Université Paris–Sud
Centre d'Orsay

Mathématiques
CAPES 2004 - Groupe 1

Feuille de géométrie 3

Applications affines

1. Soient a', b', c' des points distincts d'un plan affine E vérifiant : $c' = a' + 2\overrightarrow{a'b'}$. Combien d'applications affines f de E dans E vérifient :

$$f(a) = a', \quad f(b) = b', \quad f(c) = c'$$

dans chacun des cas suivants :
(i) a, b, c forment un repère de E.
(ii) $a \neq b$ et $c = a + 2\overrightarrow{ab}$.
(iii) $a \neq c$ et $b = a + 2\overrightarrow{ac}$.

2. **Projections et symétries en coordonnées.** Dans le plan affine $E = \mathbb{R}^2$ muni de sa structure canonique d'espace affine, on considère D la droite d'équation $x - 2y + 1 = 0$, les points $a = (2, 3)$ et $b = (4, 1)$. On note D' la droite (ab), p la projection sur D parallèment à D' et σ la symétrie par rapport à D' parallélement à la direction de D.
(**a**) Montrer que $D \cap D'$ est réduit à un point c.
(**b**) Soit $m = (\alpha, \beta)$ un point de $\mathbb{R}^2$, déterminer $p(m)$ et $\sigma(m)$.

3. **Application affine définie par un barycentre.** Soient a, b et c trois points distincts d'un espace affine E et σ un triplet (α, β, γ) de $\mathbb{R}^3$ tel que la somme $\alpha+\beta+\gamma$ soit différente de -1. On note f_σ l'application de E dans E qui à un point m associe le point m' barycentre de $\{(a, \alpha), (b, \beta), (c, \gamma), (m, 1)\}$.
(**a**) Montrer que f_σ est une application affine et préciser la nature de f_σ suivant la valeur de σ.
(**b**) Soit un vecteur $\vec{v}$ de $\vec{E}$. Existe-t-il une valeur de σ telle que f_σ soit la translation de vecteur $\vec{v}$?
(**c**) Soient un point ω de E et un réel λ non nul. Existe-t-il une valeur de σ telle que f_σ soit l'homothétie de centre ω et de rapport λ ?

4. **Affinités.** Dans le plan affine E, on considère une droite affine $\Delta = a + \mathrm{Vec}\,\{\vec{u}\}$, une direction de droite $\vec{D} = \mathrm{Vec}\,\{\vec{v}\}$ distincte de $\vec{\Delta}$ et λ un réel différent de 0 et de 1. On appelle **affinité** d'axe Δ, de direction $\vec{D}$ et de rapport λ, l'application $A = A(\Delta, \vec{D}, \lambda)$ définie E dans E par : pour $x \in E$, le point $y = A(x)$ vérifie $\overrightarrow{my} = \lambda\overrightarrow{mx}$ où m est la projection de x sur Δ parallèlement à $\vec{D}$.
(**a**) Déterminer les points fixes de A.
(**b**) Soit $x \in E$, exprimer $\overrightarrow{ax}$ et $\overrightarrow{aA(x)}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$. En déduire que A est une application affine. Quelle est la matrice de $\vec{A}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$? Montrer que A est bijective et déterminer A^{-1}. Préciser les valeurs propres et les sous-espaces propres de $\vec{A}$. Quelle est la nature de A si $\lambda = -1$?
(**c**) Déterminer les droites stables par A.

Réciproquement, soit $A \in GA(E)$ une application affine, ayant un point fixe a, et telle que $\vec{A}$ admette les valeurs propres 1 et λ avec $\lambda \neq 1$ (une telle application linéaire est appelée une **dilatation**). Montrer que A est une affinité que l'on précisera.

5. **Transvections.** On appelle **transvection** d'axe $\Delta = (ab)$ une application **affine** T de E dans E, différente de l'identité, qui fixe la droite Δ et qui laisse stable une droite $\Delta' = c + \vec{\Delta}$ parallèle à Δ et distincte de Δ. On pose $\overrightarrow{ab} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{ac} = \vec{v}$, de sorte que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\vec{E}$.

(a) Montrer qu'on a $\vec{T}(\vec{u}) = \vec{u}$ et $\vec{T}(\vec{v}) = \vec{v} + \lambda\vec{u}$ avec $\lambda \in \mathbf{R}^*$.

(b) Quelle est la matrice de $\vec{T}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$? Montrer que T est bijective. Préciser les valeurs propres et les sous-espaces propres de $\vec{T}$, ainsi que son déterminant. Cette application linéaire est-elle diagonalisable ?

