

Algèbre linéaire

Marie-Claude DAVID, Myriam DÉCHAMPS

Marie-Claude.David@math.u-psud.fr

10 décembre 2002

Ce document, destiné à nos collègues enseignants, réunit des exercices d'algèbre linéaire utilisés en M1MIAS décalé par les auteurs de 1992 à 1995. Les exercices mélangeant polynômes et algèbre linéaire sont dans le document Paul. Les sources latex sont disponibles.

Table des matières

1	Espaces vectoriels	3
1.1	Structure d'espace vectoriel	3
1.2	Indépendance linéaire, base	3
1.3	Sous-espaces vectoriels	5
1.4	Hyperplan	9
2	Applications linéaires	11
2.1	Notion de linéarité	11
2.2	Applications linéaires, prolongement par linéarité, isomorphismes	14
2.3	Projecteurs	16
2.4	Notion de rang	17
2.5	Exercices plus difficiles	17
3	Matrices	18
3.1	Matrice d'une application linéaire	18
3.2	Calcul matriciel	23
3.3	Changement de base	26
4	Déterminants	29
4.1	Calcul de déterminants de petite taille.	29
4.2	Calcul de déterminants en dimension n	30



Accueil

Page de Titre

Sommaire



Page 3 de 41

Retour

Plein écran

Fermer

Quitter

4.3 Applications des déterminants.	30
--	----

5 Systèmes linéaires	31
-----------------------------	-----------

5.1 Sur le théorème de caractérisation des solutions d'un système linéaire	31
5.2 Matrices échelonnées et rôle des coefficients nuls	33
5.3 Discussion et résolution de systèmes linéaires	33
5.4 Applications de la méthode de Gauss	34

6 Réduction des endomorphismes	38
---------------------------------------	-----------

6.1 Matrices	38
6.2 Endomorphismes	39
6.3 Applications	41

Les macros utilisées dans le fichier Latex de ces exercices sont disponibles au début du fichier source.

1. Espaces vectoriels

1.1. Structure d'espace vectoriel

1.1.1. **SOURCE** On définit sur $E = \mathbb{R}^2$

– l'addition $\oplus$ par

$$(x, z) \oplus (x', z') = (x + x', z + z')$$

– la multiplication externe $\odot$, ayant $\mathbb{R}$ comme corps des scalaires, par

$$\lambda \odot (x, z) = (2x, 0).$$

E muni de ces deux lois est-il un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$?

1.1.2. **SOURCE** Pour x et y alors $\mathbb{R}_+^*$ et λ réel, on pose

$$x \oplus y = xy \quad \text{et} \quad \lambda \odot x = x^\lambda.$$

Montrer que $(\mathbb{R}_+^*, \oplus, \odot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

1.2. Indépendance linéaire, base

1.2.1. *Indépendance linéaire.* **SOURCE**

Soit $\{x, y, z, t\}$ une famille libre d'éléments d'un espace vectoriel E . Les éléments suivants sont-ils linéairement indépendants ?

- a. $x, 2y$ et z
- b. x et z
- c. $x, 2x + t$ et t
- d. $3x + z, z$ et $y + z$
- e. $2x + y, x - 3y, t$ et $y - x$.

1.2.2. Base de $\mathbb{C}$. SOURCE

Soit E l'ensemble des nombres complexes considéré comme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

- a. Quelle est la dimension de E ?
- b. Soit $z = a + ib \in E$. A quelle condition z et $\bar{z}$ forment-ils une base de E ? Dans ce cas, x et y étant des réels donnés, calculer les composantes λ et μ de $x + iy$ dans la base $(z, \bar{z})$.

1.2.3. SOURCE

Soient a, b, c trois réels positifs distincts. On note f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f_a(x) = \ln(ax)$$

Montrer que $\{f_a, f_b, f_c\}$ est une partie liée de $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$.

1.3. Sous-espaces vectoriels

1.3.1. SOURCE Soit E le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}$. Quels sont les sous-espaces vectoriels de E ?

1.3.2. Le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}$. SOURCE

- Montrer que $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$.
- $\mathbb{R}$ est-il un sous-espace du $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}$?
- Même question pour $\{\lambda(a + bi) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ où $a + bi \in \mathbb{C}$ est fixé.

1.3.3. Le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}$. SOURCE

Soit E le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}$.

- Montrer que E est engendré
 - par les vecteurs 1 et i
 - par les vecteurs 1 et j .
- Déterminer des systèmes générateurs de E^2 et E^3 .
- Que peut-on dire si l'on considère $\mathbb{C}$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{C}$?

1.3.4. SOURCE Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E .

- Démontrer : $F \cup G$ est un s.e.v. de $E \Leftrightarrow F \subset G$ ou $G \subset F$.
- En déduire que si $F \neq E$ et $G \neq E$, alors $F \cup G \neq E$.

1.3.5. SOURCE Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, les sous-ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

a. $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - 4z = 0\}$

b. $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 1\}$

(c) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy - z = 0\}$

c. $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y = 0 \quad \text{et} \quad z - x = 0\}$

d. $E = \{(\alpha, \beta, 3\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \beta \in \mathbb{R}\}$

e. $F_c = \{(\alpha + c, -\alpha, \alpha + \beta) \mid \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \beta \in \mathbb{R}\}$ avec $c \in \mathbb{R}$ fixé.

Déterminer (s'il y a lieu) des systèmes générateurs, décider si le sous-espace est une droite ou un plan de $\mathbb{R}^3$, donner les équations paramétriques et cartésiennes.

