) = 0 \text{ dans } \Omega, \text{ et}$$

$$|f(T_0)| \geq \alpha > 0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (2.23)$$

Alors, pour $m > 0$ fixé, il existe $C > 0$ telle que pour tous p et p_* dans $L_m^\infty(\Omega)$ on ait l'inégalité :

$$\|p - p_*\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\|u[p](T_0) - u[p_*](T_0)\|_{H^2(\Omega)} + \|\partial_\nu u[p] - \partial_\nu u[p_*]\|_{H^1(0, T; L^2(\Gamma_0))} \right).$$

2.4.2 Une inégalité de Carleman pour la chaleur

Sans perte de généralité, nous supposons que $T_0 = \frac{T}{2}$. Dans cette section, nous énonçons une inégalité de Carleman pour l'équation de la chaleur dans le cas de nouveaux poids qui ne dépendent que d'une seule exponentielle.

Théorème 2.13. *Nous supposons que*

(H3c) *Condition géométrique :*

$$\exists x_0 \notin \bar{\Omega} \text{ tel que } \Gamma_0 \supset \{x \in \partial\Omega, (x - x_0) \cdot \nu(x) \geq 0\},$$

(H3d) *Définition des poids :*

$$\varphi(t, x) = \psi(x)\theta(t) \quad \text{avec} \quad \psi(x) = |x - x_0|^2 - 2 \sup_{x \in \bar{\Omega}} |x - x_0|^2, \quad (2.24)$$

et

$$\theta(t) = \frac{1}{t(T-t)} - \frac{1-\rho}{T_0^2}, \quad (2.25)$$

où ρ est une constante satisfaisant $0 < \rho < 1$.

Alors,

$$\begin{aligned} s \int_{\Omega} e^{2s\varphi(T_0)} |z(T_0)|^2 dx + \int_0^T \int_{\Omega} e^{2s\varphi} \left(\frac{1}{s\theta} |\partial_t z|^2 + \frac{1}{s\theta} |\Delta z|^2 + s\theta |\nabla z|^2 + s^3 \theta^3 |z|^2 \right) dx dt \\ \leq C \int_0^T \int_{\Omega} e^{2s\varphi} |\partial_t z - \Delta z|^2 dx dt + Cs \int_0^T \int_{\Gamma_0} e^{2s\varphi} \theta |\partial_\nu z|^2 d\gamma dt, \end{aligned} \quad (2.26)$$

pour tout $z \in H^1(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$.

Mentionnons que la partie spatiale ψ du poids de Carleman de (H3d) ressemble à celui utilisé dans les sections précédentes pour l'équation des ondes. De plus, la condition géométrique (H3c) qui est classique pour l'équation des ondes (voir Lions [2-33]) est non usuelle pour l'équation de la chaleur. Avec ces nouveaux poids, nous avons moins de flexibilité dans les calculs. Mais avec les poids classiquement utilisés pour l'équation de la chaleur (voir Yamamoto [2-39]), la présence de la double exponentielle dans la fonctionnelle à minimiser serait rédhibitoire dans la mise en oeuvre numérique.

2.4.3 L'algorithme C-bRec

Nous supposons que nous sommes à l'itération k de l'algorithme et que nous avons construit $p_k \in L_m^\infty(\Omega)$. Nous introduisons alors $w = u[p_k] - u[p_*]$ qui est solution de

$$\begin{cases} \partial_t w - \Delta w + wQ(w, u[p_k]) = (p_k - p_*)f, & \text{dans } (0, T) \times \Omega, \\ w = 0, & \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega, \\ w(0) = 0, & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (2.27)$$

où nous avons posé $Q(w, u) = 3u^2 + 3uw + w^2$. Dérivons maintenant cette équation par rapport au temps. Nous introduisons $v = \partial_t w$ qui satisfait

$$\begin{cases} \partial_t v - \Delta v + vQ(w, u[p_k]) + w\partial_t Q(w, u[p_k]) = h, & \text{dans } (0, T) \times \Omega, \\ v = 0, & \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega, \\ v(0) = 0, & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (2.28)$$

où $h = (p_k - p_*)\partial_t f$.

En suivant la même stratégie qu'à la Section 2.1.3 et compte-tenu de l'inégalité de Carleman du Théorème 2.13, nous introduisons la fonctionnelle $J[h]$ définie par

$$J[h](z) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Omega e^{2s\varphi} |Pz - h|^2 dxdt + \frac{s}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_0} e^{2s\varphi} \theta |\partial_\nu z - \mu|^2 d\gamma dt, \quad (2.29)$$

avec $\mu = \partial_\nu v$ et $Pz = \partial_t z - \Delta z + zQ(y_M, u[p_k]) + y_M \partial_t Q(y_M, u[p_k])$ où on a posé

$$y_M(t) = T_M \left(w(T_0) + \int_{T_0}^t z(t') dt' \right) \text{ dans } \Omega.$$

La fonction T_M est là pour assurer que les termes non linéaires de P sont bornés. Pour un $M > 0$ donné, elle est définie par

$$\begin{aligned} T_M : \quad \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ X &\longmapsto X\Phi \left(\frac{X}{M} \right), \end{aligned} \quad (2.30)$$

où $\Phi \in C_0^1(\mathbb{R})$ est telle que $0 \leq \Phi \leq 1$ et

$$\Phi(X) = \begin{cases} 1, & \text{si } |X| \leq 1, \\ 0, & \text{si } |X| \geq 2. \end{cases} \quad (2.31)$$

Le lemme suivant assure alors l'existence d'un minimiseur de $J[h]$ dans l'espace fonctionnel

$$\begin{aligned} E = \left\{ z : e^{s\varphi}(\partial_t z - \Delta z) \in L^2((0, T) \times \Omega), e^{s\varphi}\theta^{1/2}\nabla z \cdot n \in L^2((0, T) \times \Gamma_0), \right. \\ \left. e^{s\varphi}\theta^{3/2}z \in L^2((0, T) \times \Omega), e^{s\varphi}\theta^{-1/2}z \in H^1(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \right\}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Lemme 2.14. *On suppose que les hypothèses (H3a)-(H3b) sont satisfaites et que $p_k \in L_m^\infty(\Omega)$. Alors il existe $s_0 > 0$ tels que pour tous $s \geq s_0$, $J[h]$ admette un minimiseur global dans E . De plus, pour s suffisamment grand, $J[h]$ est strictement convexe dans*

$$E_C = \{z \in H^1(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)), \|z\|_{H^1(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^2(\Omega))} \leq C\}.$$

A cause des non linéarités de l'équation, la stricte convexité de $J[h]$ (et donc celle de $J[0]$) n'est établie que dans E_C où la borne permet de traiter les non linéarités. Contrairement à ce qui se passait dans les sections précédentes sur l'équation des ondes où les poids restaient loin de 0, ici les poids, comme c'est en général le cas pour l'équation de la chaleur, s'annulent en 0 et T et il n'est pas clair que le minimiseur de $J[h]$ dans E appartiendra bien à un E_C pour un certain $C > 0$. Par conséquent, il n'est pas possible de déduire l'unicité du minimiseur dans E à partir de la stricte convexité dans E_C .

Afin de garantir que v est bien un minimiseur de $J[h]$ dans E , nous choisissons pour M dans (2.30) la constante du Théorème 2.11 appliqué à w . Ainsi, on a bien $T_M(w) = w$ et $Pv = h$. Pour finir, il suffit de remarquer dans (2.27) que

$$v(T_0) = \partial_t w(T_0) = \Delta w(T_0) - w(T_0)Q[w, u[p_k]](T_0) + (p_k - p_*)f(T_0), \quad \text{dans } \Omega. \quad (2.33)$$

Ainsi, si $v(T_0)$ était connu, alors p_* pourrait être directement calculé, puisque nous supposons que $f(T_0)$ satisfait (2.23) et que les autres termes apparaissant dans (2.33) sont des observations données par (2.22). Néanmoins, puisque h dépend de p_* , v est inconnu. Alors, l'idée est d'utiliser Z obtenu au travers de la minimisation de $J[0]$ comme une approximation de v . Et nous sommes en mesure d'estimer l'écart entre Z et v en fonction de h .

L'algorithme consiste donc cette fois encore à construire une suite $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ qui se rapproche de l'inconnue p_* .

Algorithme 2.3

Initialisation Choisir n'importe quel $p_0 \in L_m^\infty(\Omega)$.

Itération Connaissant $p_k \in L_m^\infty(\Omega)$,

1. Calculer la solution $u[p_k]$ de

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + u^3 = p_k(x)f, & \text{dans } (0, T) \times \Omega, \\ u = g, & \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega, \\ u(0) = u_0, & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (2.34)$$

et poser $\mu = \partial_t (\partial_\nu u[p_k] - d_*)$ sur $(0, T) \times \Gamma_0$, où d_* est la mesure définie en (2.22).

2. Minimiser la fonctionnelle

$$J[0](z) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Omega e^{2s\varphi} |Pz|^2 dxdt + \frac{s}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_0} e^{2s\varphi} \theta |\partial_\nu z - \mu|^2 d\gamma dt, \quad (2.35)$$

dans E et noter Z un de ses minimiseurs.

3. Poser

$$\tilde{p}_{k+1} = p_k + \frac{Z(T_0) - \Delta w(T_0) + w(T_0)Q(w, u[p_k])(T_0)}{f(T_0)}, \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.36)$$

$w(T_0)$ étant connu au travers de la mesure r_* définie en (2.22).

4. Finalement, définir

$$p_{k+1} = \Pi_m(\tilde{p}_{k+1}).$$

$$\text{où } \Pi_m(p) = \begin{cases} p, & \text{si } |p| \leq m, \\ \text{sign}(p)m, & \text{si } |p| > m. \end{cases}$$

Finalement, nous énonçons le résultat principal qui assure la convergence globale linéaire en norme L^2 pondérée de la suite des $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$:

Théorème 2.15. *Sous les hypothèses (H3a)-(H3b)-(H3c)-(H3d) et $p_* \in L_m^\infty(\Omega)$, il existe $C > 0$ tel que pour tout s suffisamment grand et pour tout $k \in \mathbb{N}$*

$$\int_{\Omega} e^{2s\varphi(T_0)} (p_{k+1} - p_*)^2 dx \leq \frac{C}{s} \int_{\Omega} e^{2s\varphi(T_0)} (p_k - p_*)^2 dx. \quad (2.37)$$

Ainsi, pour s suffisamment grand, $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tend vers p_ lorsque k tend vers $+\infty$.*

2.4.4 Résultats numériques

Nous présentons quelques exemples numériques pour illustrer les propriétés de reconstruction de l'Algorithme 2.3. Le Tableau 2.4 rassemble les valeurs numériques utilisées dans tous les exemples de cette section. Les informations de convergence (nombre d'itérations, temps d'exécution, erreurs de convergence) sont présentées dans le Tableau 2.5.

L	T	N_x	N_t	g	u_0
1	1	25	50	0	0
m	x_0	s	\bar{M}	ρ	ϵ
2	-0.3	100	10	10^{-3}	10^{-3}

Tableau 2.4 – Valeurs numériques des variables de la Section 2.4.

Exemple	Nombre d'itérations	Temps de calcul en secondes	err_d	err_r	err_p
Figure 2.21 (a)	3	117	0.1%	0.2%	0.02%
Figure 2.21 (b)	16	554	0.7%	0.1%	0.8%
Figure 2.23 (a)	3	87	1%	0.3%	2%
Figure 2.23 (b)	3	91	1%	0.3%	4%
Figure 2.23 (c)	3	97	3%	0.5%	9%
Figure 2.24 (b)	6	802	0.1%	0.1%	0.01%

Tableau 2.5 – Résultats de convergence des cas tests réalisés avec l'Algorithme 2.3.

Comme mentionné précédemment, la présence des poids exponentiels dans la fonctionnelle conduit à de sévères difficultés numériques lorsque nous cherchons à la minimiser pour s grand. Pourtant, afin d'assurer la convergence de l'Algorithme 2.3 (voir Théorème 2.15), s doit être grand. Dans les sections précédentes sur l'équation des ondes, cette difficulté était résolue en

choisissant une fonctionnelle qui dépendait de la variable conjuguée $e^{s\varphi}z$. Mais ceci n'était possible que parce que l'opérateur était linéaire. Ici, nous traitons cette difficulté en introduisant de nouvelles fonctions poids (2.24). Sur la Figure 2.20, nous traçons $e^{s\varphi}$ dans $(0, T) \times (0, L)$ pour $s = 1$ et $s = 100$. Remarquez que pour s grand, la fonction ne s'annule pas au temps d'observation $T_0 = 0.5$ ce qui permet une bonne reconstruction du terme source dans tout le domaine Ω . Numériquement, on observe que pour $s = 1$, la minimisation est lente (5202 secondes pour $s = 1$ contre 17 secondes pour $s = 100$ pour le cas test de la Figure 2.21 (a)) et dans certains cas, la convergence de l'algorithme n'est pas réalisée (par exemple dans le cas test de la Figure 2.21 (b)).

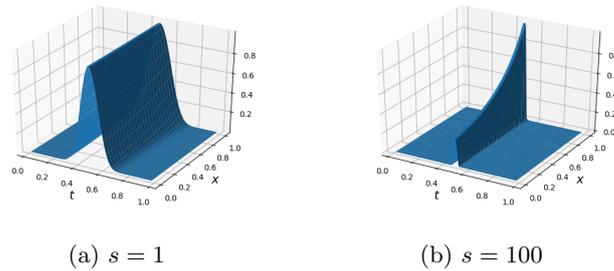


Figure 2.20 – Fonction poids de Carleman $e^{s\varphi}$ définie en (2.24) pour différentes valeurs de s .

A l'Etape 2 de l'Algorithme 2.3, la minimisation de $J[0]$ est réalisée par une méthode de Newton-Krylov [2-30]. La méthode de Newton n'est globalement convergente que si la fonctionnelle considérée est strictement convexe. Ici, il faudrait prouver que la fonctionnelle discrète $J[0]$ est strictement convexe. Une étude complète de l'algorithme discrétisé pourra être envisagée dans le futur et inclura en particulier une inégalité de Carleman pour l'équation de la chaleur discrète, en suivant les travaux de Boyer-Hubert-Le Rousseau [2-10, 2-11] pour les équations paraboliques discrètes. Néanmoins, la démonstration du Théorème 2.15 n'utilise en réalité pas le fait que Z est le minimiseur global mais seulement un point critique. Ainsi, l'initialisation de la méthode de Newton-Krylov (réalisée par $Z = 0$ dans tous les exemples) n'a pas d'incidence sur la convergence globale de la méthode.

