COUPLE ASSORTI DE SYSTÈMES DE KAC ET INCLUSIONS DE FACTEURS DE TYPE II_1

MARIE-CLAUDE DAVID

Résumé : Soit $K \subset L$ une inclusion irréductible d'indice fini de facteurs de type II_1, on suppose que L est engendré par les sous-facteurs intermédiaires M et N respectivement isomorphes aux produits croisés de K par les algèbres de Kac $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$. On donne des conditions pour qu'il existe une inversion T sur $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ telle que L soit isomorphe au produit croisé de K par le T-produit tensoriel de $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$. L'inversion T permet de définir une action à gauche γ_b de $\mathbb{B}$ sur $\mathbb{A}$ et une action à droite γ_a de $\mathbb{A}$ sur $\mathbb{B}$, M et N sont alors respectivement isomorphes au produit croisé de $K^{\mathbb{B}}$ par $\mathbb{A} \rtimes_{\gamma_b} \mathbb{B}$ et de $K^{\mathbb{A}}$ par $\mathbb{B} \rtimes_{\gamma_a} \mathbb{A}$.

Réciproquement, si le T-produit tensoriel de deux algèbres de Kac $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ de dimension finie agit sur un facteur K de type II_1 par une action extérieure δ, l'inclusion $\delta(K) \subset K \rtimes_\delta (A \otimes_T B)$ remplit ces conditions et on obtient un carré bicommutatif de facteurs.

Abstract : Let $K \subset L$ be a irreducible inclusion of type II_1 factors with finite indice. We assume that L is generated by the intermediate subfactors M et N which are respectively isomophic to the crossed product of K by the Kac algebras $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$. We give conditions so that there is an inversion T on $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ such that L is isomorphic to the crossed product de K by the T-tensor product of $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$. The inversion T defines a left action γ_b of $\mathbb{B}$ on $\mathbb{A}$ and a right action γ_a of $\mathbb{A}$ on $\mathbb{B}$ then M et N are respectively isomorphic to the crossed product of $K^{\mathbb{B}}$ by $\mathbb{A} \rtimes_{\gamma_b} \mathbb{B}$ and of $K^{\mathbb{A}}$ by $\mathbb{B} \rtimes_{\gamma_a} \mathbb{A}$.

Conversely, if the T-tensor product of two Kac algebras $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ of finite dimension acts on a II_1-factor K by an outer action δ, the inclusion $\delta(K) \subset K \rtimes_\delta (A \otimes_T B)$ fulfils these conditions and we get a bicommutatif square of factors.

Code Matière AMS : 46L37, 16W30, 57T05, 22D25, 22D35.

Mots Clefs : Subfactors, Kac algebras, Kac systems, multiplicative unitary, crossed product.

Date: 8 avril 1998.

1. Introduction

1.1. Dans [B.S.], S. Baaj et G. Skandalis définissent les notions d'inversion T et de couple assorti de systèmes de Kac et construisent à partir d'un tel couple les systèmes de Kac T-produit tensoriel et biproduit croisé.

Nous montrons que ces systèmes apparaissent associés à des inclusions irréductibles de facteurs de type II_1 dans la situation suivante :

Soit $K \subset L$ une inclusion irréductible d'indice fini de facteurs de type II_1 munis de la trace normale, finie, fidèle et normalisée tr. On suppose que L est l'algèbre de von Neumann engendrée par les facteurs intermédiaires M et N respectivement isomorphes au produit croisé de K par les algèbres de Kac $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$; alors l'algèbre K contient des sous-algèbres isomorphes à $\hat{\mathbb{A}}$ et $\hat{\mathbb{B}}$ et on suppose que les supports des co-unités de ces algèbres commutent ; comme l'indice de K dans L est fini, les algèbres $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ sont de dimension finie, on suppose de plus que le produit de ces dimensions vaut l'indice de K dans L.

