Université Paris–Sud
Centre d'Orsay

Mathématiques
CAPES 2004 - Groupe 1

Feuille de géométrie 2

Barycentres

Le numéro suivant le numéro de l'exercice permet de placer l'exercice dans la progression de la partie 2 du polycopié.

1. **131.** Soient a, b et c trois points non alignés d'un plan affine. Soient g le barycentre de $\{(a,6),(b,-2)\}$ et ω le barycentre de $\{(a,2),(b,-1/2),(c,-1/2)\}$. Sur une figure, placer les points a, b, c, g et ω.

2. **133.** Montrer que les triangles abc et $a'b'c'$ ont même isobarycentre si et seulement si $\overrightarrow{aa'}+\overrightarrow{bb'}+\overrightarrow{cc'}=\vec{0}$.

3. **143.** Existe-t-il dans le plan affine quatre points a, b, c et m tels que m soit barycentre du système $\{(a,1),(b,1),(c,1)\}$ et barycentre du système $\{(a,2),(b,0),(c,2)\}$?

4. **164.** Soit un triangle abc et un point d sur le côté bc tel que $3\overrightarrow{bd}=\overrightarrow{bc}$. Déterminer un point m sur la droite (ab) tel que le milieu n de $[cm]$ soit sur la droite (ad).

5. **165.** Etant donné trois droites concourantes construire un triangle admettant ces droites comme médianes (utiliser 163).

6. **171 suite.** En utilisant **133** ou la double associativité du barycentre, montrer que les triangles abc et $a'b'c'$ ont même isobarycentre si a' (resp. b', c') est le milieu de $[b,c]$ (resp. $[c,a]$, $[a,b]$).

7. **172 suite.** Dessiner grandeur nature l'intersection du tétraèdre et du plan (abi') et les points intéressants contenus dans cette figure.

8. **173.** Consulter des livres de Terminale pour une multitude d'exercices sur le thème barycentre et tétraèdre.

9. **182.** Soit g l'isobarycentre d'un triangle abc. Ecrire le milieu de $[ag]$ comme barycentre des points a, b et c.

10. **183.** En utilisant **133** ou la double associativité du barycentre, montrer que les triangles abc et $a'b'c'$ ont même isobarycentre si a' (resp. b', c') est le milieu de $[b,c]$ (resp. $[c,a]$, $[a,b]$).

Attendre 374 pour démontrer le théorème de Céva (223) et faire les exercices suivants.

11. **224.** Soit (a,b,c) un repère du plan affine. On considère les points a', b' et c' de coordonnées barycentriques respectives $(0,2/3,1/3)$, $(3/4,0,1/4)$ et $(3/5,2/5,0)$. Les droites (aa'), (bb') et (cc') sont-elles concourantes ? Si oui, donner les coordonnées barycentriques du point de concours.

12. **Théorème de Gergonne.** Même situation que Céva, on suppose (aa'), (bb'), (cc') concourantes en m. Montrer que l'on a :

$$\frac{\overrightarrow{a'm}}{\overrightarrow{a'a}}+\frac{\overrightarrow{b'm}}{\overrightarrow{b'b}}+\frac{\overrightarrow{c'm}}{\overrightarrow{c'c}}=1.$$

Equations barycentriques de droites

13. **411.** On reprend les notations de 374. Caractériser sur leurs coordonnées barycentriques les points de la droite (aa') et ceux de la droite passant par m et parallèle à (bc).

14. On appelle D_a, D_b, D_c respectivement les droites passant par a, b, c et parallèles à $(bc), (ca), (ab)$. Caractériser sur leurs coordonnées barycentriques les points de de ces droites.

Soit a' le point d'intersection de D_b et D_c et, de même, b', c'. Calculer les coordonnées barycentriques de a', b', c' sur (a, b, c). Déterminer le milieu de $[b'c']$ et l'isobarycentre de a', b', c'.