Simulations en l'absence de bruit dans les données

Sur la Figure 2.21, nous présentons les résultats successifs obtenus à chaque itération de l'Algorithme 2.3 dans le cas de la reconstruction de la source $p_*(x) = \sin(\pi x)$ pour deux choix différents de f . On peut observer que dans les deux cas le critère de convergence (2.10) pour ϵ est atteint en moins de 20 itérations. Sur la Figure 2.22, nous présentons différents exemples de reconstruction de sources obtenus grâce à l'Algorithme 2.3.

Simulations avec plusieurs niveaux de bruit

La Figure 2.23 montre les résultats pour $p_*(x) = \sin(\pi x)$ associés à différents niveaux de bruit dans les mesures ($\delta = 1\%$, 2% et 5%).

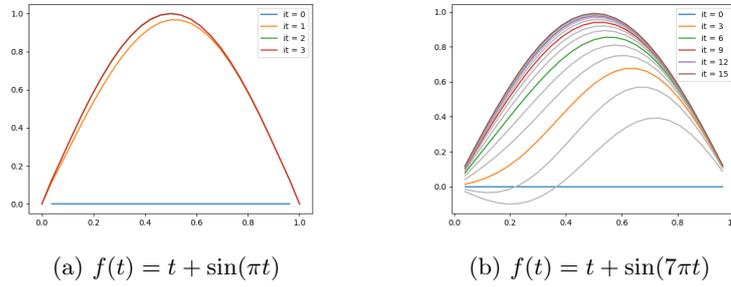


Figure 2.21 – Reconstruction par l’Algorithme 2.3 de la source $p_*(x) = \sin(\pi x)$. Différents choix de la fonction f et historiques de convergence associés.

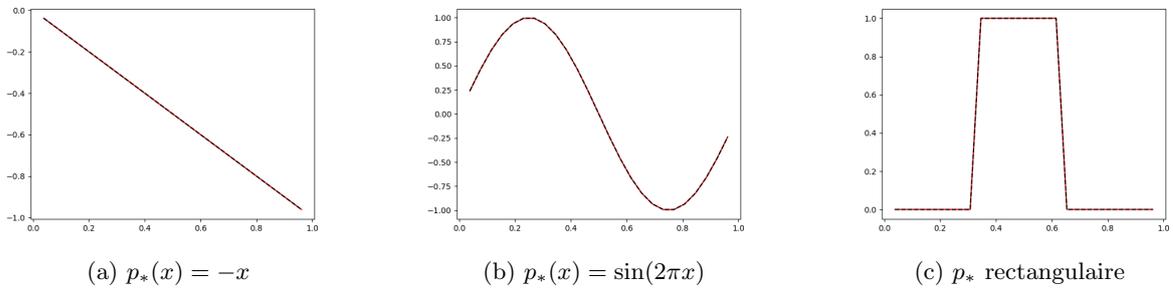


Figure 2.22 – Différents exemples de reconstruction $1d$ obtenus par l’Algorithme 2.3 pour $f(t) = t + \sin(\pi t)$.

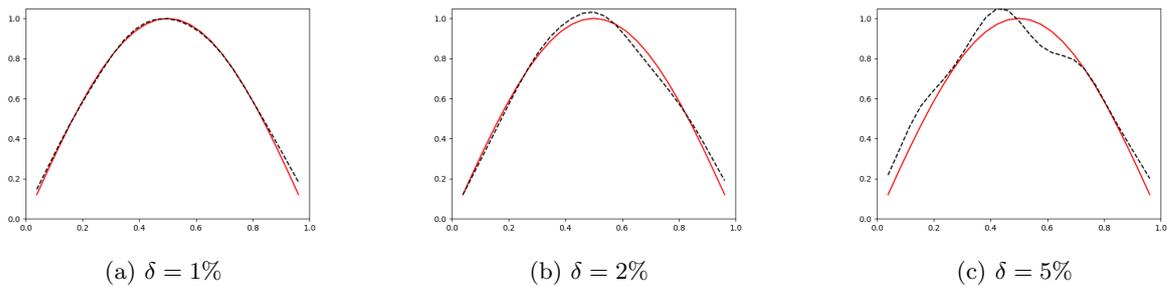
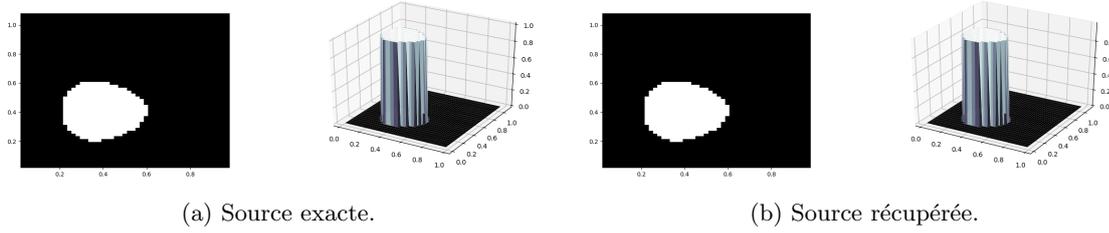


Figure 2.23 – Reconstruction par l’Algorithme 2.3 de la source $p_*(x) = \sin(\pi x)$ pour $f(t) = t + \sin(\pi t)$ en présence de bruit dans les données.

Simulations en deux dimensions

Nous illustrons la méthode en deux dimensions sur le domaine $\Omega = [0, 1]^2$ avec $x_0 = (-0.3, -0.3)$ et $\Gamma_0 = (\{0\} \times [0, 1]) \cup ([0, 1] \times \{0\})$. La Figure 2.24 présente le résultat obtenu en l’absence de bruit. L’erreur finale est inférieure à 0.1% ce qui montre l’efficacité de la reconstruction, obtenue en quelques minutes.

Figure 2.24 – Un exemple de reconstruction de sources par l’Algorithme 2.3 dans le cas $2d$.

2.5 Perspectives

Il y a tout lieu de penser que l’approche C-bRec peut se généraliser à d’autres problèmes inverses de détermination de coefficients dans des EDP, pourvu que nous ayons à disposition des inégalités de Carleman adéquates permettant de démontrer la stabilité Lipschitzienne du problème inverse. Sans pour autant vouloir collectionner les déclinaisons de l’algorithme à toute une série d’EDP, il reste pertinent d’étudier son adaptabilité à des non-linéarités diverses et à des cadres applicatifs plus contraignants. En particulier, je suis curieuse de savoir si la démarche peut s’appliquer à la reconstruction des coefficients dans le système de la viscoélasticité que j’ai étudié pendant ma thèse :

$$\begin{cases} Pu = f, & \text{dans } (0, T) \times \Omega, \\ u = g, & \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega, \\ u(0) = u_0, \quad \partial_t u(0) = u_1, & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (2.38)$$

avec P l’opérateur hyperbolique suivant :

$$\begin{aligned} Pu(x, t) = & \partial_t^2 u(x, t) - \nabla \cdot (\mu(x)(\nabla u(x, t) + \nabla u(x, t)^t) + \lambda(x)(\nabla \cdot u)(x, t)I) \\ & + \int_0^t \nabla \cdot (\tilde{\mu}(x, s)(\nabla u(x, t-s) + \nabla u(x, t-s)^t) + \tilde{\lambda}(x, s)(\nabla \cdot u)(x, t-s)I) ds, \end{aligned}$$

où λ et μ sont appelés les coefficients de Lamé, tandis que $\tilde{\lambda}$ et $\tilde{\mu}$ sont des coefficients de viscosité. La difficulté dans l’étude de cette équation est liée évidemment à la présence du terme intégral de l’opérateur P , mais également au caractère vectoriel de la solution (u est ici un vecteur donc les composantes sont fortement couplées) et à la présence de plusieurs coefficients qui peuvent être simultanément inconnus.

Depuis plusieurs années maintenant, la recherche en imagerie médicale s’oriente vers des méthodes dites d’*élastographie*, voir en particulier les nombreux travaux de Fink et Tanter [2-9]. Inventées en 1991 par Ophir *et al.* [2-34], ces méthodes reposent sur le principe que la grandeur pertinente pour détecter et classifier les tumeurs ne serait pas leur concentration en eau (hypothèse à la base des mesures IRM) mais leur ”dureté”. Cette méthode s’attache donc à fournir des cartographies des coefficients élastiques des organes, à partir de l’observation de déformations générées par des excitations extérieures. Pour les tissus mous, il est largement admis que leur comportement est viscoélastique et que la composante visqueuse (effets de mémoire, dissipation d’énergie) ne peut être négligée. Ainsi, l’extension de la méthode C-bRec à la récupération des coefficients viscoélastiques pourrait participer à l’amélioration des techniques actuelles. Avec Axel Osses au Chili, nous envisageons d’encadrer une thèse en cotutelle sur ce sujet à la rentrée 2021.

Si je ne vois pas d'obstacle conceptuel majeur dans l'application de la méthode C-bRec aux équations (2.38), il reste encore de nombreux points techniques à éclaircir. Par exemple, les résultats de stabilité que j'avais montrés dans ma thèse sont de type Hölderien [A12] ou logarithmique [A13], ne permettant pas d'en déduire la convergence globale de la méthode C-bRec. Il y a quelques mois, Yamamoto et Imanuvilov ont obtenu un résultat Lipchitzien [2-20] pour la récupération du terme source f , ce qui laisse entrevoir la possibilité d'étendre le résultat à la récupération d'un coefficient viscoélastique. Cependant la démonstration de leur résultat n'est plus aussi constructive et devra être adaptée pour en déduire une méthode numérique.

En parallèle, il me semble pertinent de développer le lien entre notre méthode et la réalité des mesures expérimentales. Deux pistes complémentaires sont envisageables :

- Revisiter les résultats théoriques (et la méthode numérique qui en découle) pour rendre les hypothèses de travail plus réalistes, en adéquation avec les mesures réelles. Par exemple on pense récemment avoir montré dans le cas des ondes que l'on peut s'affranchir de l'hypothèse classique mais très restrictive en pratique qui concerne la connaissance exacte de la donnée initiale u_0 du système. D'autres hypothèses techniques, dont la présence est liée aux outils utilisés, pourraient être relaxées.
- Nouer des collaborations avec des physiciens expérimentaux présents sur le campus de l'Université de Paris-Saclay où je suis affectée depuis le mois d'avril 2020 pour développer des techniques de mesures capables de fournir les informations que requiert la théorie. Dans ce deuxième cas, on pourrait voir apparaître de nouvelles modalités d'acquisition.

Chapitre 3

Une méthode automatique d'appariement de formes

Dans ce chapitre, je présente les travaux réalisés avec Chiara Nardoni lors de sa thèse [3-34], co-encadrée par Pascal Frey. Une première partie de ce travail a consisté à mettre au point une méthode d'appariement de formes originale, permettant de construire automatiquement une transformation entre une forme initiale et une forme cible. Les fondements de cette méthode sont décrits dans la Section 3.1 qui a fait l'objet de l'article [A3] avec Charles Dapogny. La Section 3.2 est consacrée aux exemples de mise en oeuvre numérique de cette méthode, ainsi qu'à sa comparaison avec une autre approche plus classique, travail [A2] en collaboration également avec Lydie Uro. Ces travaux ont été réalisés dans le cadre de la Chaire thématique FaciLe "Reconstruction Faciale numérique pour la médecine Légale" qui regroupe des chirurgiens maxillo-faciaux, des anthropologues, des médecins légistes, des informaticiens et des mathématiciens de Sorbonne Universités. Ainsi, dans [A5], toujours avec Chiara Nardoni, nous avons proposé une nouvelle méthode de reconstruction faciale, basée sur la méthode d'appariement de formes. Je décris cette approche dans la Section 3.3. Tous les résultats numériques de ce chapitre ont été implémentés en C et les codes sources sont disponibles sur la page GitHub du projet ¹.

3.1 Fondements de la méthode

3.1.1 Introduction

Le problème d'appariement de formes qui nous intéresse est le suivant : trouver une transformation d'une forme initiale Ω_0 en une forme cible Ω_T . Une telle transformation peut être utilisée pour réaliser physiquement la déformation de Ω_0 en Ω_T , pour transporter des quantités d'intérêts de Ω_0 à Ω_T , mais également afin d'évaluer dans quelle mesure Ω_0 et Ω_T diffèrent l'un de l'autre (par exemple en classification ou en reconnaissance de formes, Nasreddine *et al.* [3-35])

3.1.2 Quelques références sur les méthodes d'appariement de formes

Le problème d'appariement de formes se rencontre dans de nombreux domaines, allant de l'ingénierie biomédicale à l'infographie. Pour un aperçu général des méthodes d'appariement de formes, nous nous référons à l'étude de Veltkamp [3-45]. Nous ne mentionnons ici que quelques approches.

1. <https://github.com/ISCDtoolbox/FaciLe>

Plusieurs méthodes d'appariement de formes utilisent des points de repère dont la correspondance est supposée connue et sert de guide à la transformation. Selon l'application, ces points sont définis manuellement (par exemple dans le cas de points de repère anatomiques) ou par extraction automatique : points critiques d'une fonction scalaire adéquate définie sur la forme dans Belongie *et al.* [3-6] ou caractéristiques topologiques dans Hilaga *et al.* [3-26].

Dans le domaine de l'anatomie numérique, une série d'articles (voir Grenander et Miller [3-16, 3-22]) ont proposé de décrire la déformation de Ω_0 sur Ω_T au travers d'un difféomorphisme. Cette approche a en particulier conduit à la méthode LDDMM qui a suscité beaucoup d'intérêt ces dernières années, notamment pour le traitement des données médicales. Voir les travaux de Glaunes *et al.* [3-20, 3-21], ceux de Beg *et al.* [3-4, 3-5] et Jos [3-28]. L'approche LDDMM considère les formes incluses dans un espace métrique et décrit le difféomorphisme entre deux éléments Ω_0 et Ω_T comme l'écoulement dynamique d'un champ de vitesse v . La recherche de v est alors considérée comme un problème de contrôle optimal. Le critère à minimiser est la somme d'une fonctionnelle représentant le coût du flux qui transporte Ω_0 sur Ω_T et d'un terme de régularisation, garantissant la régularité de la déformation. La structure de l'espace métrique permet de définir des mesures de similarité entre les formes en termes de géodésiques dans l'espace des formes. La formulation LDDMM produit une déformation globale de l'espace ambiant, qui fait notamment correspondre les formes d'intérêt entre elles.