Sous ces hypothèses, (L, M, N, K) est un carré bicommutatif et il existe une inversion T sur $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ qui définit une action à gauche γ_b de $\mathbb{B}$ sur l'algèbre sous-jacente à $\mathbb{A}$ et une action à droite γ_a de $\mathbb{A}$ sur l'algèbre sous-jacente à $\mathbb{B}$:

$$\gamma_b(x) = T(x \otimes 1_b) \quad (x \in A) \quad \text{et} \quad \gamma_a(y) = T(1_a \otimes y) \quad (y \in B).$$

Le T-produit tensoriel $\mathbb{A} \otimes_T \mathbb{B}$ de $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ agit alors extérieurement sur K et L est isomorphe au produit croisé de K par cette action. M (resp. N) est isomorphe au produit croisé de $K^{\mathbb{B}}$ (resp. $K^{\mathbb{A}}$) par une action extérieure du produit croisé de $\mathbb{A} \rtimes_{\gamma_b} \mathbb{B}$ (resp. $\mathbb{B} \rtimes_{\gamma_a} \mathbb{A}$).

Aux isomorphismes près, on peut résumer ce résultat par la figure suivante :

$$\begin{array}{ccccccc}
K^{\mathbb{A}} \cap K^{\mathbb{B}} & \subset & K^{\mathbb{B}} & & & & \\
\cap & & \cap & & & & \\
K^{\mathbb{A}} & \subset & K & \subset & K \rtimes \mathbb{A} & = K^{\mathbb{B}} \rtimes (\mathbb{A} \rtimes_{\gamma_b} \mathbb{B}) \\
 & & \cap & & \cap & & \\
K^{\mathbb{A}} \rtimes (\mathbb{B} \rtimes_{\gamma_a} \mathbb{A}) & = & K \rtimes \mathbb{B} & \subset & L & = K \rtimes (\mathbb{A} \otimes_T \mathbb{B})
\end{array}$$

1.2. Dans [Sano], T. Sano montre que si (L, M, N, K) est un carré bicommutatif dont deux inclusions latérales bien choisies sont de profondeur 2, l'inclusion diagonale $K \subset L$ est aussi de profondeur 2 (voir [3.3.1]). Une question naturelle était comment obtenir l'algèbre de Kac associée à l'inclusion diagonale à partir de celles associées aux inclusions latérales ; dans cet article, nous donnons une construction de cette algèbre dans tous les cas. (voir la remarque 3.1.4 et les théorèmes 7.5, 7.6 et 8.5.2).

1.3. Cet article est organisé ainsi :

Dans la deuxième partie, nous définissons les systèmes de Kac et les algèbres de Kac associés à une inclusion irréductible de profondeur 2, c'est-à-dire construite à partir de l'action d'une algèbre de Kac. Dans la troisième partie, nous construisons à partir d'une inclusion $K \subset L$ donnée comme en 1.1 un carrelage commutatif. Dans la partie 4, nous obtenons à partir d'un couple assorti de systèmes de Kac un carré bicommutatif de facteurs. Dans la partie 5, nous étudions les algèbres de Kac associées à l'inclusion $K \subset L$. Dans la partie 6, nous définissons l'inversion T de $\mathbb{A}$

et $\mathbb{B}$. Dans la partie 7, nous obtenons un couple assorti de systèmes de Kac et nous montrons que L est isomorphe au produit croisé de K par le T-produit tensoriel de $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$. Dans la partie 8, c'est le biproduit croisé que nous explicitons à partir des inclusions diagonales latérales. La partie 9 permet de faire le lien entre les différents points de vue et constructions liés aux algèbres de Kac, aux unitaires multiplicatifs et aux inclusions de profondeur 2.

1.4. Je remercie V. Jones de m'avoir faire connaître l'article de T. Sano sur les carrés commutatifs et co-commutatifs qui est à l'origine de ce travail, M. Enock pour des conversations et S. Baaj pour ses conseils lors de la rédaction finale de cet article.