1.3.6. SOURCE Dans $\mathbb{R}^3$, montrer que le sous-espace engendré par $u = (2, 0, -1)$ et $v = (3, 2, -4)$ coïncide avec le sous-espace engendré par $w = (1, 2, -3)$ et $t = (0, 4, -5)$.

1.3.7. SOURCE Soit α un paramètre réel, soient F et G_α les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ définis par les équations :

$$F : x - y + z = 0$$

$$G_\alpha : \begin{cases} 3x - 2z = 0 \\ y - \alpha z = 0 \end{cases}$$

Déterminer des systèmes générateurs de F , G , $F \cap G$ et $F + G$ et des équations paramétriques et cartésiennes de ces sous-espaces. Interpréter géométriquement les résultats.

1.3.8. SOURCE Pour λ paramètre réel, on appelle P_λ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $u = (2, 5, 1, 3)$ et $v_2 = (4, 10, \lambda, 6)$.

- Donner une condition nécessaire et suffisante sur λ pour que P_λ soit un plan.
- Déterminer, pour tout λ , les équations cartésiennes et paramétriques de P_λ .

Soit D_μ la droite de $\mathbb{R}^4$ engendrée par le vecteur $w_\mu = (\mu, 15, \mu, 9)$.

- Donner les équations cartésiennes de D_μ
- A quelles conditions sur λ et μ , D_μ est contenue dans P_λ ?

1.3.9. SOURCE Soit G le sous-espace de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs :

$$u = (1, -1, 2, -2) \quad v = (4, 0, 1, -5) \quad w = (3, 1, -1, -3)$$

Soit $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y = 0 \text{ et } x - y + z + 2t = 0\}$.

- Déterminer la dimension de G .
- Montrer que H est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$ et déterminer sa dimension.
- Déterminer les dimensions des sous-espaces $G \cap H$ et $G + H$.
- Trouver un sous-espace F de $\mathbb{R}^4$ tel que $(G + H) \oplus F = \mathbb{R}^4$.

1.3.10. SOURCE

- a. Soit E le sous-espace de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs :

$$u = (1, 2, -1, -1) \quad \text{et} \quad v = (2, 3, 0, -1)$$

Calculer la dimension de E .

- b. Soit F le sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$ formé des vecteurs (x_1, x_2, x_3, x_4) tels que $3x_1 - x_3 = 0$ et $x_1 + x_3 - x_4 = 0$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
- c. Calculer les dimensions de $E \cap F$ et du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, $E + F$, engendré par $E \cup F$.

1.3.11. SOURCE

Soient les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$:

$$u = (-1, 0, 3, -9) \quad v = (3, -4, 3, 7) \quad w = (7, -12, 15, 3)$$

$$a = (1, -1, 0, 4) \quad b = (1, 0, 3, -1).$$

- a. Montrer que v (resp. w) appartient au sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $\{a, u\}$ (resp. $\{u, v\}$).
- b. Notons F (resp. G) le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $\{u, v, w\}$ (resp. $\{a, b\}$). Déterminer la dimension et une base des sous-espaces $F, G, F \cap G$ et $F + G$ (cette question ne nécessite pas de calculs, si on utilise des arguments de dimension).

- c. Montrer que la droite H de $\mathbb{R}^4$ engendré par le vecteur $t = (1, -1, 1, 1)$ est un supplémentaire de $F + G$. En déduire un supplémentaire de chacun des sous-espaces $F \cap G$, F et G .
- d. Donner une interprétation géométrique des résultats trouvés.

1.3.12. SOURCE

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur K , on considère E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E de dimensions respectives n_1 et n_2 .

- a. Donner un encadrement de $\dim(E_1 \cap E_2)$ et de $\dim(E_1 + E_2)$.
- b. Montrer l'égalité :

$$\dim(E_1 + E_2) + \dim(E_1 \cap E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2)$$

(Suggestion : considérer une base $\mathcal{B}_0$ de $E_1 \cap E_2$, la compléter en une base $\mathcal{B}_1$ de E_1 en une base $\mathcal{B}_2$ de E_2 ; extraire de $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ une base de $E_1 + E_2$).

1.4. Hyperplan

1.4.1. SOURCE

On appelle **hyperplan (vectoriel)** de E tout sous-espace vectoriel de E de dimension $n - 1$. On considère deux hyperplans distincts de E : F et G . Déterminer la dimension de $F \cap G$ par les deux méthodes suivantes :

- a. Utiliser l'exercice 1.3.12.

b. Montrer qu'il existe deux vecteurs a et b de E tels que :

$$a \in F, \quad a \notin G, \quad b \in G \quad \text{et} \quad b \notin F$$

Montrer que le sous-espace vectoriel de E engendré par a et b est un supplémentaire de $F \cap G$.