Plus récemment, dans le domaine de l'infographie, le point de vue du transport optimal a été utilisé pour déplacer un maillage tétraédrique sur un objet donné dans Lévy [3-30] et Su *et al.* [3-41] et pour recalibrer des images en $2d$ dans Haker *et al.* [3-24]. Les méthodes de transport optimal ont le mérite de permettre des changements de topologie et d'être insensibles à un mouvement de corps rigide de la forme cible, ce qui est primordial dans la recherche de similitude de formes.

Notre méthode a beaucoup en commun avec celle de Simon et Basri [3-38, 3-39] car elle propose un modèle de déformation inspiré de la physique et aussi avec celle de Bajcsy et Kovacic [3-3] par son utilisation de techniques d'optimisation de formes.

3.1.3 L'appariement de formes comme un problème d'optimisation de formes

Soit Ω_0 et Ω_T deux domaines Lipschitz bornés de \mathbb{R}^n , $n \geq 2$. Nous supposons qu'ils partagent la même topologie mais ne sont pas nécessairement proches l'un de l'autre. Notre objectif est de transformer Ω_0 en Ω_T . Pour cela, nous nous appuyons sur l'optimisation de formes.

D'une manière générale, l'optimisation de formes consiste à minimiser une fonctionnelle de coût $J(\Omega)$. Lorsque le problème d'optimisation est posé sur un ensemble de formes admissibles \mathcal{O}_{ad} , certaines difficultés supplémentaires entrent en jeu, tant du point de vue théorique que numérique. Premièrement, il faut trouver un moyen de décrire les variations admissibles sur l'espace \mathcal{O}_{ad} et définir une notion de différenciation sur l'espace \mathcal{O}_{ad} , nécessaire pour déduire les conditions d'optimalité. De plus, dans la plupart des problèmes, la dépendance de la fonctionnelle de coût par rapport au domaine est très peu triviale : elle peut dépendre des propriétés géométriques du domaine (de sa normale, de sa courbure, de son épaisseur...) mais aussi d'un état u_Ω - obtenu comme solution d'une EDP posée sur Ω - et de ses dérivées. Dans ce cas, nous devons regarder la dérivation de l'état u_Ω par rapport au domaine. Pour un panorama complet sur ces questions, je renvoie aux ouvrages de Allaire [3-1] et Henrot et Pierre [3-25].

Dans notre travail, l'écart entre une forme de référence Ω et la forme cible Ω_T est mesurée par la fonctionnelle suivante :

$$J(\Omega) = \int_{\Omega} d_{\Omega_T}(x) dx, \quad (3.1)$$

où d_{Ω_T} est la fonction de distance signée à Ω_T , définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad d_{\Omega_T}(x) = \begin{cases} -d(x, \partial\Omega_T) & \text{si } x \in \Omega_T, \\ 0 & \text{si } x \in \partial\Omega_T, \\ d(x, \partial\Omega_T) & \text{si } x \in {}^c\overline{\Omega_T}. \end{cases} \quad (3.2)$$

Dans la formule ci-dessus, $d(\cdot, \partial\Omega_T)$ désigne la distance euclidienne habituelle à $\partial\Omega_T$.

Pour diminuer la valeur de $J(\Omega)$, le domaine Ω doit s'étendre dans les régions de l'espace \mathbb{R}^n où d_{Ω_T} est négative (c'est-à-dire à l'intérieur de Ω_T), et se rétracter dans les régions où d_{Ω_T} est positive. Ceci est illustré sur la Figure 3.1. Notez que la fonctionnelle $J(\Omega)$ a un unique minimiseur global $\Omega = \Omega_T$, et aucun autre point de minimum local lorsque Ω_T est connexe. Une fonction similaire à celle de (3.1) a également été utilisée dans Dapogny *et al.* [3-18] à des fins d'optimisation de formes en architecture.

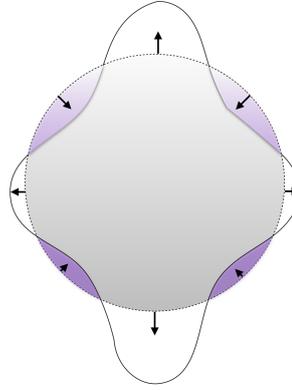


Figure 3.1 – Déformation de la forme de référence Ω (cercle violet) permettant de diminuer la valeur de J définie en (3.1) via la distance signée à la forme cible Ω_T (en gris).

3.1.4 Dérivée de forme de la fonctionnelle et direction de descente

Plusieurs notions de différenciation par rapport au domaine sont disponibles dans la littérature. L'une d'entre elles, très bien adaptée à notre objectif, est la méthode de Hadamard [3-23]. L'idée est d'établir une correspondance entre les variations du domaine et les homéomorphismes de \mathbb{R}^n . Ainsi, les variations d'une forme donnée $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sont considérées sous la forme (voir Figure 3.2 (a)) :

$$\Omega_\theta = (I + \theta)(\Omega), \quad (3.3)$$

où $\theta : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ est un "petit" champ vectoriel. Le caractère bien posé de cette correspondance découle du résultat suivant

Théorème 3.1 (Murat et Simon [3-33]). *Pour tout $\theta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ tel que $\|\theta\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)} \leq 1$, l'application $I + \theta$ est un homéomorphisme Lipschitz d'inverse Lipschitz.*

En utilisant cette correspondance, la dérivée de forme d'Hadamard est définie en termes de dérivée classique sur un espace fonctionnel.

Définition 3.1.1. Une fonction $J(\Omega)$ du domaine est dite différentiable en Ω si l'application $\theta \mapsto J(\Omega_\theta)$, de $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ dans \mathbb{R} , est Fréchet différentiable en $\theta = 0$. La dérivée de Fréchet associée est notée $J'(\Omega)(\theta)$ et appelée la dérivée de forme de J . On a alors

$$J(\Omega_\theta) = J(\Omega) + J'(\Omega)(\theta) + o(\theta), \text{ où } \frac{|o(\theta)|}{\|\theta\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)}} \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} 0.$$

Dans notre cas, par un calcul classique, nous obtenons le résultat suivant :

Théorème 3.2. Soit Ω un domaine borné Lipschitz de \mathbb{R}^n . La dérivée de forme de la fonctionnelle $J(\Omega)$ définie en (3.1) s'écrit :

$$\forall \theta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), J'(\Omega)(\theta) = \int_{\partial\Omega} d_{\Omega_T} \theta \cdot \nu \, d\gamma. \quad (3.4)$$

où ν représente le vecteur normal unitaire sortant de Ω .

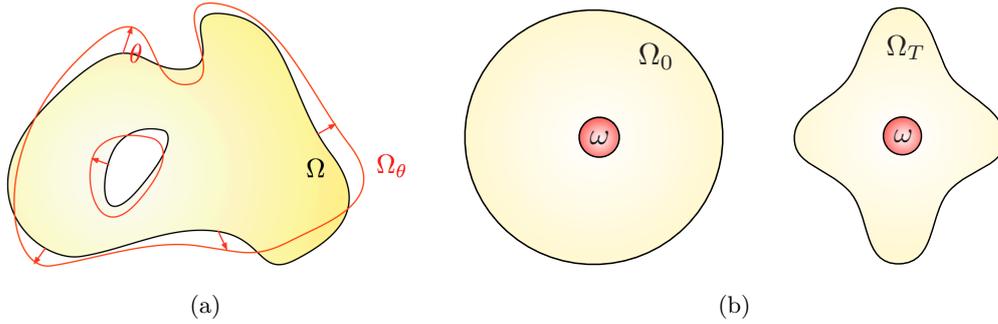


Figure 3.2 – (a) Variation Ω_θ d'une forme Ω selon la méthode de Hadamard introduite en (3.3). (b) Forme initiale Ω_0 et forme cible Ω_T fixées sur un ouvert ω commun.

De l'expression de la dérivée de forme (3.4), nous déduisons que le champ vectoriel

$$-d_{\Omega_T} \nu, \quad (3.5)$$

est une direction de descente naturelle pour la fonctionnelle J définie en (3.1). En effet, si $\theta = -td_{\Omega_T} \nu$ avec $t > 0$ assez petit, cela garantit que :

$$J(\Omega_\theta) = J(\Omega) - t \int_{\partial\Omega} d_{\Omega_T}^2 \, d\gamma + o(t^2) < J(\Omega).$$

3.1.5 Paramétrisation par des déplacements élastiques

Le champ vectoriel $-d_{\Omega_T} \nu$ figurant dans (3.5) est défini uniquement sur la frontière de Ω . Il doit donc être préalablement étendu à Ω dans son ensemble pour donner un sens à (3.3). Si aucune attention particulière n'est accordée à cette extension, le champ de déplacement étendu peut engendrer un étirement important de Ω et invalider la procédure. Pour surmonter cette difficulté, nous nous appuyons sur une technique d'extension et de régularisation de la direction de descente

(3.5), assez classique en optimisation de formes (voir de Gournay [3-19] et les références qui s'y trouvent).

Ainsi, imaginez que toutes les formes considérées Ω sont remplies d'un matériau élastique linéaire isotrope et homogène. Supposons également qu'elles contiennent un sous-ensemble donné $\omega \Subset \Omega$ sur lequel elles sont fixées. Nous obtenons maintenant une direction de descente pour $J(\Omega)$ comme l'unique solution $u_\Omega \in H_\omega^1(\Omega)^n = \{v \in H^1(\Omega)^n, v = 0 \text{ sur } \omega\}$ du système de l'élasticité linéaire (écrit ici sous forme variationnelle)

$$\forall v \in H_\omega^1(\Omega)^n, \int_\Omega \sigma(u_\Omega) : \varepsilon(v) \, dx = -J'(\Omega)(v) = - \int_{\partial\Omega} d_{\Omega_T} v \cdot \nu \, d\gamma, \quad (3.6)$$

où $\varepsilon(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T)$ est le tenseur des déformations linéarisé et $\sigma = 2\mu\varepsilon(u) + \lambda \operatorname{tr}(\varepsilon(u))I$ est le tenseur des contraintes associé via la loi de Hooke avec λ et μ les coefficients de Lamé.

Ce champ vectoriel u_Ω est naturellement une direction de descente pour $J(\Omega)$ puisque

$$J'(\Omega)(u_\Omega) = - \int_\Omega \sigma(u_\Omega) : \varepsilon(u_\Omega) \, dx \leq 0$$

et son avantage par rapport au champ de déformation intuitif $-d_{\Omega_T}\nu$ défini en (3.5) est double. Tout d'abord, u_Ω est défini dans tout le domaine Ω . Et compte-tenu de l'effet régularisant des équations elliptiques comme celles de l'élasticité (3.6), il est intrinsèquement plus régulier que $-d_{\Omega_T}\nu$ (voir Ciarlet [3-9]).

Remarque Le choix d'un sous-ensemble ω correspond à un alignement global des formes (cf. Figure 3.2 (b)). Cette restriction que nous utilisons pour garantir le caractère bien posé du problème (3.6) pourrait être remplacée par l'ajout d'un terme d'ordre 0. Notons également que par construction, les frontières de ω et Ω ne se croisent pas, ce qui évite la perte de régularité de la solution u_Ω à l'interface entre des conditions limites de nature différente (Dirichlet sur $\partial\omega$ et Neumann sur $\partial\Omega$).

3.1.6 L'algorithme d'appariement de formes

À partir de la forme initiale Ω_0 , nous mettons en oeuvre un algorithme de descente de gradient afin d'obtenir une suite de domaines $(\Omega_k)_{k \in \mathbb{N}}$ correspondant à des valeurs décroissantes de $J(\Omega_k)$.

Algorithme 3

À chaque itération, il consiste à :

1. Calculer la direction de descente u_{Ω_k} en résolvant (3.6) sur Ω_k .
2. Trouver un pas de descente approprié $t_k > 0$, obtenu par exemple via une procédure de *line search*, garantissant notamment que J est strictement décroissante, c'est-à-dire

$$J((I + t_k u_{\Omega_k})(\Omega_k)) < J(\Omega_k).$$

3. Déformer le domaine selon la relation

$$\Omega_{k+1} = (I + t_k u_{\Omega_k})(\Omega_k).$$

L'algorithme s'arrête lorsque la taille du pas t_k est inférieure à une tolérance fixe ϵ .

L'application globale de Ω_0 à Ω_T est facilement récupérée comme la composition des différents déplacements entre chaque itération. Nous pouvons également composer les déformations d'une forme initiale Ω_0 sur deux cibles Ω_T et Ω'_T afin d'obtenir la transformation de Ω_T à Ω'_T et inversement.

3.2 Mise en oeuvre numérique et premiers exemples

3.2.1 Exemples numériques

Au niveau discret, la forme initiale Ω_0 est représentée par un maillage \mathcal{T}_0 , par exemple une triangulation. La forme cible Ω_T est connue au travers de sa fonction de distance signée définie en (3.2), par exemple sous la forme d'une fonction affine par morceaux sur le maillage fixe \mathcal{T}_D d'un grand domaine de calcul D . Ce maillage peut éventuellement être non conforme, montrant de petits trous, des entités qui se chevauchent, etc. Dans les exemples proposés ci-après, le calcul de la fonction de distance signée à Ω_T est effectué en utilisant l'algorithme décrit par Dapogny et Frey dans [3-17]. Un exemple de fonction de distance signée par rapport à une forme cible est présenté sur la Figure 3.4 (a).

À partir de la forme initiale Ω_0 , nous appliquons alors l'Algorithme 3 de descente de gradient défini à la Section 3.1.6 afin d'obtenir une suite de couples $(\Omega_k, \mathcal{T}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de domaines et de leurs maillages correspondants pour des valeurs décroissantes de $J(\Omega_k)$.

- A l'étape 1, le calcul du vecteur u_{Ω_k} solution de système de l'élasticité (3.6) est obtenu par la méthode des éléments finis (code développé lors de ma thèse [A16]).
- L'étape 3 de mise à jour de l'algorithme devient au niveau discret :

$$\forall x \text{ noeud de } \mathcal{T}_k, \quad x \mapsto x + t_k u_{\Omega_k}(x).$$

Nous présentons sur la Figure 3.3 plusieurs exemples numériques en $2d$ pour montrer les performances de la méthode. Dans ces exemples, la forme initiale Ω_0 est un disque et les deux formes Ω_0 et Ω_T appartiennent à la boîte $D = [0, 1]^2$. L'ensemble ω choisi pour aligner Ω_0 et Ω_T est un petit disque situé à l'intérieur des deux formes. Le maillage \mathcal{T}_0 compte environ 1 200 arêtes. Il est raffiné au voisinage de la frontière de Ω_0 mais plus grossier en son centre. Cette astuce - combinée à l'utilisation des équations de l'élasticité linéaire - permet d'éviter une distorsion importante des éléments et de préserver la qualité du maillage à chaque itération. Ainsi, la forme déformée n'est jamais remaillée pendant le processus. Cela permet de conserver une correspondance point à point entre le maillage initial et le maillage final, ce qui peut être utile dans les applications, comme nous le verrons à la Section 3.3.