2. Inclusion irréductible de profondeur 2

Nous donnons dans cette partie les propriétés des inclusions d'indice fini obtenues à partir d'une action d'une algèbre de Kac [Da].

2.1. **Tour dérivée d'une inclusion irréductible de profondeur 2.**

2.1.1. *Définitions et notations.* Soit $M_0 \subset M_1$ une inclusion d'indice fini n de facteurs de type II_1 munis d'une trace normale, finie, fidèle et normalisée (*toutes les algèbres seront munies d'une telle trace qui sera toujours notée tr*). On note

$$M_0 \subset M_1 \overset{e}{} \subset M_2 \overset{e'}{} \subset M_3 \overset{e''}{} \subset M_4 \overset{e'''}{} \subset M_5$$

la tour de facteurs obtenue par construction de base [G.H.J. 3], E_i l'espérance conditionnelle, définie grâce à la trace, d'une algèbre contenant M_i sur l'algèbre M_i, J_i l'isométrie bijective anti-linéaire canonique de H_i, l'espace de la représentation standard de M_i j_i l'anti-isomorphisme linéaire défini, pour x dans $\mathcal{L}(H_i)$ par :

$$j_i(x) = J_i x^* J_i.$$

A_{i+2} est l'algèbre $M_{i+2} \cap M_i'$ pour tout entier i.

Définition. L'inclusion $M_0 \subset M_1$ est dite *irréductible* si $M_0' \cap M_1$ est trivial, de plus elle est *de profondeur 2* si $M_0' \cap M_3$ est un facteur.

Il a été montré sous des hypothèses plus ou moins générales ([Sz.], [Da.], [L], [E.N.]) que $M_0 \subset M_1$ est une inclusion irréductible de facteurs de profondeur 2 si et seulement s'il existe une algèbre de Kac $\mathbb{K}$ et une action extérieure δ_K de $\mathbb{K}$ sur M_0 telles que l'inclusion soit isomorphe à l'inclusion de $\delta_K(M_0)$ dans le produit croisé de M_0 par l'action extérieure δ_K de $\mathbb{K}$.

2.2. **Représentation standard de A_2.**

Nous supposons maintenant que l'inclusion $M_0 \subset M_1$ est irréductible de profondeur 2, sa tour dérivée s'obtient par construction de base à partir de l'inclusion $\mathbb{C} \subset A_2$ et les projecteurs de Jones associés à ces constructions de base sont $e', e'', e'''\dots$ [G.H.J. 4.6.3 - 4.6.4.] ; $M_3 \cap M_0'$ est l'algèbre $\mathcal{L}(h)$ des opérateurs bornés sur h où h l'espace de la représentation standard π de A_2, de plus $M_3 \cap M_0'$ est l'algèbre engendrée par A_2 et e', sa représentation sur h, encore notée π, vérifie :

$$\pi(e')\Lambda(x) = \Lambda(tr(x)1)$$

où Λ est l'injection de A_2 dans h, 1 l'identité de $M_3 \cap M_0'$ et x un élément de A_2.

On note J et $\hat{J}$ les isométries anti-linéaires de h qui vérifient, pour a dans A_2,

$$J\Lambda(a) = \Lambda(a^*) \quad et \quad \hat{J}\Lambda(a) = \Lambda(j_1(a^*))$$

et u l'unitaire $J\hat{J}$ de h tel que $u\Lambda(a) = \Lambda(j_1(a))$.

2.2.1. *Bases.* D'après [Da. 5.2.1], on obtient une base $\{a_r, r = 1, \dots n\}$ de Pimsner-Popa de M_2 sur M_1 qui est aussi une base orthonormale de A_2 en normalisant une famille d'unités matricielles de l'algèbre de Kac A_2. Les familles $\{a_r^*, r = 1, \dots n\}$ et $\{j_1(a_r), r = 1, \dots n\}$ ont les mêmes propriétés. On choisit de même pour A_3 une famille $\{\alpha_i, i = 1, \dots n\}$ d'unités matricielles normalisées.