1.4.2. SOURCE

Soit E un espace vectoriel réel de dimension n .

a. Montrer que si f est une forme linéaire non nulle sur E , alors $\ker f$ est un hyperplan de E , c'est-à-dire un sous-espace vectoriel de E de dimension $n - 1$. Montrer qu'il existe des réels $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ non tous nuls tels que :

$$u = (x_1, \dots, x_n) \in \ker f \iff \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0$$

- b. Soit $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x - 2y + z - t = 0\}$. Montrer que H est un hyperplan de $\mathbb{R}^4$. Existe-t-il une forme linéaire f sur $\mathbb{R}^4$ telle que $H = \ker f$?
- c. Soit H un hyperplan de E . Montrer qu'il existe une forme linéaire sur E telle que $\ker f = H$. (On pourra compléter une base de H et définir f sur cette base). f est-elle unique ?
- d. Vérifier qu'un hyperplan H de E peut être défini par une des trois conditions équivalentes suivantes :

- (i) H est un sous espace vectoriel de E de dimension $n - 1$.
- (ii) H est le noyau d'une forme linéaire non nulle sur E .
- (iii) H est l'ensemble des solutions d'une équation linéaire de la forme $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0$ où $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}_n$ et $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq (0, \dots, 0)$. (On dit que cette équation est une **équation cartésienne** de l'hyperplan H).

e. Quelle est l'équation cartésienne d'un hyperplan de $\mathbb{R}^3$?

f. Montrer l'équivalence des définitions suivantes :

- (j) D est une droite de $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire un sous-espace de dimension 1.
- (jj) D est l'ensemble des solutions d'un système linéaire

$$(*) \begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ a'x + b'y + c'z = 0 \end{cases}$$

où (a, b, c) et (a', b', c') ne sont pas colinéaires.

((*) est un système d'équations cartésiennes de D).

2. Applications linéaires

2.1. Notion de linéarité

2.1.1. SOURCE On note $\mathcal{C}([0, 1])$ (resp. $\mathcal{C}^1([0, 1])$) le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions définies et continues (resp. ayant une dérivée continue) de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ et E_n est le sous-espace de $\mathbb{C}[X]$ des polynômes de degré au plus n .

Parmi les applications suivantes lesquelles sont linéaires. Déterminer, pour chacune de celles-ci, son noyau et son image et, dans le cas d'espaces de dimension finie, sa matrice. Dire si l'application est injective, surjective, bijective.

$$f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x) = 2x^2$$

$$f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_2(x) = 4x - 3$$

$$f_3 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f_3(x, y) = (0, x)$$

$$f_4 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f_4(x, y) = (y, x)$$

$$f_5 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f_5(x, y) = \sqrt{3x^2 + y^2}$$

$$f_6 : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}, f_6(z, z') = 3z - iz'$$

$$f_7 : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}, f_7(z, z') = zz'$$

$$f_8 : \mathcal{C}([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}, f_8(g) = g(1)$$

$$f_9 : \mathcal{C}([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}, f_9(g) = |g|$$

$$f_{10} : \mathcal{C}^1([0, 1]) \rightarrow \mathcal{C}([0, 1]), f_{10}(g) = gg'$$

$$f_{11} : \mathcal{C}([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}, f_{11}(g) = \max\{g(t), t \in [0, 1]\}$$

$$f_{12} : E_n \rightarrow E_n, f_{12}(P) = P'$$

$$f_{13} : \mathcal{C}([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}, f_{13}(g) = g'(\frac{1}{2}) + \int_0^1 g(t)dt$$

$$f_{14} : E_n \rightarrow E_n, f_{14}(P) = XP$$

$$f_{15} : E_n \rightarrow E_n, f_{15}(P) = P(2)$$

$$f_{16} : E_n \rightarrow E_n, f_{16}(P) = XP + 1$$

2.1.2. SOURCE

- Tracer le graphe d'une application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ injective et non surjective.
- Tracer le graphe d'une application g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ surjective et non injective.
- Tracer le graphe d'une application linéaire h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ injective et non surjective (resp. surjective et non injective).
- Montrer que les applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont les applications de la forme : $x \rightarrow \alpha x$ où α est un réel fixé.

2.1.3. SOURCE Soient E un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$ et (e_1, e_2, e_3) une base de E . On considère deux endomorphismes u et v de E définis par :

$$u(e_1) = u(e_2) = u(e_3) = e_1 + e_2 + e_3$$

$$v(e_1) = e_2, \quad v(e_2) = e_3, \quad v(e_3) = e_1$$

- Montrer que l'on a $u \circ v = v \circ u = u$.
- Pour p et q des entiers naturels non nuls, calculer u^2 , v^3 puis u^p et v^q en fonction de u , v , v^2 .

2.1.4. SOURCE Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$. Soit un vecteur x tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$. Montrer que $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une base de E .

2.2. Applications linéaires, prolongement par linéarité, isomorphismes

2.2.1. **SOURCE** Soit E_1 l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 1.

- Quelles sont les bases canoniques des espaces vectoriels $E_1, \mathbb{R}^2, \mathbb{C}$?
- Montrer que le choix de ces bases permet d'identifier ces trois espaces, on dit qu'il sont isomorphes.
- Soit T l'endomorphisme de E_1 défini par $T(P) = P'$. Quel endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ (resp. de $\mathbb{C}$) l'endomorphisme T induit-il par l'isomorphisme défini en (b) ?

2.2.2. **SOURCE** Dans chacun des cas suivants, vérifier s'il existe une application linéaire T_i de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ vérifiant les conditions données :

- $T_1((1, -1)) = (2, 3) \quad T_1((2, -2)) = (3, 2)$
- $T_2((1, -1)) = (2, 3) \quad T_2((1, 1)) = (3, 2)$
- $T_3((1, -1)) = (2, 3) \quad T_3((3, -3)) = (6, 9)$

2.2.3. **SOURCE** Soient E un espace vectoriel réel de dimension 3, (e_1, e_2, e_3) une base de E et λ un réel. Montrer que les relations :

$$\varphi_\lambda(e_1) = e_1 + e_2, \quad \varphi_\lambda(e_2) = e_1 - e_2, \quad \varphi_\lambda(e_3) = e_1 + \lambda e_3$$

définissent une application linéaire φ_λ de E dans E .