La Figure 3.4 montre finalement la superposition des contours entre le maillage déformé et la forme cible considérée. Les résultats montrent que l'algorithme est capable de récupérer de fortes courbures et converge même pour des formes très éloignées les unes des autres. Dans le cas (d) de la Figure 3.3, la correspondance à l'extrémité de la queue pourrait être améliorée en ajoutant de nouveaux noeuds au maillage dans cette zone.

L'analyse de convergence relative à tous les exemples $2d$ considérés est détaillée dans le Tableau 3.1. L'erreur est obtenue en calculant la norme L^2 de la distance entre $\partial\Omega_T$ et $\partial\Omega_k$ à convergence. Notons finalement que sans surprise le résultat obtenu n'est pas indépendant de l'alignement initial des deux formes : un mouvement de corps rigide appliqué à la forme initiale Ω_0 conduit à l'obtention d'une transformation différente entre la forme initiale et la forme cible.

Enfin, la Figure 3.5 présente un exemple en $3d$. La convergence de la descente en gradient est obtenue en 300 itérations et l'erreur finale moyenne est égale à 0.1 mm (bien inférieure à la taille minimale des mailles), révélant une excellente correspondance de Ω_{300} avec Ω_T .

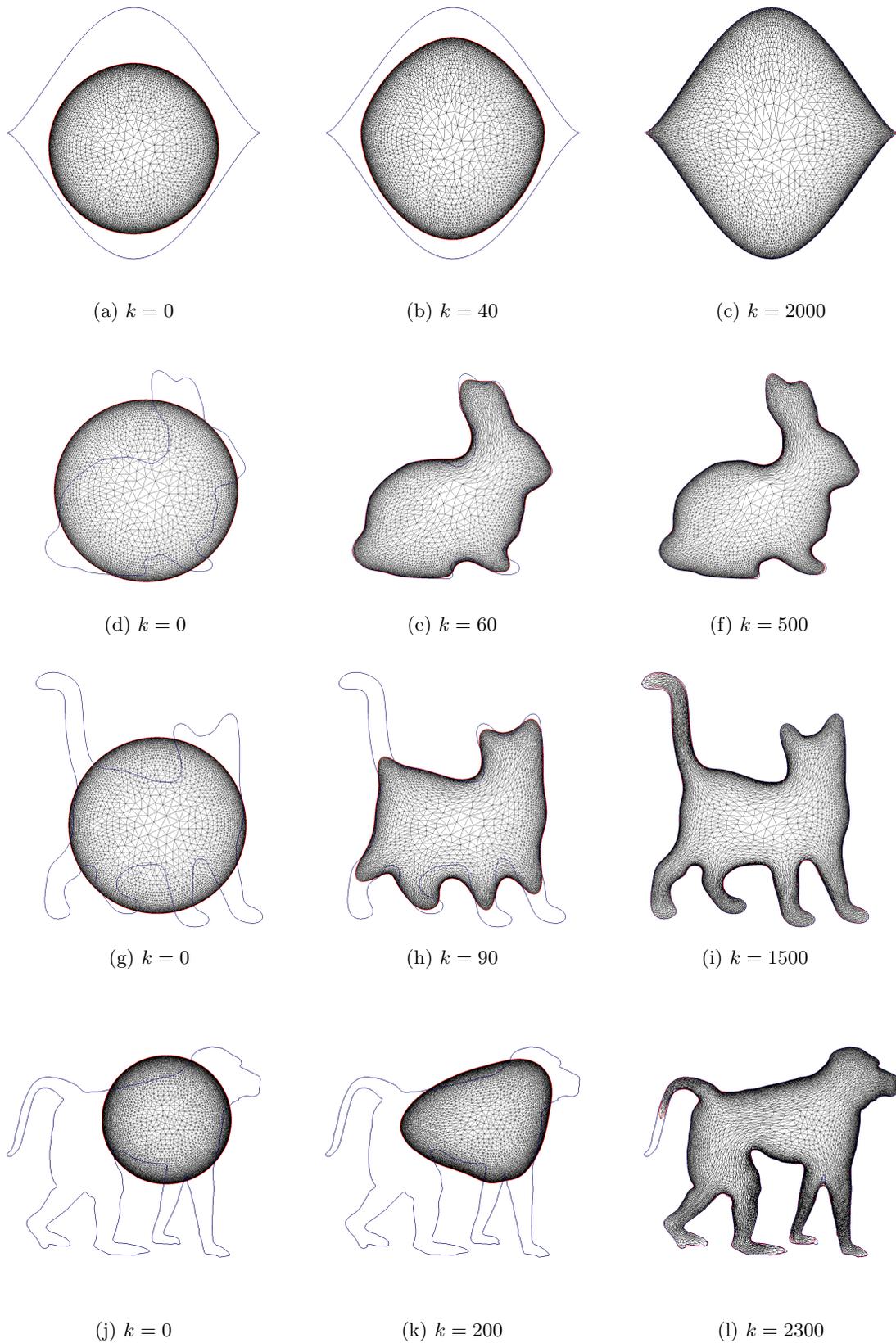


Figure 3.3 – Exemples 2d pour la fonctionnelle volumique J définie en (3.1). Contour de la forme cible en bleu et maillage de la forme déformée Ω_k à différentes itérations k .

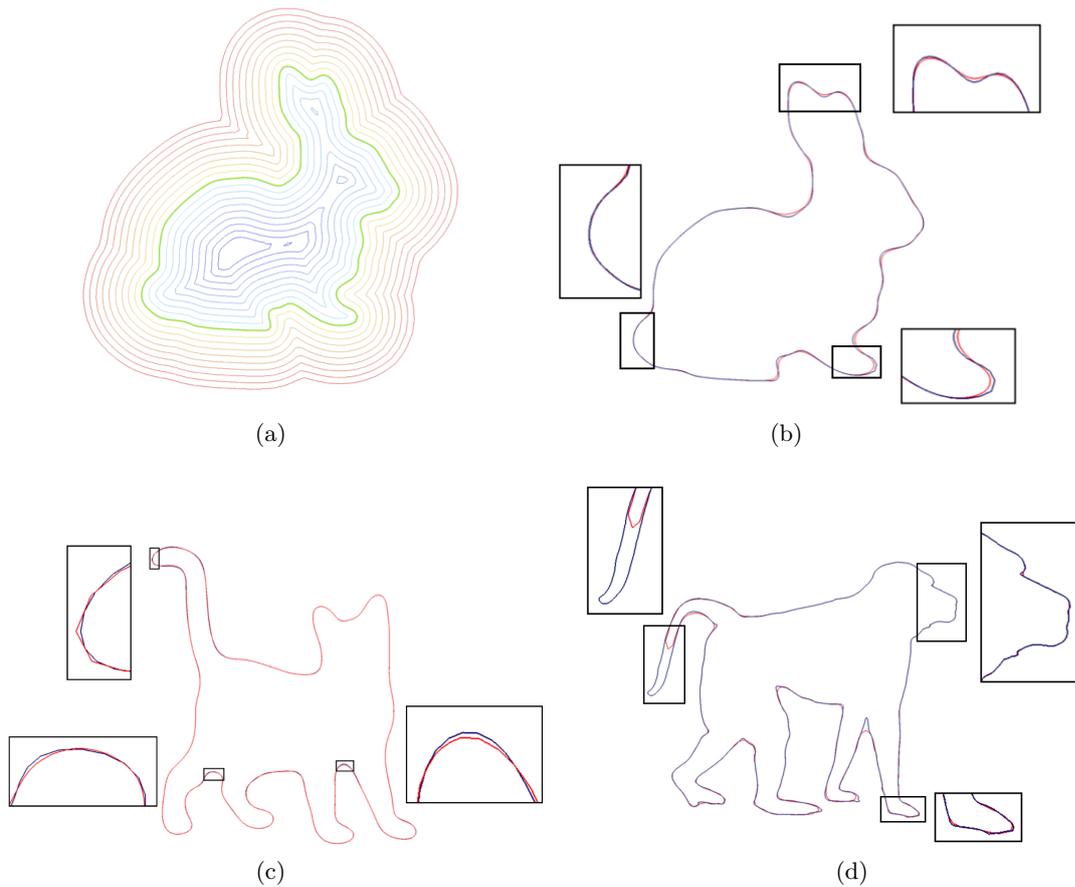


Figure 3.4 – (a) Isovaleurs de la fonction de distance signée définie en (3.2) sur un exemple. (b)-(c)-(d) Superposition des contours de Ω_T (en bleu) et de la forme finale (en rouge) pour les cas tests de la Figure 3.3.

	Fonctionnelle volumique J		Fonctionnelle surfacique P	
Cas test ...	Erreur	Itérations	Erreur	Itérations
1. Bouche	1.9×10^{-4}	2 000	2.9×10^{-5}	500
2. Lapin	1.0×10^{-3}	500	Ne converge pas	1 000
3. Chat	5.7×10^{-4}	1 500	Ne converge pas	680
4. Singe	1.2×10^{-3}	2 300	Ne converge pas	300

Tableau 3.1 – Comparaison entre les fonctionnelles volumiques J définie en (3.1) et surfaciques P définie en (3.7). Erreur finale et nombre d'itérations nécessaires pour atteindre la convergence pour les cas 2d.

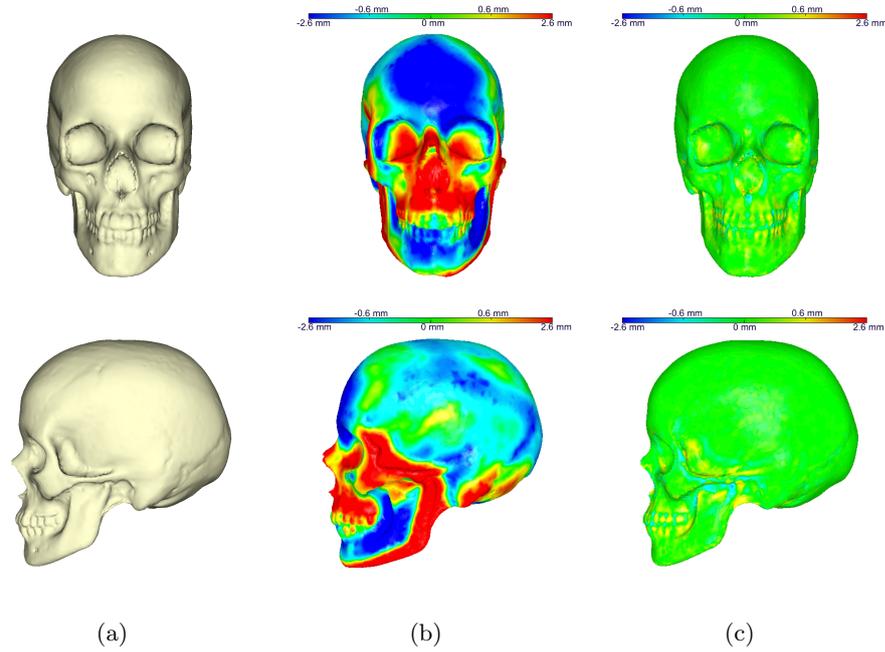


Figure 3.5 – Un exemple en 3d de l'utilisation de la méthode d'appariement. (a) Forme cible Ω_T . (b) Forme initiale Ω_0 et écart en mm par rapport à la forme cible. (c) Forme déformée Ω_k pour $k = 300$ et écart en mm par rapport à la forme cible.

3.2.2 Comparaison avec une autre fonctionnelle de coût

Nous introduisons une nouvelle fonctionnelle (dite surfacique par opposition à la fonctionnelle volumique J introduite en (3.1)) permettant de mesurer l'écart entre les formes :

$$P(\Omega) = \int_{\partial\Omega} d(\gamma, \partial\Omega_T)^2 d\gamma, \quad (3.7)$$

où $d(\cdot, \partial\Omega_T)$ désigne la fonction de distance euclidienne habituelle à $\partial\Omega_T$. Cette fonctionnelle est basée sur un paradigme classique - aligner deux formes en alignant leurs frontières - et est utilisée dans une grande variété de situations (voir Zhao, Osher et Fedkiw [3-48] par exemple). Pourtant nous allons voir que son utilisation dans l'appariement de formes se révèle hasardeuse. Par un calcul classique, nous montrons que

Théorème 3.3. *Soit Ω un domaine borné Lipschitz de \mathbb{R}^n . La fonctionnelle $P(\Omega)$ définie en (3.7) est différentiable et sa dérivée de forme est*

$$\forall \theta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), \quad P'(\Omega)(\theta) = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial d(\gamma, \partial\Omega_T)^2}{\partial \nu} + \kappa d(\gamma, \partial\Omega_T)^2 \right) \theta \cdot \nu d\gamma,$$

où ν est la normale et κ la courbure moyenne de $\partial\Omega$.

Présentons maintenant plusieurs exemples en 2d en utilisant la fonctionnelle surfacique P définie en (3.7). Sur l'exemple de la première ligne de la Figure 3.6, l'algorithme converge en quelques itérations et est capable de récupérer parfaitement la forme cible, même dans les régions

à forte courbure. Dans cet exemple, la fonctionnelle surfacique P montre même plus de précision que son homologue volumique (cf. Tableau 3.1). Néanmoins, dans les autres cas présentés sur la Figure 3.6, l'algorithme ne parvient pas à converger, invalidant le maillage après quelques itérations. L'apparition de singularités est due à un manque de différentiabilité de la fonction de distance lorsque l'ensemble des projections d'un point sur la frontière de la forme cible n'est pas un singleton. Dans ce cas, la dérivée de la forme n'est pas bien définie puisque nous avons autant de directions de descente que de points de projection.

Par conséquent, la fonctionnelle volumique basée sur le paradigme original "demander à Ω_0 de remplir tout l'espace occupé par Ω_T " s'est avérée plus efficace dans la plupart des situations par rapport à celle basée sur l'alignement des frontières.