15. Utiliser 4.1 pour donner une démonstration du Théorème de Ménélaus (IV.772).

16. Soient abc un triangle, f le milieu de $[ac]$, d le symétrique de b par rapport à c, h celui de b par rapport à a et g l'intersection de (bf) et (ad). Cette figure permet plusieurs formulations d'une même question et de ce fait plusieurs méthodes de résolution (équations cartésiennes ou barycentriques de droites, théorème de Céva).

Montrer que les droites (ch), (bf) et (ad) sont concourantes.
ou bien Montrer que la droite (cg) passe par h.

On peut aussi définir g comme l'intersection de (ch) et (ad) et demander de montrer que (bf) passe par g.

Barycentres, aires et triangle

17. Soit un triangle abc dans un plan affine P. Soit m un point du plan. Une base $\mathcal{B}$ de $\vec{P}$ étant donnée, on appelle **aire algébrique du triangle** construite sur les vecteurs $\overrightarrow{ma}$ et $\overrightarrow{mb}$ dans cet ordre le nombre réel $\frac{1}{2}\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{ma}, \overrightarrow{mb})$ que l'on notera $\mathcal{A}$alg (mab). On pose :

$$\alpha_0 = \mathcal{A}\text{alg(mbc)} \quad , \quad \beta_0 = \mathcal{A}\text{alg(mca)} \quad \text{et} \quad \gamma_0 = \mathcal{A}\text{alg(mab)}.$$

- **(a)** Montrer que m est barycentre de (a, α_0), (b, β_0) et (c, γ_0).
- **(b)** On se place maintenant dans le plan affine euclidien et on suppose que m est dans l'intérieur du triangle. Pour retrouver le résultat précédent :
  Utiliser le produit vectoriel en Terminale.
  Utiliser la définition de l'aire géométrique d'un triangle à l'aide de la hauteur au collège. (On pourra commencer par le cas où m est sur un côté du triangle.)
- **(c)** Application. Montrer que les médianes et les côtés d'un triangle définissent six petits triangles de même aire.

Convexité

18. **Point extrémal d'un convexe.** On appelle *point extrémal* d'un convexe C un point m de C tel que pour tout segment $[pq]$ contenu dans C et contenant m, on ait $m = p$ ou $m = q$.

- **(a)** Montrer qu'un point m de C est extrémal si et seulement si l'ensemble C privé de m est convexe.
- **(b)** Montrer qu'un point m de C est extrémal si et seulement s'il vérifie la propriété :

si m est milieu d'un segment $[pq]$ contenu dans C, alors les points p et q sont confondus (en m bien sûr).

19. **Centre du cercle inscrit.** Montrer que le centre ω du cercle inscrit au triangle abc est barycentre de (a, bc), (b, ca) et (c, ab) (on rappelle que ω est équidistant des droites portant les côtés du triangle).

20. **Orthocentre.** Montrer que l'orthocentre du triangle abc (dans le cas où ce triangle n'est pas rectangle) est barycentre de $(a, \tan \hat{a})$, $(b, \tan \hat{b})$ et $(c, \tan \hat{c})$ où $\hat{a}$ est l'angle géométrique en a dans le triangle abc. (Ici il me semble plus simple de raisonner directement par la méthode habituelle : vérifier que le pied a' de la hauteur issue de a est barycentre de $\{(b, \tan \hat{b}), (c, \tan \hat{c})\}$. Attention aux différents cas de figure.)

21. **Centre du cercle circonscrit.** Montrer que le centre o du cercle circonscrit au triangle abc est barycentre de $(a, \sin 2\hat{a})$, $(b, \sin 2\hat{b})$ et $(c, \sin 2\hat{c})$ où $\hat{a}$ est l'angle géométrique en a dans le triangle abc. (Si on veut faire une démonstation utilisant uniquement des aires géométriques, on considére d'abord le cas où o est dans le triangle abc puis dans le cas où o n'est pas du même côté de (bc) que a, on applique le résultat précédent au triangle $a'bc$ où a' est l'autre point d'intersection de (ao) avec le cercle circonscrit.)