Comment choisir λ pour que φ_λ soit injective ? surjective ?

2.2.4. SOURCE Dans chacun des cas suivants, déterminer si les espaces vectoriels E et F sont isomorphes ; si oui, exhiber un isomorphisme de E dans F .

a. $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - y + z = 0\}$.

F_1 est le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $f_1 = (1, 2, 3)$ et $f_2 = (1, 0, 1)$.

b. $E_2 = \{\lambda(1, i, -1), \lambda \in \mathbb{C}\}$.

$F_2 = \{(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^4, z_1 - z_2 = 0, z_3 - 2z_4 = 0\}$.

c. $E_3 = \{\lambda X^n + \mu X^m, (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\}$.

$F_3 = F_2$.

2.2.5. SOURCE Soit E l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions indéfiniment dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit une application sur E par :

$$u(f)(x) = f'(x) - f(x) \quad (f \in E, x \in \mathbb{R})$$

a. Montrer que u est un endomorphisme de E .

b. Déterminer le noyau et l'image de u (indication : on pourra utiliser le fait que $e^{-x}(f' - f)$ est la dérivée de $e^{-x}f$.)

c. Que peut-on en déduire ?

2.2.6. SOURCE Trouver un isomorphisme entre les R - espaces vectoriels $E = (\mathbb{R}, +, \cdot)$ et $F = (\mathbb{R}_+^*, \oplus, \odot)$.

2.3. Projecteurs

2.3.1. SOURCE Soit E un espace vectoriel et I l'endomorphisme identique de E . On appelle projecteur de E tout endomorphisme p de E tel que $p^2 = p$.

- a. Démontrer l'équivalence des propositions suivantes où p est un endomorphisme de E :
 - (i) p est un projecteur,
 - (ii) $I - p$ est un projecteur,
 - (iii) $p(I - p) = (I - p)p = 0$.
- b. Montrer que si p est un projecteur, $E = \text{Im } p \oplus \ker p$. Bien choisir une base de E et écrire la matrice de p dans cette base.
- c. Soit $E = \mathbb{R}^2$. L'endomorphisme f de E est défini par :

$$f((x, y)) = (x - y, y - x) \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

Déterminer l'image et le noyau de f . f est-il un projecteur ?

2.4. Notion de rang

2.4.1. SOURCE Soient u et v deux endomorphismes d'un K -espace vectoriel E de dimension n .

On pose :

$$F = \{u(z) + v(z), z \in E\}$$

$$G = \{u(x) + v(y), x \in E, y \in E\}$$

$$\dim \ker(v) = p$$

$$\dim \ker(u \circ v) = q$$

- a. Comparer F et G et en déduire que : $\text{rg}(u + v) \leq \text{rg}(u) + \text{rg}(v)$.
- b. Montrer que $\ker(v) \cap \ker(u \circ v)$.
- c. Montrer qu'il existe une base $(a_1, \dots, a_n)$ de E telle que :
 - (i) $(a_1, \dots, a_p)$ soit une base de $\ker v$,
 - (ii) $(a_1, \dots, a_p, \dots, a_q)$ soit une base de $\ker(u \circ v)$,
 - (iii) $(v(a_{p+1}), \dots, v(a_q))$ soit une famille libre de $\ker u$.
- d. En déduire l'inégalité : $\text{rg}(u \circ v) \geq \text{rg } u + \text{rg } v - n$.

2.5. Exercices plus difficiles

2.5.1. SOURCE Soient E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{R}$, f un endomorphisme de E , construire dans les trois cas suivants deux automorphismes u et v de E tels que $f = u - v$.

- a. f est bijective,
- b. $\ker f + \operatorname{Im} f = E$,
- c. f est quelconque.

2.5.2. SOURCE Soient E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{R}$ et f un endomorphisme de E .

On pose :

$$f^0 = \operatorname{Id}_E, \quad \text{et pour } k \geq 1, \quad f^k = f^{k-1} \circ f \quad \text{et } N_k = \ker f^k, \quad I_k = \operatorname{Im} f^k.$$

Démontrer que :

- a. pour tout entier k , N_k est contenu dans N_{k+1} et I_k contient I_{k+1} .
- b. il existe un entier p tel que :
 $\forall k < p, N_k \neq N_{k+1}$ et $\forall k \geq p, N_k = N_{k+1}$.
- c. $\forall k < p, I_k \neq I_{k+1}$ et $\forall k \geq p, I_k = I_{k+1}$.
- d. $E = I_p \oplus N_p$
- e. la restriction de f à I_p induit un automorphisme de I_p .

3. Matrices

3.1. Matrice d'une application linéaire

3.1.1. SOURCE Soit i un entier compris entre 1 et 6 et f_i l'application

linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ dont la matrice par rapport aux bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$, est :

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & -4 \end{pmatrix} \quad A_5 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \lambda \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & \lambda \end{pmatrix}$$

- Dans chaque cas, préciser les valeurs de n et m .
- Pour $i = 1, 2, 3$, calculer $f_i(u)$ sous forme matricielle pour $u = (x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$.
- Déterminer $\ker f_i$ et $\text{Im } f_i$ pour $1 \leq i \leq 6$ (discuter selon la valeur du réel λ).