3.2.3 Perspectives

Actuellement nous étudions, avec Jérémy Dalphin également, les propriétés de convergence de l'Algorithme 3. Pour cela, nous introduisons $\omega \subset D$ deux ouverts bornés de \mathbb{R}^n et

$$\mathcal{O} = \{\Omega \text{ est un domaine Lipschitz tel que } \omega \subset \Omega \subset D\}.$$

Nous supposons que Ω_0 et Ω_T sont dans \mathcal{O} et que $(\Omega_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est la suite construite par l'Algorithme 3 pour un pas fixe t suffisamment petit. Nous pensons être en mesure de montrer que

- la suite des $(\Omega_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers Ω_T au sens des fonctions caractéristiques (voir Henrot et Pierre [3-25] pour cette notion) ;
- si le critère d'arrêt est $|J'(\Omega_k)| \leq \epsilon$ alors l'algorithme s'arrête en un nombre fini d'itérations.

La condition sur le pas fixe t dépend de la constante de Lipschitz pour J' et de la constante de coercivité de la forme bilinéaire de (3.6). Le point le plus difficile à montrer est que les Ω_k restent uniformément bornés dans un ouvert D .

3.3 Application en reconstruction faciale

La reconstruction faciale vise à retrouver l'apparence du visage d'un individu à partir de la seule connaissance du crâne sous-jacent. Le problème de la reconstruction faciale se pose dans divers domaines d'application comme la médecine légale, l'anthropologie ou l'archéologie. En médecine légale, la reconstruction faciale intervient dans le processus d'identification des personnes décédées. Lorsque toutes les méthodes d'identification habituelles ont échoué, elle peut être envisagée. Elle permet alors d'établir une liste restreinte de candidats à partir de laquelle la personne peut être identifiée par d'autres méthodes d'identification.

3.3.1 Références sur les méthodes de reconstruction faciale

Les méthodes traditionnelles de reconstruction faciale sont basées sur des procédures manuelles, produisant des portraits $2d$ ou des sculptures $3d$. Ces méthodes consistent essentiellement en trois étapes communes : choisir sur le crâne un ensemble de points de repère anatomiques, puis appliquer une épaisseur moyenne de tissu mou en chaque point de repère du crâne afin d'estimer un point de repère correspondant sur le visage et enfin dessiner ou sculpter un visage correspondant aux points de repère estimés. La plupart des praticiens ajoutent un modèle de muscles du visage afin d'enrichir la précision anatomique de la reconstruction, ce qui a conduit à la méthode dite de Manchester décrite dans Wilkinson [3-46]. La création du visage à partir du crâne reste une procédure d'approximation mal posée : à partir de l'observation du crâne,

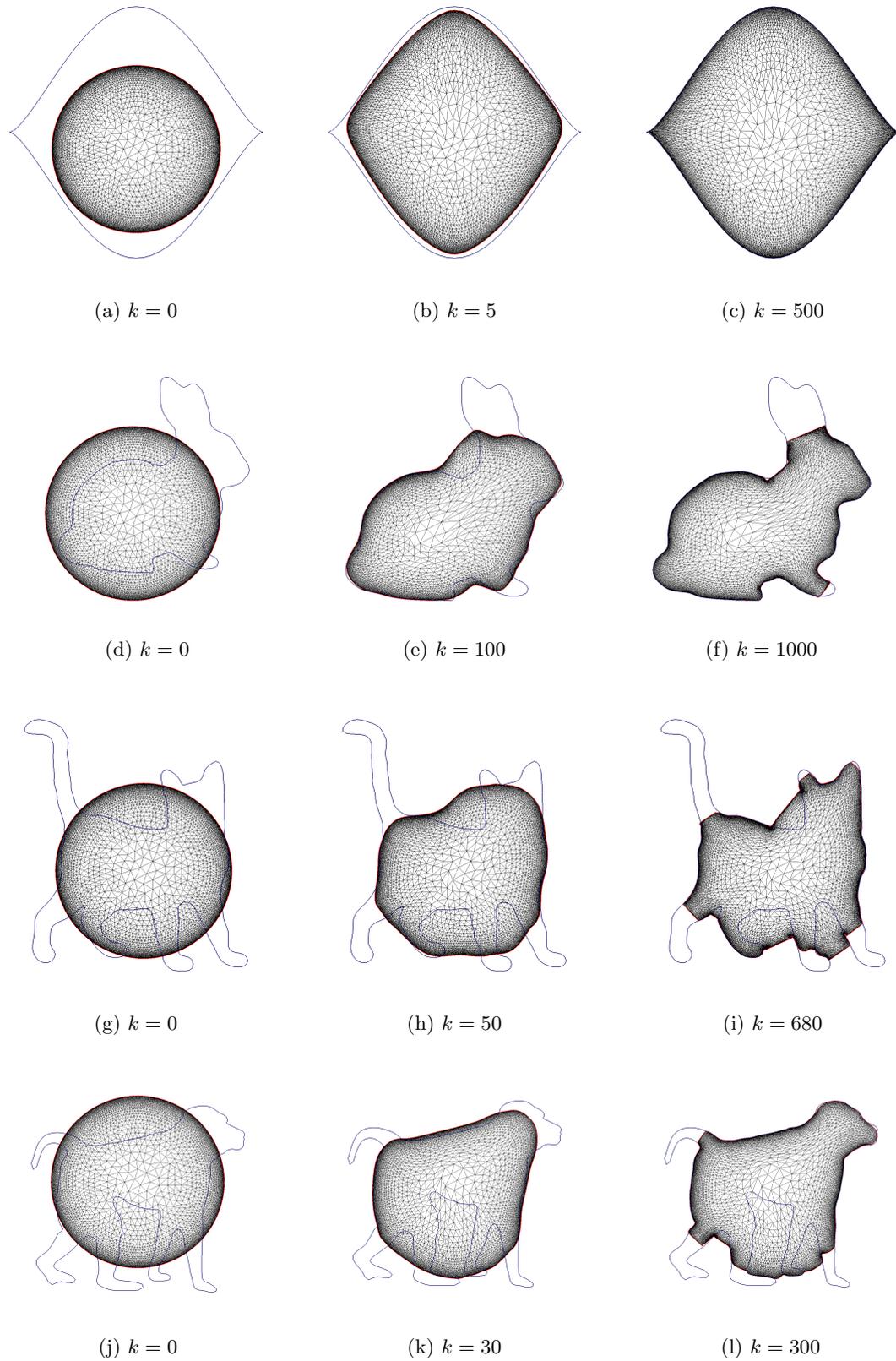


Figure 3.6 – Exemples 2d pour la fonctionnelle surfacique P définie en (3.7). Contour de la forme cible Ω_T en bleu et maillage de la forme déformée Ω_k à différentes itérations k . L'utilisation de la fonctionnelle surfacique génère des singularités.

on ne pourra pas récupérer une partie des traits du visage (yeux, cheveux, lèvres, oreilles). De plus, l'apparence du visage d'un individu donné change considérablement en fonction de facteurs comme la nutrition ou le vieillissement. Malgré la difficulté intrinsèque du problème, les médias regorgent d'images de visages reconstruits. Une étude de ces cas peut être trouvée dans le livre de Prag et Neave [3-37].

Les résultats obtenus sont souvent très crédibles, car les artistes médicaux prennent en compte leurs expertises anatomique, historique et archéologique, ce qui donne à l'observateur un sentiment de cohérence. Cependant, une seule reconstruction nécessite plusieurs jours de travail de la part d'un artiste médico-légal expérimenté, ce qui rend impossible la réalisation de multiples instances. Afin d'atténuer ces difficultés, plusieurs logiciels d'infographie ont été développés. Ils utilisent la même méthodologie que les méthodes manuelles, permettant à l'expert de régler certains paramètres de modélisation et de combiner l'expertise humaine avec la flexibilité du logiciel, comme dans Miyasaka *et al.* [3-32]. Toutefois, cette approche n'élimine pas la subjectivité de l'artiste dans la reconstruction. Au cours des 30 dernières années, une grande partie du travail a été consacrée à la conception de méthodes objectives entièrement automatisées.

La démarche commune des logiciels modernes de reconstruction faciale est décrite dans Claes *et al.* [3-12]. Tout d'abord, un expert examine le crâne inconnu afin de déterminer ses paramètres anthropologiques tels que le sexe, l'âge au moment du décès et l'origine ethnique. Ensuite, une réplique virtuelle du crâne est produite et représentée selon certains paramètres de modélisation choisis. Un modèle cranio-facial codant les informations sur le visage, le crâne et les tissus mous est généré à partir d'une base de données. Ensuite, une transformation géométrique admissible est choisie pour adapter le modèle cranio-facial sur le crâne inconnu, en fonction de la "proximité" entre les crânes. Enfin, une texture de peau et une pilosité peuvent être ajoutées au visage reconstruit.

Notre méthode combine des techniques classiques - comme l'utilisation d'une base de données (voir Section 3.3.2) - avec des techniques originales :

- Une méthode d'enveloppement qui permet de construire une surface fermée sur les crânes (voir Section 3.3.3).
- La méthode d'appariement de formes présentée à la Section 3.1 qui est utilisée pour relier le crâne inconnu avec les crânes de la base de données (voir Figure 3.7).
- Une technique de déformation des tissus mous pour transporter et adapter les visages de la base de données sur le crâne inconnu (voir Section 3.3.4).

Le dénominateur commun des trois parties est le recours aux équations de l'élasticité introduites en (3.6) pour piloter les déformations.

3.3.2 Acquisition des données

L'acquisition des crânes et des visages de la base de données est réalisée par des scanners de sujets vivants, technique permettant une bonne visualisation des tissus durs. Malheureusement, le caractère invasif de cette technique pose de sérieux problèmes juridiques et éthiques, empêchant la constitution d'une vaste base de données de sujets sains. Les résultats présentés dans cette étude sont basés sur une collection de 26 scanners crâniens de sujets féminins en bonne santé âgés de 20 à 40 ans. Les données utilisées ont été fournies par le projet de reconstruction faciale statistique de l'Université Paris Descartes présenté dans Tilotta *et al.* [3-42].

La segmentation des données consiste à identifier l'os et les tissus mous sur des images $2d$ empilées en niveaux de gris. Cette procédure a été réalisée de manière semi-automatisée à l'aide du logiciel Amira développé par Stalling *et al.* [3-40]. Les images binaires ont ensuite été

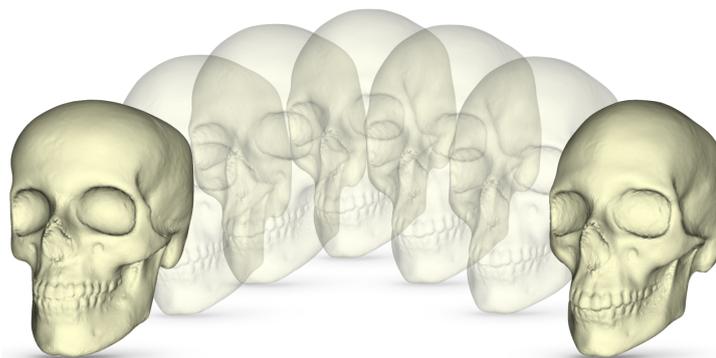


Figure 3.7 – Méthode d'appariement de formes de la Section 3.1 permettant de déformer un crâne sur un autre.

nettoyées manuellement en supprimant les îlots (de très petites structures dont les contours ne sont définis que par quelques pixels) et les artefacts dûs à la présence des prothèses dentaires (voir l'exemple de la Figure 3.8). Ce travail fastidieux mais néanmoins indispensable a été réalisé par des étudiants en stage à l'ISCD, Sorbonne Université.

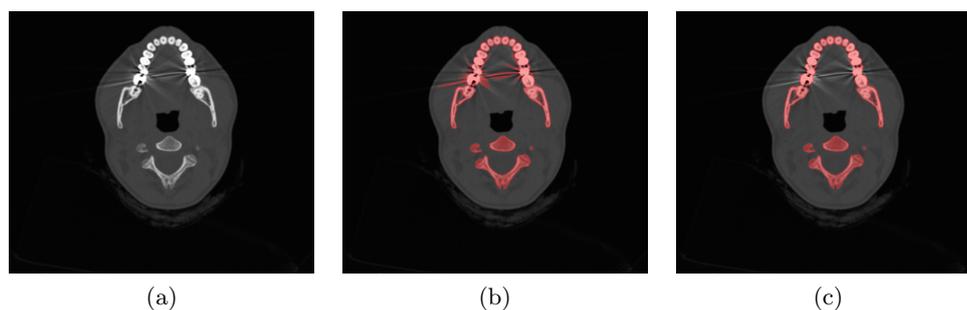


Figure 3.8 – Coupe transversale d'une tête. (a) Image de référence en niveaux de gris. (b) Pré-segmentation automatique de l'os en rouge. (c) Segmentation de l'os après débruitage manuel en rouge.

À partir des tranches segmentées en $2d$, les maillage en $3d$ du crâne et du visage ont été générés par l'algorithme de *marching cube* de Stalling *et al.* [3-40]. Ces maillages contiennent, en général, un nombre prohibitif d'éléments qui sont redondants pour décrire correctement la géométrie du modèle. Les maillages ont alors été simplifiés grâce à l'outil de remaillage de surface *mmgs*, développé par Dapogny, Dobrzynski et Frey [3-13] (voir la Figure 3.9).

3.3.3 Une méthode d'enveloppement

Le crâne humain est caractérisé par une structure complexe, présentant de petits détails difficiles à acquérir et à manipuler numériquement. En raison de ces difficultés, plusieurs auteurs optent pour la description du crâne au travers de structures anatomiques ou géométriques sous-jacentes. Le choix le plus populaire conduit à la définition d'un ensemble épars de repères anatomiques, voir Claes *et al.* [3-11], Vandermeulen *et al.* [3-44] ou Knyaz *et al.* [3-29].

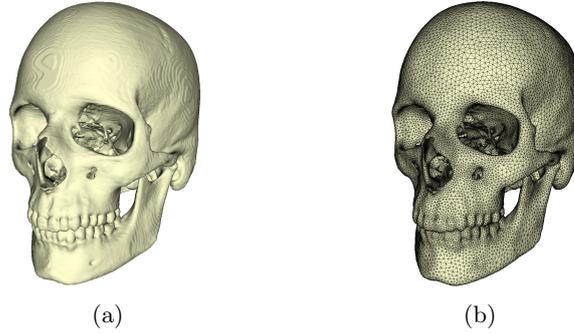


Figure 3.9 – (a) Maillage 3d du crâne obtenu par segmentation (2 179 332 triangles). (b) Maillage 3d du crâne après remaillage (15 6301 triangles).