La famille $\{\sqrt{n} a_r e', r = 1, \dots n\}$ est une base de Pimsner-Popa de M_3 sur M_2 et aussi une base de Pimsner-Popa de $M_3 \cap M_0'$ sur A_2 [PiPo1 1.3], on a donc :

$$x = n \sum_{r=1}^{n} E_{A_2}(x a_r e') e' a_r^* \quad (x \in M_3 \cap M_0')$$

2.2.2. Nous explicitons maintenant la représentation π.

Proposition. *Pour $x \in M_3 \cap M_0'$ et $a \in A_2$, $\pi(x)\Lambda(a) = n\Lambda(E_{A_2}(xae'))$.*

Démonstration : Décomposons x sur la base de $M_3 \cap M_0'$ [2.2.1] , on a alors :

$$\pi(x)\Lambda(a) = n \sum_{s=1}^{n} \Lambda[E_{A_2}(x a_s e') tr(a_s^* a)] = n\Lambda[E_{A_2}(x \sum_{s=1}^{n} a_s tr(a_s^* a) e')] = n\Lambda(E_{A_2}(xae')).$$

2.2.3. Nous regroupons ici certains résultats connus et quelques formules que nous seront utiles ensuite.

Proposition. *(i) Pour $x \in M_3 \cap M_0'$, $xe' = nE_{A_2}(xe')e'$.*
(ii) Pour $x \in A_2$, $xe = ntr(xe)e$.
(iii) Si $\lambda_t, t = 1 \dots n$ est une base de Pimsner-Popa de M_1 sur M_0, pour $x \in A_2$, on a : $j_1(x) = n \sum_{t=1}^{n} E_{M_1}(e\lambda_t x) e \lambda_t^*$.
(iv) Pour $x \in A_3$, $j_2(x) = n \sum_{r=1}^{n} E_{A_2}(e' a_r x) e' a_r^*$.
(v) Pour $x \in A_3$, $E_{A_2}[j_2(x) e e'] = E_{A_2}(e' e x)$.
(vi) Pour $a \in A_2$, $\hat{J}\pi(a^*)\hat{J} = \pi(j_1(a))$.
(vii) Pour $\alpha \in A_3$, $J\pi(\alpha^*)J = \pi(j_2(\alpha))$.
(viii) Pour $x \in A_2$, $uxu = \sum_{r=1}^{n} a_r j_1(x) e' a_r^*$.

Démonstration :
(i) [PiPo 1].
(ii) résulte de (i) car $A_2\, e$ est de dimension 1.
(iii) et (iv) [Da. 5.2.3] pour les inclusions $M_0 \subset M_1$ et $M_1 \subset M_2$.
(v) Comme $a_r e$ vaut $ntr(a_r e)e$, on a : $j_2(x)ee' = n^2 E_{A_2}(e'ex)e'ee'$. Comme $ne'ee' = 1_a$, on peut écrire :

$$E_{A_2}[j_2(x)ee'] = nE_{A_2}(e'ex)tr(e') = E_{A_2}(e'ex).$$

(vii) résulte de (iv) et de 2.2.2.
(viii) [Da. 5.2.3 (ii)].