3.1.2. SOURCE Soit h l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ dont la matrice par rapport aux bases (a_1, a_2, a_3) de $\mathbb{R}_3$ et (b_1, b_2) de $\mathbb{R}_2$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad (A = \mathcal{M}(h, (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2))).$$

a. On prend dans $\mathbb{R}^3$ la nouvelle base (a'_1, a'_2, a'_3) où

$$a'_1 = a_2 + a_3, \quad a'_2 = a_3 + a_1, \quad a'_3 = a_1 + a_2.$$

Quelle est la nouvelle matrice A_1 de h ?

$$(A_1 = \mathcal{M}(h, (a'_1, a'_2, a'_3), (b_1, b_2)))$$

b. En conservant la base (a'_1, a'_2, a'_3) de $\mathbb{R}^3$, on choisit pour base de $\mathbb{R}^2$ (b'_1, b'_2) avec

$$b'_1 = \frac{1}{2}(b_1 + b_2) \quad b'_2 = \frac{1}{2}(b_1 - b_2).$$

Quelle est la nouvelle matrice A_2 de h ?

$$(A_2 = \mathcal{M}(h, (a'_1, a'_2, a'_3), (b'_1, b'_2)))$$

3.1.3. SOURCE Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension respectives n et m . Soit g une application linéaire de E dans F de rang r .

a. Préciser comment obtenir une base $(a_1, \dots, a_n)$ de E et une base $(b_1, \dots, b_m)$ de F telles que :

$$g(a_i) = b_i \text{ si } 1 \leq i \leq r \quad \text{et} \quad g(a_i) = 0 \text{ si } r < i \leq n.$$

Quelle est la matrice de g dans un tel couple de bases ?

b. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$f(x, y, z) = (2x + y + z, -y + z, x + y) \quad ((x, y, z) \in \mathbb{R}^3).$$

Ecrire la matrice de f dans la base canonique. Déterminer un couple de bases pour f comme à la question (a).

3.1.4. Variante du précédent. SOURCE

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$f((x, y, z)) = (2x + y + z, -y + z, x + y) \quad ((x, y, z) \in \mathbb{R}^3)$$

- Ecrire la matrice de f dans la base canonique.
- Déterminer un couple de bases (a_1, a_2, a_3) et (b_1, b_2, b_3) telle que la matrice de f par rapport à ces bases soit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.1.5. SOURCE Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Déterminer son image et son noyau.

3.1.6. SOURCE Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui admet dans la base canonique la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -3 & -3 & -3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

- Déterminer le noyau et l'image de f .
- Trouver une base où la matrice de f soit :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.1.7. SOURCE Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui a pour matrice A dans la base canonique :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

- Quel est le rang de A ? Trouver un vecteur a non nul du noyau de u ?
- Calculer A^2 et en déduire, sans calcul, A^3 , un antécédent b de a par u .
- Trouver une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de u dans $\mathcal{B}$ soit :

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Soit v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui admet dans la base canonique la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Trouver une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de v soit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.1.8. SOURCE Soit f un endomorphisme non nul de $\mathbb{R}^3$ tel que $f^2 = 0$. Montrer que f est de rang 1 et qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.2. Calcul matriciel

3.2.1. SOURCE Calculer $A.B, B.A, (A+B)^2, A^2 + B^2 + 2A.B$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.2.2. SOURCE Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = A - I$.

Calculer B^n , puis A^n pour $n \geq 2$.

3.2.3. SOURCE Calculer les inverses des matrices suivantes, quand elles sont inversibles :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & \alpha \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix} \quad ((\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2), \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \gamma & 2 \end{pmatrix} \quad (\gamma \in \mathbb{R})$$

3.2.4. SOURCE Pour m dans $\mathbb{C}$, on pose :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer A^2, A^3, A^4 . En déduire $(I_4 - A)^n$.

Calculer $(I_4 - A)^{-1}$ et $(I_4 - A)^{-n}$.

3.2.5. SOURCE Soit $E_{k,l}$ la matrice de $M_n(\mathbb{C})$ dont tous les coefficients valent 0 sauf le coefficient de la k -ème ligne et l -ème colonne qui vaut 1.

a. Montrer que $\{E_{k,l}, 1 \leq k, l \leq n\}$ est une base de $M_n(\mathbb{C})$, c'est la base canonique.

- b. Etablir les règles de calcul de produit entre les matrices de la base canonique.
- c. Calculer les produits $A.E_{k,l}$ et $E_{k,l}.A$ pour $A \in M_n(\mathbb{C})$. Déterminer les matrices A de $M_n(\mathbb{C})$ qui commutent à toute matrice X de $M_n(\mathbb{C})$ ($X.A = A.X$).

3.2.6. **SOURCE** Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- a. Calculer J^2 et J^3 .
- b. Montrer que l'ensemble $\mathcal{M}$ des matrices :

$$\begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$$

où a, b, c sont des réels, est un sous espace vectoriel de dimension 3 de $M_3(\mathbb{R})$. Que peut-on dire du produit de deux matrices de l'ensemble $\mathcal{M}$?

- c. Calculer l'inverse de la matrice : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

- d. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer B^2 , puis B^n .

e. Soit $C = I_3 + B$. Calculer C^n .

f. Soit $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que $D^n = \alpha_n D + \beta_n I_3$, où I_3 est la matrice identité 3×3 et α_n et β_n sont des réels que l'on calculera (on pourra aussi utiliser l'exercice 3.3.3)

3.3. Changement de base

3.3.1. **SOURCE** Soient E l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 3 et δ l'endomorphisme de E qui à un polynôme associe son polynôme dérivé.