L'objectif de cette section, déjà évoquée dans Jones [3-27], Tilotta *et al.* [3-42], est de définir une surface fermée du crâne. Cette question est liée au problème plus général de la reconstruction d'une surface à partir de points d'échantillonnage. Les méthodes de reconstruction de surface ont été largement étudiées dans le contexte de l'évolution des interfaces via les méthodes *level set* (voir Claisse et Frey [3-10] et les références qui s'y rapportent) ou via des surfaces déformables, comme dans Duan *et al.* [3-15] ou Miller *et al.* [3-31]. Nous proposons ici une méthode d'enveloppement.

Tout d'abord, une triangulation \mathcal{T}_S de la géométrie du crâne est générée (voir la Section 3.3.2). Ensuite, une sphère Γ^0 est choisie pour encercler \mathcal{T}_S . Si on lui donne une certaine épaisseur, on définit un volume Ω^0 que l'on peut supposer rempli d'un matériau élastique linéaire, dont la déformation est donnée par les équations de l'élasticité rappelées en (3.6). En appliquant sur Γ^0 une force de traction normale, on produit une suite de formes Ω^k - de frontière intérieure Γ^k . Les points de Γ^k sont déplacés itérativement jusqu'à ce qu'ils intersectent la triangulation \mathcal{T}_S . A convergence, Γ^k définit ainsi une frontière fermée qui enveloppe la triangulation source \mathcal{T}_S et divise l'espace ambiant en deux sous-régions définissant sans ambiguïté un domaine intérieur et un domaine extérieur. La Figure 3.10 présente le résultat de l'enveloppement d'une triangulation de crâne.

3.3.4 Déformation du modèle cranio-facial sur le crâne inconnu.

Si des modèles de surfaces fermées du crâne et du visage sont disponibles (voir la Section 3.3.3), alors le modèle cranio-facial peut être décrit par le domaine 3d entre ces surfaces, contenant les informations sur les tissus mous (voir la Figure 3.11). Différentes transformations ont été proposées pour déformer le modèle cranio-facial sur le crâne inconnu. Les plus fréquentes (Claes *et al.* [3-11], Paysan *et al.* [3-36], Berar *et al.* [3-7], Bai *et al.* [3-2], Duan *et al.* [3-14]) utilisent l'Analyse en Composantes Principales sur une base de données de visages. Dans notre approche, le modèle cranio-facial est déformé comme un masque élastique ajusté au crâne inconnu. L'utilisation de l'élasticité pour la déformation des tissus mous est classique, par exemple dans le domaine de la chirurgie maxillo-faciale numérique avec Chabanas *et al.* [3-8] et Zachow *et al.* [3-47].

Ainsi, soit $(S_i)_{i=0,\dots,N}$ et $(F_i)_{i=0,\dots,N}$ la collection de crânes et de visages de la base de données et notons M_i le volume entre S_i et F_i . Un modèle cranio-facial de référence, disons M_0 , est choisi et rempli d'un matériau élastique. Il est mis en correspondance avec les autres

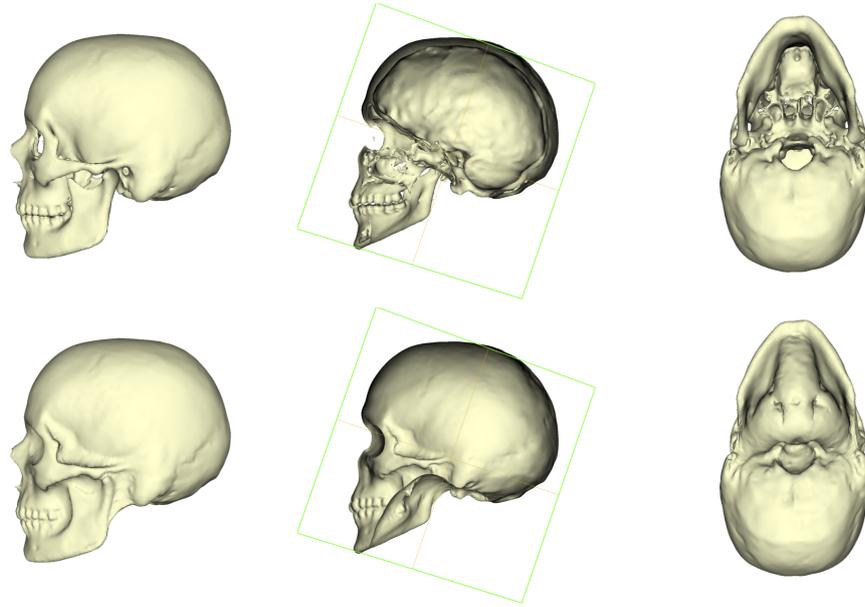


Figure 3.10 – En haut : Maillage 3d du crâne avant traitement. En bas : Une surface fermée enveloppant le crâne obtenue par la méthode décrite à la Section 3.3.3.

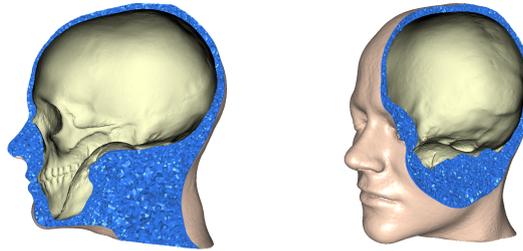


Figure 3.11 – Génération d'un masque 3d entre le crâne et le visage qui contient l'information sur les tissus mous.

$(M_i)_{i=1,\dots,N}$ grâce à la méthode d'appariement de formes décrite dans la Section 3.1, c'est-à-dire qu'on construit des u_i tels que :

$$M_i = (I + u_i)(M_0) \quad \text{pour tout } i = 1, \dots, N.$$

Soit maintenant u_0 le déplacement qui fait correspondre le crâne de référence S_0 au crâne cible inconnu S_T . Le masque M_i est déformé selon le déplacement U_i obtenu comme solution des équations de l'élasticité (3.6) associées à une condition de Dirichlet $U_i = -u_i + u_0$ sur la frontière du crâne et une condition de Neumann nulle imposée sur la frontière du visage. Voir un exemple d'une telle déformation sur la Figure 3.12. Cette étape produit N nouveaux visages, chacun d'eux étant obtenu en reliant un modèle cranio-facial spécifique M_i au crâne inconnu. Ces visages sont ensuite combinés (voir Remarque ci-dessous) pour prédire le visage le plus "plausible" associé au crâne inconnu.

Remarque Il faut noter que la méthode d'appariement de formes génère des maillages pour tous les modèles cranio-faciaux M_1, \dots, M_N qui partagent le même nombre d'éléments (sommets, tétraèdres) et la même connectivité. Le calcul d'une forme moyenne se transforme alors en une moyenne triviale sur les champs de vecteurs. Toute combinaison convexe w de la forme :

$$w = \sum_{i=1}^N \alpha_i u_i, \text{ avec } \alpha_i \in [0, 1] \text{ et } \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1, \quad (3.8)$$

définit une nouvelle forme W grâce à la relation :

$$W = (I + w)(M_0).$$

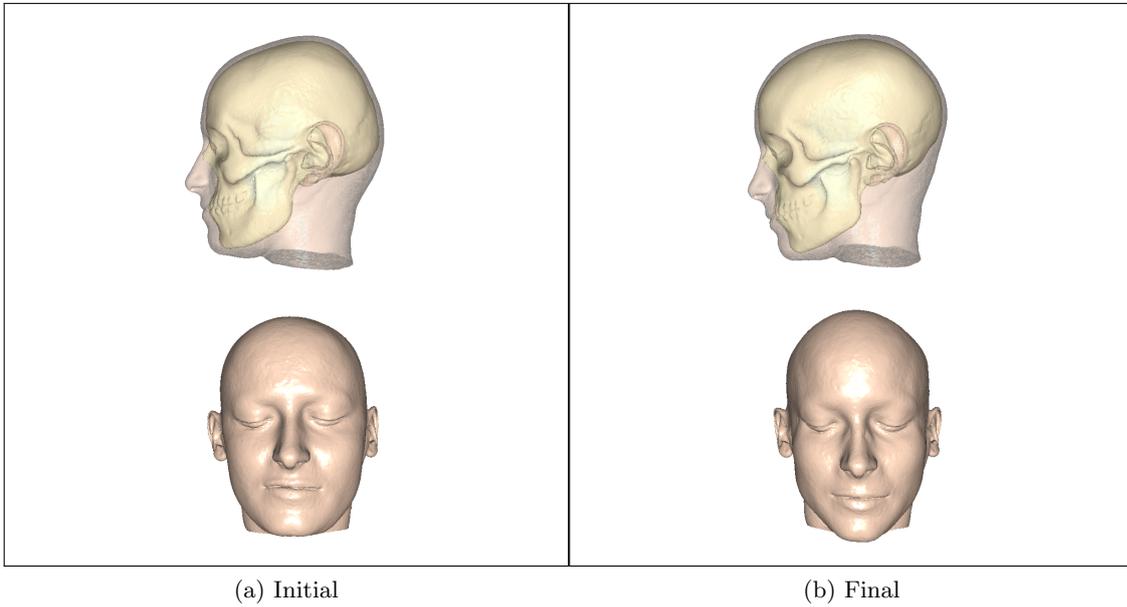


Figure 3.12 – Déformation élastique d'un masque 3d sous les effets du changement de crâne sous-jacent.

3.3.5 Résultats et discussion

Nous présentons ci-après un exemple de reconstruction : un individu est retiré de la base de données et une prédiction de son visage est générée à partir de la seule connaissance de son crâne. La Figure 3.13 montre le résultat de reconstruction faciale obtenu par notre approche pour $N = 25$ et des poids α_i identiques pour chacun des modèles cranio-faciaux de la base de données. La Figure 3.14 donne la distribution de l'erreur sur la surface pour cette reconstruction.

L'écart \mathcal{D} entre une surface Γ et une surface de référence Γ_0 est évaluée par l'erreur moyenne suivante :

$$\mathcal{D} = \left(\frac{1}{|\Gamma|} \int_{\Gamma} d^2(\gamma, \Gamma_0) d\gamma \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.9)$$

où $|\Gamma|$ est la mesure de Γ et $d(\cdot, \Gamma_0)$ est la distance euclidienne à Γ_0 . Les valeurs minimale, maximale et moyenne de l'erreur \mathcal{D} calculée dans la base de données sont indiquées dans le



Figure 3.13 – Un exemple de reconstruction. En haut : le visage original. En bas : le visage reconstruit.

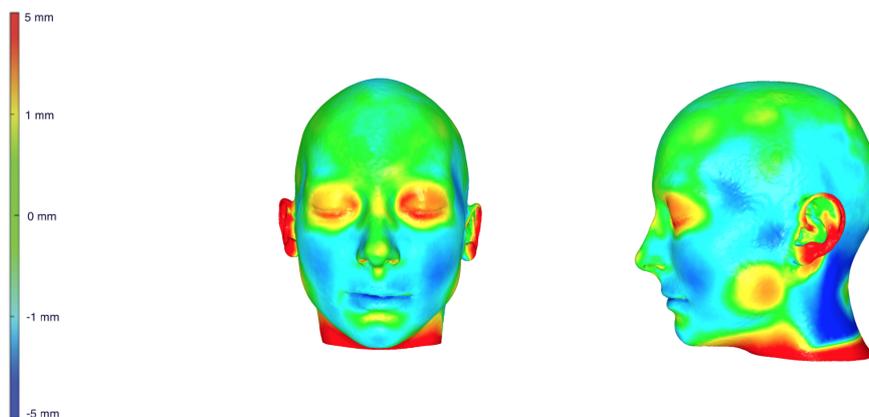


Figure 3.14 – Ecart en mm entre le visage reconstruit et le visage original pour le cas test de la Figure 3.13.

Tableau 3.2. En particulier, l'écart entre un visage de la base de donnée et le visage inconnu est toujours plus faible après déformation. Ainsi, la transformation élastique utilisée dans la méthode semble être un bon outil pour transporter les visages à proximité du visage inconnu. De plus, l'erreur entre le visage inconnu et le visage reconstruit est plus petite que l'erreur du

visage inconnu avec n'importe quel individu de la base de données.

Mesure de l'erreur \mathcal{D} entre ...	min	moyenne	max
(1) les crânes de la base de données et le crâne inconnu	4.46 mm	9.57 mm	17.3 mm
(2) les visages de la base de données et le visage inconnu	4.92 mm	7.82 mm	13.5 mm
(3) les visages après déformation et le visage inconnu	3.04 mm	5.01 mm	10.6 mm
(4) les visages de la base de données et le visage reconstruit	3.63 mm	8.20 mm	15.2 mm

Tableau 3.2 – Calcul de l'erreur \mathcal{D} définie en (3.9) entre les différentes formes en jeu dans le processus de reconstruction de la Figure 3.13.

Sur la carte de distribution de la Figure 3.14, on remarque que les erreurs se concentrent sur les oreilles, le cou, les yeux et les lèvres. Sur les régions restantes, l'erreur moyenne est inférieure à 1 millimètre. La comparaison avec les méthodes précédentes de reconstruction faciale est une tâche délicate tant elles dépendent de la base de données utilisée.

3.3.6 Perspectives

Même si les expériences ont été menées sur une petite collection de 26 individus, les résultats préliminaires obtenus sont très prometteurs. La méthode est simple à mettre en oeuvre et ne nécessite aucune correspondance *a priori*, ce qui permet un traitement automatique de la base de données. En pratique, l'acquisition de scanners crâniens complets de sujets sains reste un processus difficile. L'accès à une base de données adéquate de têtes complètes de sujets sains améliorerait énormément le résultat final. Cela a été l'une des contributions de la thèse de Lydie Uro [3-43], sous la direction de Yvon Maday et Thomas Schouman à l'hôpital de la Pitié-Salpêtrière.

La validation d'une méthode de reconstruction faciale est primordiale pour légitimer son utilisation lors d'une enquête criminelle. Puisque l'objectif final de la méthode est une identification positive, un test de reconnaissance peut être envisagé pour évaluer la capacité de prédiction de la méthode, comme cela est fait dans Claes *et al.* [3-11]. Un test de reconnaissance consiste à montrer à des volontaires le visage prédit ainsi qu'un ensemble de visages contenant le visage inconnu. Ensuite, le volontaire indique le (ou les) visage qui est le plus proche du visage prédit. Une telle étude pour notre méthode a été réalisée par Lydie Uro dans sa thèse [3-43] et les résultats seront publiés dans un prochain article.