(c) Déterminer les points fixes de T et les droites stables par T.

Réciproquement, soit $T \in GA(E)$ une application affine, ayant un point fixe a, et telle que $\vec{T}$ admette la valeur propre 1 double et soit distincte de $\mathrm{Id}_{\vec{E}}$ (une telle application linéaire est appelée une **transvection vectorielle**). Montrer que T est une transvection dont on précisera l'axe.

6. **4.2.2.Théorème de Thalès.** Les élèves de quatrième connaissent les propriétés de la droite des milieux dans un triangle. En utilisant ces propriétés montrer que si trois droites parallèles découpent des segments de même longueur sur une sécante, il en est de même sur toute sécante. En déduire le théorème de Thalès (4.2) pour les rapports rationnels.

7. **Théorème de Thalès dans un quadrilatère complet.** Dans le plan affine, on considère quatre points distincts b, b', c et c' tels que les droites (bc) et $(b'c')$ soient parallèles, les droites (bb') et (cc') (respectivement (bc') et (cb')) soient concourantes en a (resp. en g). Etudier le produit $h_g \circ h_a$ des homothéties fournies par le théorème de Thalès. En déduire que la droite (ag) passe par les milieux de $[bc]$ et de $[b'c']$.

8. **6.2.1 bis.** Décrire le sous-groupe de $GA(E)$ engendré par les symétries centrales.

9. **6.5.8.** Dans le groupe $GA(E)$, quelles sont les applications qui commutent à $t_{\vec{u}}$? à $h(c, \lambda)$? Déterminer le centre de $GA(E)$.

10. **Les milieux des lignes polygonales.** Soit n un entier ≥ 3 et $a_1, \ldots, a_n \in E$. Le problème est de trouver une ligne polygonale fermée dont les a_i soient les milieux des côtés, i.e., des points $x_1, \ldots, x_n$ tels que, pour tout i, a_i soit le milieu de $x_i x_{i+1}$ (on convient que $x_{n+1} = x_1$).

(a) On suppose n impair. Montrer que le problème a une solution unique (utiliser les symétries σ_{a_i}). Indiquer une construction des points x_i et la réaliser pour $n = 3$ et $n = 5$.

(b) On suppose n pair, $n = 2p$. Montrer que le problème n'a pas de solution, sauf si on a la relation vectorielle

$$\sum_{i=1}^{p} \overrightarrow{a_{2i}a_{2i-1}} = \overrightarrow{0}, \qquad (*)$$

auquel cas, pour tout point de départ $x_1 \in E$ on a une solution $x_1, \ldots, x_n$ et une seule. Que signifie la condition $(*)$ pour $n = 4$? On se donne cinq points a_i, $i = 1, \cdots, 5$. Construire un sixième point a_6 tel que le problème ait une solution.

11. Soient s et s' deux symétries droite du plan affine E et f le produit $s' \circ s$. A quelles conditions f est-elle une homothétie, une translation, une symétrie ? Décrire f dans chacun des cas ?

12. **6.5.9.** Déterminer le centre de $GA(E)$.

13. Soient k et k' deux réels non nuls de produit différent de 1 et a un point d'un espace affine E. A tout point m de E, on associe l'unique point fixe, noté g(m), de l'application $h(a,k) \circ h(m,k')$. Montrer que l'application g ainsi définie est affine et caractériser g (on évitera de calculer $h(a,k) \circ h(m,k')$).

14. Soient un triangle abc et e un point de $[ab]$. La droite parallèle à (bc) passant par e coupe (ac) en f. On appelle i le milieu de $[bc]$, j le milieu de $[ef]$ et d le point d'intersection des droites (ec) et (bf). On note h_a (resp. h_d) l'homothétie de centre a (resp. c) qui transforme b en e (resp. e en c).

i) Déterminer $h_a(c)$ puis $h_d(f)$.

ii) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de $h_d \circ h_a$ puis de $h_a \circ h_d$.

iii) On appelle e' l'image de e par h_a et e" l'image de e' par h_d. Construire e' et e".

iv) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $h_d \circ h_a \circ h_a \circ h_d$.

v) Montrer que le quadrilatère $bece$" est un parallèlogramme.

15. Etant donné un triangle abc, construire trois points a', b' et c' tels que b' soit le milieu de $[ac']$, c' celui de $[ba']$ et a celui de $[cb']$. (On construira b' comme le centre d'une homothétie.)