- Ecrire la matrice C de δ dans la base canonique $\mathcal{C}$ de E .
- Ecrire la matrice B de δ dans la base $\mathcal{B} = (1, 1 + X, 1 + X^2, 1 + X^3)$.
- Ecrire la matrice de passage de la base $\mathcal{C}$ à la base $\mathcal{B}$ et vérifier la formule du cours.

3.3.2. **SOURCE** Soient (e_1, e_2, e_3) une base de $\mathbb{R}^3$. On pose :

$$a_1 = e_1 + e_2 - e_3, \quad a_2 = e_1 - e_2 + e_3, \quad e_3 = -e_1 + e_2 + e_3.$$

Montrer que $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice, dans la base canonique, est :

$$M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a-b & a+c & c-b \\ b-a & c-a & b+c \\ a+b & a-c & b-c \end{pmatrix}$$

Calculer la matrice de f dans la base $\mathcal{A}$.

3.3.3. SOURCE Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice U dans la base canonique :

$$U = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

- Ecrire la matrice U' de u dans la base : $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$
- Quelle est la matrice P du changement de base ? Calculer P^{-1} .
- En déduire la matrice U^n et les composantes α_n et β_n dans la base canonique du vecteur transformé de $(1; 0)$ par u^n .

3.3.4. SOURCE Soit T l'endomorphisme de $M_2(\mathbb{C})$ qui à une matrice A associe sa matrice transposée tA .

- Ecrire la matrice de T dans la base canonique de $M_2(\mathbb{C})$.

Soit $\mathcal{S}$ le sous-espace de $M_2(\mathbb{C})$ des matrices symétriques ($A = {}^tA$).

Soit $\mathcal{A}$ le sous-espace de $M_2(\mathbb{C})$ des matrices antisymétriques (${}^tA = -{}^tA$).

- b. Donner une base de chacun des sous-espaces $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ et montrer que $M_2(\mathbb{C}) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$
- c. Ecrire la matrice de T dans la base de $M_2(\mathbb{C})$ construite à partir des bases de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$.
- d. Dans $M_3(\mathbb{C})$, quelle base choisirez-vous pour écrire la matrice de T ?

3.3.5. SOURCE Soit $A = (a_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n}$ un élément de $M_n(K)$. On appelle **trace** de A la somme des termes de la diagonale principale de A :

$$\text{Tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}.$$

- a. Montrer que l'application $\text{Tr} : M_n(K) \rightarrow K$ est une forme linéaire.
- b. Montrer que $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$. Est-ce que $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(A)\text{Tr}(B)$?
- c. En déduire qu'on ne peut pas trouver de matrices A et B dans $M_n(K)$ telles que

$$AB - BA = I_n.$$

- d. En déduire que l'on peut définir la trace d'un endomorphisme ou bien que deux matrices semblables ont la même trace.
- e. Montrer que M est une matrice de trace nulle si et seulement si M est somme de commutateurs. (un commutateur est une matrice qui peut s'écrire $AB - BA$ où $(A, B) \in M_n(K)^2$.)

4. Déterminants

4.1. Calcul de déterminants de petite taille.

Polycopié[J.- M.] : Chapitre 5 - Exercices n°2, 5, 9, 14, 17, 22.

4.1.1. SOURCE Calculer :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \\ 1 & 5 & 15 & 35 \end{vmatrix}$$

4.1.2. SOURCE Calculer, pour a, b, c réels :

$$\begin{vmatrix} a - b - c & 2a & 2a \\ 2b & b - c - a & 2b \\ 2c & 2c & c - a - b \end{vmatrix}$$

4.1.3. Extrait du test 2 (1992 - 1993). SOURCE

Factoriser sur $\mathbb{R}$ le polynôme suivant :

$$P(X) = \begin{vmatrix} X^4 & 2 & 2 - 1 & 2 \\ 2 & X^4 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & X^4 & 2 \\ 2 & -1 & X^4 & 5 \end{vmatrix}$$

4.2. Calcul de déterminants en dimension n .

Polycopié [J. - M.] : Chapitre 5 - Exercices n°13, 15, 21, 18, 25.

4.2.1. SOURCE Soient a, b et c trois réels. Calculer le déterminant $n \times n$ $D = |d_{i,j}|$ défini par :

$$d_{i,i} = b \quad d_{i,j} = a \text{ si } i < j \quad d_{i,j} = c \text{ si } j < i.$$

Indication : Etudier le polynôme $P(X) = |p_{i,j}|$ défini par :

$$p_{i,i} = b + X \quad d_{i,j} = a + X \text{ si } i < j \quad d_{i,j} = c + X \text{ si } j < i.$$

4.3. Applications des déterminants.

Polycopié [J. - M.] : chapitre 5 exercices n°26, 28, 31, 34, 35.

4.3.1. **SOURCE** Inverser les matrices suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4.3.2. **SOURCE** Trouver l'équation de l'hyperplan de $\mathbb{R}^3$ (resp. $\mathbb{R}^4$) engendré par les vecteurs :

$$u = (0, -1, 1) \text{ et } v = (-2, 3, 2)$$

$$(\text{resp. } u_1 = (1, 3, 4, 5), u_2 = (1, 2, 3, 4) \text{ et } u_3 = (3, 1, 4, 2)).$$

5. Systèmes linéaires

5.1. Sur le théorème de caractérisation des solutions d'un système linéaire

5.1.1. **SOURCE** Vérifier que $u_1 = (-3, 0, -1)$ et $u_2 = (0, -1, 0)$ sont solutions du système linéaire :

$$(S) : \begin{cases} x + 2y - z = -2 \\ -2x - y + 5z = 1 \\ 3x + 5y - 4z = -5 \end{cases}$$

Sans aucun calcul, déterminer l'ensemble des solutions de (S) .