Bibliographie

Chapitre 1

- [1-1] H. Ammari, E. Iakovleva, D. Lesselier and G. Perrusson. *MUSIC-type electromagnetic imaging of a collection of small three-dimensional inclusions*. SIAM Journal on Scientific Computing, 29:674–709, 2007. 29
- [1-2] H. Ammari and H. Kang. *Reconstruction of Small Inhomogeneities from Boundary Measurements*. Lecture Notes in Mathematics, 1846, Springer-Verlag, Berlin 2004. 29
- [1-3] H. Ammari, M.S. Vogelius and D. Volkov. *Asymptotic formulas for perturbations in the electromagnetic fields due to the presence of inhomogeneities of small diameter. II. The full Maxwell equations*. J. Math. Pures Appl. 80(8):769–814, 2001. 29
- [1-4] M. Asch and S. Mefire. *Numerical localizations of 3D imperfections from an asymptotic formula for perturbations in the electric fields*. Journal of Computational Mathematics 26(2):149–195, 2008. 29
- [1-5] F. Assous, M. Kray, F. Nataf and E. Turkel. *Time Reversed Absorbing Condition : Application to inverse problem*. Inverse Problems, 27:6:065003, 2011. 23
- [1-6] F. Assous, M. Kray, F. Nataf and E. Turkel. *Time reversed absorbing conditions*. Comptes Rendus Mathematiques, 348(19-20):1063–1067, 2010. 24
- [1-7] D. H. Baffet, M. J. Grote, J. H. Tang. *Adaptive Spectral Decompositions For Inverse Medium Problems*. Preprint 2020. 40, 41
- [1-8] J. Baumeister. *Stable solutions of inverse problems*. Braunschweig, 1987. 16
- [1-9] G. Bao and P. Li. *Numerical solution of an inverse medium scattering problem for Maxwell's Equations at fixed frequency*. J. of Comp. Phys. 228:4638–4648, 2009. 29
- [1-10] R. Beck, R. Hiptmair. *Multilevel solution of the time-harmonic Maxwell's equations based on edge elements*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 45(7):901–920, 1999. 36
- [1-11] F. Ben Hassen, K. Erhard and R. Potthast. *The singular sources method for 3D inverse acoustic obstacle scattering problems*. IMA Journal of Applied Mathematics, 75(1):1–16, 2010. 23
- [1-12] A. Bjork. *Least squares methods*. Handbook of Numerical Analysis, 1990. 16
- [1-13] M. Burger and S.J. Osher. *A survey on level set methods for inverse problems and optimal design*. European Journal of Applied Mathematics, 16(2):263–301, 2005. 23
- [1-14] F. Cakoni and D. Colton. *Qualitative methods in inverse scattering theory: an introduction*. Springer, 2006. 22
- [1-15] P. Caro, P. Ola and M. Salo. *Inverse boundary value problem for Maxwell equations with local data*. Comm. in PDE, 34:1425–1464, 2009. 29

- [1-16] M. Cassier and C. Hazard. *Multiple scattering of acoustic waves by small sound-soft obstacles in two dimensions: mathematical justification of the Foldy–Lax model*. Wave Motion, 50(1):18–28, 2013. 23
- [1-17] G. Chavent. *Nonlinear least squares for inverse problems*. Theoretical foundations and step-by-step guide for applications, Springer, 2009. 7
- [1-18] D. Colton, J. Coyle and P. Monk. *Recent developments in inverse acoustic scattering theory*. SIAM Review, 42(3):369–414, 2000. 22
- [1-19] D. Colton and A. Kirsch. *A simple method for solving inverse scattering problems in the resonance region*. Inverse Problems, 12(4):383–393, 1996. 23
- [1-20] D.L. Colton and R. Kress. *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*. Berlin Springer, 1998. 30
- [1-21] M. Darbas and S. Lohrengel. *Numerical reconstruction of small perturbations in the electromagnetic coefficients of a dielectric material*. J. of Comp. Math. 32(1):21–38, 2014. 29
- [1-22] A. J. Devaney. *On the stability of inverse problems*. unpublished manuscript, 2000. 23
- [1-23] H.W. Engl, M. Hanke and A. Neubauer. *Regularization of Inverse Problems*. Kluwer, Dordrecht, 120, 1996. 16
- [1-24] B. Engquist and A. J. Majda. *Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves*. Math. Comp., 31(139):629–651, 1977. 24
- [1-25] F. Faucher, O. Scherzer, H. Barucq. *Eigenvector models for solving the seismic inverse problem for the Helmholtz equation*, Geophys. J. Int., 221 :394–414, 2020. 40, 41
- [1-26] P.J. Frey, P.L. George. *Mesh Generation. Application to finite elements*. Wiley, London, 2008 (2nd ed.). 18
- [1-27] G.H. Golub and C. Reinsch. *Singular Value Decomposition and Least Squares Solutions*. Numerische Math., 14:403–420, 1970. 16
- [1-28] M. Graff-Kray, M. J. Grote, F. Nataf and F. Assous. *How to solve inverse scattering problems without knowing the source term : a three-step strategy*. Inverse Problems, 35(10), 2019. 40
- [1-29] M. J. Grote, M. Kray, U. Nahum. *Adaptive eigenspace method for inverse scattering problems in the frequency domain*, Inverse Probl., 33(2) :025006, 2017. 40
- [1-30] M. J. Grote, U. Nahum. *Adaptive eigenspace for multi-parameter inverse scattering problems*, Comput. Math. Appl., 77(12) :3264–3280, 2019. 40, 41
- [1-31] M. Grote and U. Nahum. *Adaptive Eigenspace Inversion for the Helmholtz Equation*. 12th International Conf. on Math. and Numerical Aspects of Wave Propagation, 178–179, 2015.
- [1-32] H. Haddar, A. Lechleiter and S. Marmorat. *An improved time domain linear sampling method for Robin and Neumann obstacles*. Applicable Analysis, 93(2):369–390, 2014. 23
- [1-33] H. Haddar and P. Monk. *The linear sampling method for solving the electromagnetic inverse medium problem*. Inverse Problems, 18:891–906, 2002. 29
- [1-34] F. Hecht. *New development in FREEFEM++*. J. Numer. Math., 20(3-4):251–265, 2012. 15
- [1-35] T. Hohage, *Fast numerical solution of the electromagnetic medium scattering problem and applications to the inverse problem*, Journal of Computational Physics, 214:224–238, 2006. 29
- [1-36] M. Ikehata. *Reconstruction of an obstacle from the scattering amplitude at a fixed frequency*. Inverse Problems, 14(4):949–954, 1998. 23

- [1-37] N. Irishina and A. Torrente. *Brain stroke detection by microwaves using prior information from clinical databases*. Abstract and Applied Analysis, 2013. 35
- [1-38] C.E. Kenig, M. Salo and G. Uhlmann. *Inverse problems for the anisotropic Maxwell equations*. Duke Math. J., 157:369–419, 2011. 29
- [1-39] M. Kern. *Méthodes numériques pour les problèmes inverses*. Mathématiques et Statistiques, ISTE Editions, 2016. 7
- [1-40] A. Kirsch. *An introduction to the mathematical theory of inverse problems*. Applied Mathematical Sciences, 120, 1991. 16
- [1-41] A. Lechleiter. *The factorization method is independent of transmission eigenvalues*. Inverse Problems and Imaging, 3(1):123–138, 2009. 23
- [1-42] J. C. Lin and M. J. Clarke. *Microwave imaging of cerebral edema*. Proceedings of the IEEE, 70(5):523–524, 1982. 35
- [1-43] J. Liu. *A multiresolution method for distributed parameter estimation*. SIAM J. Sci. Comput., 14, 1993. 16
- [1-44] C. D. Lines and S. N. Chandler-Wilde. *A Time Domain Point Source Method for Inverse Scattering by Rough Surfaces*. Computing, 75(2):157–180, 2005. 23, 26
- [1-45] A. Mordecai. *Nonlinear Programming : Analysis and Methods*. Dover Publishing, 2003. 21
- [1-46] V. A. Morozov. *Methods for solving incorrectly posed problems*. Springer, 1984. 16
- [1-47] S. Mustafa, B. Mohammed and A. Abbosh. *Novel preprocessing techniques for accurate microwave imaging of human brain*. IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters, 12:460–463, 2013. 35
- [1-48] T. Naeval, T. Mannseth, K. Brusdal and J. E. Nordtvedt. *Multiscale estimation with spline wavelets, with application to two-phase porous media flow*. Inverse Problems, 16, 2000. 16
- [1-49] U. Nahum. *Adaptive eigenspace for inverse problems in the frequency domain*. PhD thesis, University of Basel, 2016. 40
- [1-50] U. Nahum, C. Seppi, P. C. Cattin. *Joint Inverse Medium and Optimal Control Problem for Acoustic Waves*., Proceedings of the PASC’19, 2019. 40
- [1-51] U. Nahum, P. C. Cattin. *Adaptive Eigenspace Segmentation*. Preprint 2020. 40
- [1-52] J.-C. Nédélec. *Mixed finite elements in \mathbb{R}^3* . Numer. Math., 35:315–341, 1980. 31
- [1-53] P. Ola, L. Päiväranta and E. Somersalo. *An inverse boundary value problem in electrodynamics*. Duke Math. J. 70:617–653, 1993. 29
- [1-53] C. Pichot, P. Lobel, L. Blanc-Féraud, M. Barlaud, K. Belkebir, J.-M. Elissalt and J.-M. Geffrin. *Gradient and Newton-Kantorovich methods for microwave tomography*. Inverse Problems in Medical Imaging and Nondestructive Testing, 168–187, 1997. 35
- [1-55] R. Potthast. *Point Sources and Multipoles in Inverse Scattering Theory*. Chapman and Hall/CRC Research Notes in Mathematics, 2010. 23
- [1-56] L.I. Rudin, S. Osher, E. Fatemi. *Nonlinear total variation based noise removal algorithms*. Physica D : nonlinear phenomena, 60(1-4), 259–268, 1992. 40
- [1-57] C. Sanders, M. Bonnet, W. Aquino. *An Adaptive Eigenfunction Basis Strategy to Reduce Design Dimension in Topology Optimization*. Preprint 2020. 40

- [1-58] S. Semenov, B. Seiser, E. Stoegmann and E. Auff. *Electromagnetic Tomography for Brain Imaging: from virtual to human brain*. IEEE Conference on Antenna Measurements & Applications, 2014. 35
- [1-59] S. Y. Semenov and D. R. Corfield. *Microwave Tomography for Brain Imaging: feasibility Assessment for Stroke Detection*. International Journal of Antennas and Propagation, 2008. 35
- [1-60] A. Tarantola. *Inverse Problem Theory And Methods For Model Parameter Estimation*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2005. 22
- [1-61] A. Tychonoff. *On the stability of inverse problems*. Doklady Akademii Nauk SSSR, 39(5):195–198, 1943. 16
- [1-62] L. Xu, E. Bond, B. D. Van Veen and S. C. Hagness. *An overview of ultra-wideband microwave imaging via space-time beamforming for early-stage breast-cancer detection*. IEEE Antennas and Propagation Magazine, 47(1):19–34, 2005. 35
- [1-63] A. Zamani, A. Abbosh and A. T. Mobashsher. *Fast frequency-based multistatic microwave imaging algorithm with application to brain injury detection*. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 64(2):653–662, 2016. 35
- [1-64] J. Hadamard. *Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique*, Princeton University Bulletin, 49–52, 1902. 8

Chapitre 2

- [2-1] A. B. Bakushinskii, M. V. Klibanov and N. A. Koshev. *Carleman weight functions for a globally convergent numerical method for ill-posed Cauchy problems for some quasilinear PDEs*. Nonlinear Anal. Real World Appl., 34:201–224, 2017. 46
- [2-2] C. Bardos, G. Lebeau and J. Rauch. *Sharp sufficient conditions for the observation, control and stabilization of waves from the boundary*. SIAM J. Control and Optim., 30(5):1024–1065, 1992. 45
- [2-3] L. Baudouin. *Lipschitz stability in an inverse problem for the wave equation*. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00598876>, 2010. 44
- [2-4] L. Baudouin and S. Ervedoza. *Convergence of an inverse problem for a 1-D discrete wave equation*. SIAM J. Control Optim., 51(1):556–598, 2013. 54
- [2-5] L. Baudouin, S. Ervedoza and A. Osses. *Stability of an inverse problem for the discrete wave equation and convergence results*. J. Math. Pures Appl., 103(6):1475–1522, 2015. 54
- [2-6] L. Beilina and M. V. Klibanov. *Approximate global convergence and adaptivity for coefficient inverse problems*. Springer, New York, 2012. 46
- [2-7] L. Beilina and M.V. Klibanov. *Globally strongly convex cost functional for a coefficient inverse problem*. Nonlinear Anal. Real World Appl., 22:272–288, 2015. 46
- [2-8] M. I. Belishev. *Boundary control in reconstruction of manifolds and metrics (the BC method)*. Inverse Problems, 13(5), 1997. 44
- [2-9] J. Bercoff, M. Tanter and M. Fink. *Supersonic shear imaging: a new technique for soft tissue elasticity mapping*. IEEE Trans Ultrason Ferroelectr Freq Control., 51:396–409, 2004. 74
- [2-10] F. Boyer, F. Hubert and J. Le Rousseau. *Uniform controllability properties for space/time-discretized parabolic equations*. Numer. Math., 118(4):601–661, 2011. 72