5.1.2. SOURCE Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

Pour quelles valeurs de α , u est-il bijectif ? Pour les autres valeurs de α , déterminer l'image et le noyau de u .

En déduire les solutions des systèmes :

$$(S_1) : \begin{cases} x + z = 1 \\ x + y = 1 \\ y + \alpha z = -1 \end{cases} \quad (S_2) : \begin{cases} x + z = 1 \\ x + y = 2 \\ y + \alpha z = 1 \end{cases}$$

5.1.3. SOURCE

a. Déterminer l'ensemble H des solutions de l'équation :

$$x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 5x_4 = 0.$$

b. Ecrire, sans autres calculs, l'ensemble des solutions de l'équation :

$$x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 5x_4 = 1.$$

c. Y a-t-il une équation dont l'ensemble des solutions s'écrive

$$(1, -1, 0, 1) + H?$$

5.2. Matrices échelonnées et rôle des coefficients nuls

5.2.1. **SOURCE** Résoudre les systèmes linéaires dont les matrices complètes sont :

$$A_1 = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right), \quad A_2 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right) \quad A_3 = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 9 \end{array} \right)$$

$$A_4 = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

5.3. Discussion et résolution de systèmes linéaires

5.3.1. **SOURCE**

$$(S_1) : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -2x + 5y + 2z = 0 \\ -7x + 7y + z = 0 \end{cases}$$

$$(S_2) : \begin{cases} y - 2z = 3 \\ x + 2y - 3z = -1 \\ 2x - y + \alpha z = -15 \end{cases}$$

$$(S_3) : \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -2 \\ 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 = -5 \\ 3x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 11x_4 = 13 \\ -2x_1 - 8x_2 - 2x_3 + 6x_4 = 18 \end{cases}$$

$$(S_4) : \begin{cases} -x_1 - 2x_2 + x_5 = 2 \\ x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 3x_5 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 3x_4 - 5x_5 = -5 \\ -2x_2 + 10x_3 + 8x_4 + 16x_5 = 18 \\ 5x_1 + 9x_2 - x_3 + 10x_4 + 12x_5 = -2 \end{cases}$$

$$(S_5) : \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 5x + 6y - 7z = 7 \\ -7x - 5y + (\lambda + 3)z = a - b - 3 \\ 3x + 2y + (\mu - 1)z = a + b \end{cases}$$

$$(S_6) : \begin{cases} \lambda y + t = 1 \\ x + \lambda y + t = 0 \\ x + z - t = 0 \\ x - z - t = -4 \\ x + y - z = -2 \end{cases}$$

5.4. Applications de la méthode de Gauss

5.4.1. SOURCE Soit V le sous espace de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs :

$$v_1 = (1, -2, 3, 1) \quad v_2 = (3, -5, 8, -2) \quad v_3 = (1, -4, 5, -3) \quad v_4 = (0, 1, -1, 1).$$

- Déterminer la dimension et une base de V .
- Déterminer un système d'équations cartésiennes et un système d'équations paramétriques de V .
- Trouver toutes les relations linéaires liant v_1, v_2, v_3 et v_4 .
- Déterminer l'intersection de V avec l'hyperplan H d'équation :

$$5x - 3y - 4z + 2t = 0.$$

Que peut-on en déduire sur $V + H$?

- Peut-on compléter, avec des vecteurs de l'hyperplan H , une base de V en une base de $\mathbb{R}^4$?

5.4.2. SOURCE On considère le plan U de $\mathbb{C}^4$ engendré par les vecteurs :

$$u_1 = (1, 2, 2, -i) \quad \text{et} \quad u_2 = (2, 4, 2, -2i).$$

- Déterminer toutes les façons de compléter $\{u_1, u_2\}$ en une base de $\mathbb{C}^4$ en choisissant des vecteurs parmi ceux de la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) de $\mathbb{C}^4$.
- Déterminer un supplémentaire V de U qui ne contienne pas le vecteur e_2 ; trouver dans ce cas un vecteur u de U et un vecteur v de V tels que $e_2 = u + v$.

5.4.3. SOURCE

a. Résoudre le système S_1 et le système homogène associé S_0 :

$$(S_1) \begin{cases} x_1 & & + 3x_3 & + y_1 & & = 1 \\ 2x_1 & - x_2 & + 7x_3 & - y_1 & - 9y_2 & = 2 \\ 3x_1 & + 2x_2 & + 7x_3 & & - 9y_2 & = 3 \\ & -2x_2 & + 2x_3 & + 2y_1 & + \alpha y_2 & = 1 \end{cases}$$

b. Soient, dans $\mathbb{R}^4$, les vecteurs :

$$u_1 = (1, 2, 3, 0), \quad u_2 = (0, -1, 2, -2), \quad u_3 = (3, 7, 7, 2)$$

$$v_1 = (1, -1, 0, 2), \quad v_2 = (0, -9, -9, \alpha).$$

On note U (resp. V) le sous-espace de $\mathbb{R}^4$ engendré par u_1, u_2 et u_3 (resp. v_1 et v_2).

Déduire de (a) sans autre calcul :

- (i) Les dimensions de U et V ,
- (ii) Les valeurs de α pour lesquelles la somme de U et V est directe,
- (iii) Une base du sous-espace $U \cap V$,
- (iv) Un supplémentaire de $U + V$.