- [2-11] F. Boyer and J. Le Rousseau. *Carleman estimates for semi-discrete parabolic operators and application to the controllability of semi-linear semi-discrete parabolic equations*. Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, 31(5):1035–1078, 2014. 72
- [2-12] A. L. Bukhgeim and M. V. Klibanov. *Uniqueness in the large of a class of multidimensional inverse problems*. Dokl. Akad. Nauk SSSR, 260(2):269–272, 1981. 44, 47, 68
- [2-13] S. Butterworth. *On the Theory of Filter Amplifiers*. Wireless Engineer, 7:536–541, 1930. 53
- [2-14] T. Carleman. *Sur un problème d’unicité pur les systèmes d’équations aux dérivées partielles à deux variables indépendantes*. Ark. Mat., Astr. Fys., 26(17):9, 1939. 47
- [2-15] N. Cîndea, E. Fernández-Cara and A. Münch. *Numerical controllability of the wave equation through primal methods and Carleman estimates*. ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations, 19(4):1076–1108, 2013. 52
- [2-16] D. Colton and R. Kress. *Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory*. Applied Mathematical Sciences, Berlin: Springer-Verlag, 1992. 22, 52
- [2-17] L. F. Ho. *Observabilité frontière de l’équation des ondes*. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 302(12):443–446, 1986. 45
- [2-18] O. Y. Imanuvilov and M. Yamamoto. *Global uniqueness and stability in determining coefficients of wave equations*. Comm. Partial Differential Equations, 26(7-8):1409–1425, 2001. 44
- [2-19] O. Y. Imanuvilov and M. Yamamoto. *Determination of a coefficient in an acoustic equation with a single measurement*. Inverse Problems, 19(1):157–171, 2003. 44, 60
- [2-20] O. Y. Imanuvilov and M. Yamamoto. *Carleman estimate and an inverse source problem for the Kelvin-Voigt model for viscoelasticity*. Inverse Problems, 35(12), 2019. 75
- [2-21] V. Isakov. *An inverse hyperbolic problem with many boundary measurements*. Comm. Partial Differential Equations, 16(6-7):1183–1195, 1991. 44
- [2-22] V. Isakov. *Inverse problems for partial differential equations*. Applied Mathematical Sciences, 127, Springer, New York, 2006. 52
- [2-23] V. G. Kamburg and M. V. Klibanov. *Globally strictly convex cost functional for an inverse parabolic problem*. Math. Methods Appl. Sci., 39(4):930–940, 2016. 46
- [2-24] M. V. Klibanov. *Inverse problems and Carleman estimates*. Inverse Problems, 8(4):575–596, 1992. 44
- [2-25] M. V. Klibanov. *Global convexity in a three-dimensional inverse acoustic problem*. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 28(6):1371–1388, 1997. 46
- [2-26] M. V. Klibanov. *Carleman estimates for global uniqueness, stability and numerical methods for coefficient inverse problems*. J. Inverse Ill-Posed Probl., 21(4):477–560, 2013. 44
- [2-27] M. V. Klibanov and A. Timonov. *Carleman estimates for coefficient inverse problems and numerical applications*. Inverse and Ill-posed Problems Series. VSP, Utrecht, 2004. 62
- [2-28] M. V. Klibanov and M. Yamamoto. *Lipschitz stability of an inverse problem for an acoustic equation*. Appl. Anal., 85(5):515–538, 2006. 60, 62
- [2-29] M. V. Klibanov, J. Li and W. Zhang. *Convexification of electrical impedance tomography with restricted Dirichlet-to-Neumann map data*. Inverse Problems, 35(3):, 2019. 46
- [2-30] D. A. Knoll and D. E. Keyes. *Jacobian-free Newton-Krylov methods: a survey of approaches and applications*. Journal of Computational Physics, 193(2):357, 2004. 72

- [2-31] I. Lasiecka, J.-L. Lions and R. Triggiani. *Nonhomogeneous boundary value problems for second order hyperbolic operators*. J. Math. Pures Appl. (9), 65(2):149–192, 1986. 44, 60
- [2-32] M.M. Lavrentiev, V.G. Romanov and S.P. Shishatskiĭ. *Ill-posed problems of mathematical physics and analysis*. Translations of Mathematical Monographs, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1986. 48
- [2-33] J.-L. Lions. *Contrôlabilité exacte, Stabilisation et Perturbations de Systèmes Distribués. Tome 1. Contrôlabilité exacte*. Masson, 1988. 45, 69
- [2-34] J. Ophir et al.. *Elastography: a quantitative method for imaging the elasticity of biological tissues*. Ultrasonic Imaging. 13(2):111-134, 1991. 74
- [2-35] J.-P. Puel and M. Yamamoto. *Generic well-posedness in a multidimensional hyperbolic inverse problem*. J. Inverse Ill-Posed Probl., 5(1):55–83., 1997 44
- [2-36] A. Savitzky and M. Golay. *Smoothing and Differentiation of Data by Simplified Least Squares Procedures*. Analytical Chemistry, 8(36):1627–1639, 1964. 53
- [2-37] A. V. Smirnov, M. V. Klibanov and L. H. Nguyen. *Convexification for a 1d hyperbolic coefficient inverse problem with single measurement data*. Inverse Problems and Imaging, 14(5):913-938, 2020. 46
- [2-38] N. T. Thành, L. Beilina, M. V. Klibanov and M. A. Fiddy. *Imaging of buried objects from experimental backscattering time-dependent measurements using a globally convergent inverse algorithm*. SIAM J. Imaging Sci., 8(1):757–786, 2015. 46
- [2-39] M. Yamamoto. *Uniqueness and stability in multidimensional hyperbolic inverse problems*. J. Math. Pures Appl. (9), 78(1):65–98, 1999. 44, 69
- [2-40] X. Zhang. *Explicit observability estimate for the wave equation with potential and its application*. R. Soc. Lond. Proc. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci., 456(1997):1101–1115, 2000. 48
- [2-41] E. Zuazua. *Propagation, observation, and control of waves approximated by finite difference methods*. SIAM Rev., 47(2):197–243, 2005. 54

Chapitre 3

- [3-1] G. Allaire. *Conception optimale de structures*. Mathématiques & Applications, 58, Springer Verlag, Heidelberg, 2006. 78
- [3-2] F. Bai, Z. Cheng, X. Qiao, Q. Deng, F. Duan and Y. Tian. *Face Reconstruction from Skull Based on Least Squares Canonical Dependency Analysis*. IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics, 2016. 90
- [3-3] R. Bajcsy and S. Kovacic. *Multiresolution elastic matching*. Computer Vision, Graphics and Image Processing, 46:1–21, 1989. 78
- [3-4] M.F. Beg, M.I. Miller, A. Trouvé and L. Younes. *Computing large deformation metric mappings via geodesic flows of diffeomorphisms*. Int. J. Comput. Vis., 61:139–157, 2005. 78
- [3-5] M. F. Beg. *Variational and computational methods for flows of diffeomorphisms in image matching and growth in computational anatomy*. PhD thesis, Johns Hopkins University, 2004. 78
- [3-6] S. Belongie, J. Malik and J. Puzicha. *Shape matching and object recognition using shape contexts*. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 24(4):509–522, 2002. 78

- [3-7] M. Berar, M. Desvignes, G. Bailly and Y. Payan. *3d semi-landmark-based statistical face reconstruction*. CIT, 14(1):31–43, 2006. 90
- [3-8] M. Chabanas, V. Luboz and Y. Payan. *Patient specific finite element model of the face soft tissues for computer-assisted maxillofacial surgery*. Med Image Anal., 7(2):131–51, 2003. 90
- [3-9] P.G. Ciarlet. *Mathematical Elasticity, vol I: Three Dimensional Elasticity*. North Holland Publishing Company, 1988. 81
- [3-10] A. Claisse and P. Frey. *A nonlinear PDE model for reconstructing a regular surface from sampled data using a level set formulation on triangular meshes*. Journal of Computational Physics, 230(12):4636–4656, 2011. 90
- [3-11] P. Claes, D. Vandermeulen, S. De Greef, G. Willems, J.G. Clement and P. Suetens. *Craniofacial reconstruction using a combined statistical model of face shape and soft tissue depths: Methodology and validation*. Forensic Science International, 159:147–158, 2006. 89, 90, 94
- [3-12] P. Claes, D. Vandermeulen, S. De Greef, G. Willems, J.G. Clement and P. Suetens. *Computerized craniofacial reconstruction: Conceptual framework and review*. Forensic Science International, 201(1-3):138–45, 2010. 88
- [3-13] C. Dapogny, C. Dobrzynski and P. Frey. *Three-dimensional adaptive domain remeshing, implicit domain meshing and applications to free and moving boundary problems*. J. Comput. Phys., 262:358–378, 2014. 89
- [3-14] F. Duan, D. Huang, T. Tian, K. Lu, Z. Wu and M. Zhou. *3D face reconstruction from skull by regression modeling in shape parameter spaces*. Neurocomputing, 151(2):674–682, 2015. 90
- [3-15] Y. Duan, L. Yang, H. Qin and D. Samaras. *Shape Reconstruction from 3D and 2D Data Using PDE-Based Deformable Surfaces*. European Conference on Computer Vision, 238–251, 2004. 90
- [3-16] P. Dupuis, U. Grenander and M.I. Miller. *Variational problems on flows of diffeomorphisms for image matching*. Q. Appl. Math., 56:587–600, 1998. 78
- [3-17] C. Dapogny and P. Frey. *Computation of the signed distance function to a discrete contour on adapted triangulation*. Calcolo, 49(3):193–219, 2012. 82
- [3-18] C. Dapogny, A. Faure, G. Michailidis, G. Allaire, A. Couvelas, and R. Estevez. *Geometric constraints for shape and topology optimization in architectural design*. Computational Mechanics, 59:933–965, 2017. 79
- [3-19] F. de Gournay. *Velocity extension for the level-set method and multiple eigenvalues in shape optimization*. SIAM J. on Control and Optim., 45(1):343–367, 2006. 81
- [3-20] J. Glaunès, A. Qiu, M. I. Miller and L. Younes. *Large deformation diffeomorphic metric curve mapping*. International journal of computer vision, 80:317–336, 2008. 78
- [3-21] J. Glaunès, A. Trounev and L. Younes. *Modeling planar shape variation via hamiltonian flows of curves*. Statistics and analysis of shapes, 335–361, 2006. 78
- [3-22] U. Grenander and M.I. Miller. *Computational anatomy: an emerging discipline*. Quart. Appl. Math., 56(4):617–694, 1998. 78
- [3-23] J. Hadamard. *Mémoire sur le problème d’analyse relatif à l’équilibre des plaques élastiques encastrées*. Bull. Soc. Math. France, 1907. 79
- [3-24] S. Haker, L. Zhu, A. Tannenbaum and S. Angenent. *Optimal mass transport for registration and warping*. International Journal of computer vision, 60:225–240, 2004. 78
- [3-25] A. Henrot and M. Pierre. *Variation et optimisation de formes, une analyse géométrique*. Mathématiques et Applications, 48, Springer, Heidelberg, 2005. 78, 86

- [3-26] M. Hilaga, Y. Shinagawa, T. Kohmura and T. L. Kunii. *Topology matching for fully automatic similarity estimation of 3d shapes*. 28th annual conference on Computer graphics and interactive techniques, 203–212, 2001. 78
- [3-27] M.W. Jones. *Facial Reconstruction Using Volumetric Data*. International Vision Modeling and Visualisation Conference, 2003. 90
- [3-28] S. C. Joshi and M. I. Miller. *Landmark matching via large deformation diffeomorphisms*. IEEE Transactions on Image Processing, 9:1357–1370, 2000. 78
- [3-29] V.A. Knyaz, S.Y. Zhelotov, D.G. Stepanyants and E.B. Saltykova. *Virtual face reconstruction based on 3D skull model*. SPIE Three-Dimensional Image Capture and Applications V., 4661:182–190, 2002. 89
- [3-30] B. Lévy. *A numerical algorithm for L_2 semi-discrete optimal transport in 3D*. ESAIM: Math. Model. Numer. Anal., 49(6):1693–1715, 2015. 78
- [3-31] J. Miller, D. Breen, W. Lorensen, R. O’Bara and M. Wozny. *Geometrically Deformed Models: A Method for Extracting Closed Geometric Models Form Volume Data*. 18th annual conference on Computer graphics and interactive techniques, 217–226, 1991. 90
- [3-32] S. Miyasaka, M. Yoshino, K. Imaizumi and S. Seta. *The computer-aided facial reconstruction system*. Forensic Science International, 74:155–165, 1995. 88
- [3-33] F. Murat and J. Simon. *Sur le contrôle par un domaine géométrique*. Technical Report RR-76015, Laboratoire d’Analyse Numérique, 1976. 79
- [3-34] C. Nardoni, *Mesh deformation strategies in shape optimization. Application to forensic facial reconstruction*. PhD thesis, Sorbonnes Université, 2017. 77
- [3-35] K. Nasreddine, A. Benzinou and R. Fablet. *Variational shape matching for shape classification and retrieval*. Pattern Recognition Letters, 31:1650–1657, 2010. 77
- [3-36] P. Paysan, M. Lúthi, T. Albrecht, A. Lerch, B. Amberg, F. Santini and T. Vetter. *Face reconstruction from skull shapes and physical attributes*. Lecture Notes in Computer Science, Pattern Recognition, 232-241, 2009. 90
- [3-37] J. Prag and R. Neave. *Making Faces: Using Forensic and Archaeological Evidence*. The Trustees of the British Museum, 1997. 88
- [3-38] K. Simon and R. Basri. *Elasticity-based matching by minimizing the symmetric difference of shapes*. IET Computer Vision, 12(4):412–423, 2015. 78
- [3-39] K. Simon, S. Sheorey, D. Jacobs and R. Basri. *A linear elastic force optimization model for shape matching*. Journal of Mathematical Imaging and Vision, 51:260–278, 2015. 78
- [3-40] D. Stalling, M. Westerhoff and H.C. Hege. *Amira: a Highly Interactive System for Visual Data Analysis*. The Visualization Handbook, 749–767, 2005. 88, 89
- [3-41] Z. Su, Y. Wang, R. Shi, W. Zeng, J. Sun, F. Luo and X. Gu. *Optimal mass transport for shape matching and comparison*. IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence, 37:2246–2259, 2015. 78
- [3-42] T.M. Tilotta, F.J.P. Richard, J.A. Glaunès, M. Berar, S. Gey, S. Verdille, Y. Rozenholc and J.F. Gaudy. *Construction and analysis of a head CT-scan database for craniofacial reconstruction*. Forensic Science International, 191(1-3):1–112, 2009. 88, 90
- [3-43] L. Uro. *Méthodes numériques appliquées à la Reconstruction Faciale : de la segmentation des images médicales à l’automatisation globale du processus d’optimisation*. PhD thesis, Sorbonnes Université, 2019. 94

- [3-44] D. Vandermeulen, P. Claes, D. Loeckx, S. De Greef, G. Willems and P. Suetens. *Computerized craniofacial reconstruction using CT-derived implicit surface representations*. Forensic Science International. 159(1):164–174, 2006. 89
- [3-45] R.C. Veltkamp. *Shape matching: Similarity measures and algorithms*. IEEE Shape Modeling and Applications, 188–197, 2001. 77
- [3-46] C. Wilkinson. *Computerized forensic facial reconstruction: A review of current systems*. Forensic Science, Medicine and Pathology, 1(3):173–177, 2005. 86
- [3-47] S. Zachow, E. Gladiline, H.C. Hege and P. Deuffhard. *Finite-Element Simulation for Soft Tissue Prediction*. Computer Assisted Radiology and Surgery, 23–28, 2000. 90
- [3-48] H.-K. Zhao, S. Osher and R. Fedkiw. *Fast surface reconstruction using the level set method*. IEEE Workshop on Variational and Level Set Methods in Computer Vision, 59:194–201, 2001. 85