5.4.4. SOURCE Soient, dans $\mathbb{R}^4$, les vecteurs :

$$u = (1, -1, 0, 2), \quad v = (0, -9, -9, 6)$$

$$x = (1, 2, 3, 0), y = (0, -1, 2, -2), z = (3, 7, 7, 2)$$

- Montrer que z appartient au sous-espace engendré par x et y et que v appartient au sous-espace engendré par x et u .
- Soient F le sous-espace engendré par $\{x, y, z\}$, G le sous-espace engendré par $\{u, v\}$.
Trouver la dimension des sous-espaces $F, G, F + G, F \cap G$ (on déterminera une base de chacun de ces sous-espaces).
- Montrer que le sous-espace H engendré par le vecteur $w = (1, 2, 3, 1)$ est supplémentaire de $F + G$. En déduire un supplémentaire de $F \cap G$.

5.4.5. SOURCE

- Quel est le type (ensemble vide, point, droite affine, plan affine...) de l'ensemble des solutions du système linéaire suivant ?

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = y_1 \\ -x_1 + (\lambda - 1)x_2 + (\lambda - 2)x_3 + (\lambda - 1)x_4 + (\lambda - 1)x_5 = y_2 \\ (\lambda - 1)x_1 + (2\lambda - 1)x_2 + (3\lambda - 2)x_3 + (3\lambda - 1)x_4 + (2\lambda + 1)x_5 = y_3 \\ \lambda x_2 + \lambda x_3 + \lambda x_4 + (2\lambda - 1)x_5 = y_4 \end{cases}$$

- Soient les vecteurs de $\mathbb{R}^4$:

$$u_1 = (1, -1, 2, \lambda - 1), u_2 = (1, \lambda - 1, 2\lambda - 1, \lambda), u_3 = (2, \lambda - 2, 3\lambda - 2, \lambda),$$

$$v_1 = (1, \lambda - 1, 3\lambda - 1, \lambda), \quad v_2 = (1, \lambda - 1, 2\lambda + 1, 2\lambda - 1).$$

On appelle U (resp. V) le sous-espace vectoriel engendré par u_1, u_2 et u_3 (resp. v_1 et v_2). Quelle est la dimension des sous-espaces U, V et $U + V$? Déterminer $U \cap V$ et un supplémentaire de $U + V$.

6. Réduction des endomorphismes

6.1. Matrices

6.1.1. SOURCE Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ? (Réfléchir pour éviter de calculer).

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

6.1.2. SOURCE Chercher les valeurs propres et la dimension des sous-espaces propres des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix} \quad (m \in \mathbb{R}) \quad H = \begin{pmatrix} a^2 & 1 & 0 \\ 0 & 2a & 0 \\ 0 & 0 & a+2 \end{pmatrix} \quad (a \in \mathbb{R})$$

$$J = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \quad M = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ \alpha & 0 & \beta \\ \alpha & \beta & 0 \end{pmatrix} \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

6.1.3. SOURCE Dire pour chacune des matrices de l'exercice précédent si elle est diagonalisable et donner une matrice semblable la plus simple possible.

Calculer A^n pour tout entier et $((C - 2\text{Id})(C - \text{Id}))$.

6.2. Endomorphismes

6.2.1. SOURCE Soit E le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^∞ . Soient u et v les endomorphismes de E définis, pour $f \in E$, par :

$$u(f) = f' \quad \text{et} \quad v(f)(x) = \int_0^x f(t)dt \quad (x \in \mathbb{R})$$

- Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de u et v .
- Déterminer les valeurs propres de $u \circ v$ et $v \circ u$.
- Posons $g_n(x) = \cos nx$ pour $x \in \mathbb{R}$. Montrer que les fonctions g_n sont linéairement indépendantes dans E .

6.2.2. **SOURCE** Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{C}[X]$ défini par :

$$u(P) = (2X + 1)P(X) - (X^2 - 1)P'(X) \quad (P \in \mathbb{C}[X])$$

- Montrer qu'il existe un unique entier n_0 tel que $\mathbb{C}_{n_0}[X]$ soit stable par u où $\mathbb{C}_{n_0}[X]$ est le sous-espace de $\mathbb{C}[X]$ des polynômes de degré au plus n_0 .
- Soit v l'endomorphisme de $\mathbb{C}_{n_0}[X]$ obtenu par restriction de u à $\mathbb{C}_{n_0}[X]$. Ecrire la matrice de v dans la base canonique de $\mathbb{C}_{n_0}[X]$.
- Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de v .
- Même question pour u .

6.2.3. **SOURCE** Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension n et f et g deux endomorphismes de E . On suppose que f admet n valeurs propres distinctes.

- Montrer que f et g commutent si et seulement si les vecteurs propres de f sont vecteurs propres de g .
- Un vecteur propre de g est-il propre pour f ?
- Les endomorphismes qui commutent à f sont-ils diagonalisables ?

6.3. Applications

6.3.1. SOURCE

- Diagonaliser dans $\mathbb{R}^2$ la matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et calculer A^n .
- On considère les suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par les données de u_0 et v_0 et par les relations :

$$u_{n+1} = \frac{3}{2}u_n - \frac{1}{2}v_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} = u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Calculer u_n et v_n en fonction de n , u_0 et v_0 . Les suites sont-elles convergentes ?

- Que peut-on dire des suites récurrentes $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant

$$2u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n = 0 ?$$