2.3. **Représentation standard de A_3.** Représentons sur H_2 la tour

$$M_0 \ \overset{e}{\subset} \ M_1 \overset{e'}{\subset} M_2 \overset{e''}{\subset} M_3 \subset M_4$$

Comme M_4 est le résultat de la construction de base sur $M_0 \subset M_2$ [PiPo 2], en appliquant j_2 à cette tour, on obtient la tour de Jones de l'inclusion $M_4' \subset M_3'$:

$$M_4' \ \overset{e''}{\subset} \ M_3' \overset{e'}{\subset} M_2' \overset{e}{\subset} M_1' \subset M_0'$$

Appliquons maintenant les résultats de 2.2 à l'inclusion $M_3' \subset M_2'$, nous pouvons affirmer que $M_3 \cap M_0'$ est l'algèbre $\mathcal{L}(h')$ des opérateurs bornés sur h' où h' l'espace de la représentation standard π' de A_3, de plus $M_3 \cap M_0'$ est l'algèbre engendrée par A_3 et e, sa représentation sur h', encore notée π', vérifie :

$$\pi'(e)\Lambda'(x) = \Lambda'(tr(x)1_a)$$

où Λ' est l'injection de A_3 dans h' et x un élément de A_3.

Des résultats analogues à ceux de 2.2 s'obtiennent alors en échangeant A_2 et A_3, e et e', la base $\{a_r\}$ et la base $\{\alpha_i\}$ etc... Nous les citerons en disant que nous appliquons un résultat de 2.2 à la tour des commutants.

2.4. **Les représentations π et π' sont équivalentes.** Grâce à 2.2 et 2.3, on vérifie sans peine :

Proposition. *L'application F de h sur h' définie par*

$$F\Lambda(a) = \Lambda'(n^{3/2}E_{A_3}(ae'e)) \qquad (a \in A_2)$$

est un isomorphisme de h sur h' qui entrelace les représentations π et π'.

L'isomorphisme réciproque vérifie :

$$F^{-1}\Lambda'(\alpha) = \Lambda(n^{3/2}E_{A_2}(\alpha ee')) \qquad (\alpha \in A_3)$$

De plus F échange J et $\hat{J}'$ ainsi que $\hat{J}$ et J'. On notera donc abusivement encore u l'unitaire $J'\hat{J}'$ de h' (voir aussi [E.S. 1.2.10]).

Remarque. Comme les représentations π et π' sont équivalentes, on omettra en général de préciser la représentation.

2.5. **La représentation $\bar{\pi}$.** Appliquons à l'inclusion $M_1 \subset M_2$ les résultats de 2.2 : $M_4 \cap M_1'$ est l'algèbre $\mathcal{L}(\bar{h}_a)$ où $\bar{h}_a$ l'espace de la représentation standard $\bar{\pi}$ de A_3, de plus $M_4 \cap M_1'$ est l'algèbre engendrée par A_3 et e'', sa représentation sur $\bar{h}_a$, encore notée $\bar{\pi}$, vérifie :

$$\bar{\pi}(e'')\bar{\Lambda}(x) = \bar{\Lambda}(tr(x)1_a)$$

où $\bar{\Lambda}$ est l'injection de A_3 dans $\bar{h}_a$ et x un élément de A_3. On note $\bar{u}$ l'unitaire qui vérifie, pour $\alpha \in A_3$, $\bar{u}\bar{\Lambda}(\alpha) = \bar{\Lambda}(j_2(\alpha))$.

Comparons les représentations π et $\bar{\pi}$:

Proposition. *(i) L'application $\mathcal{F}$ de h sur $\bar{h}_a$ définie par*

$$\mathcal{F}\Lambda(a) = \bar{\Lambda}(n^{3/2}E_{A_3}(a^*e'e)) \qquad (a \in A_2)$$

est un anti-isomorphisme de h sur $\bar{h}_a$ dont l'anti-isomorphisme réciproque vérifie :

$$\mathcal{F}^{-1}\bar{\Lambda}(\alpha) = \Lambda(n^{3/2}E_{A_2}(e'e\alpha^*)) \qquad (\alpha \in A_3)$$

(ii) Pour tout x de $M_3 \cap M_0'$, on a :

$$\mathcal{F}\pi(x^*)\mathcal{F}^{-1} = \bar{\pi}(j_2(x))$$

Démonstration :

(i) Par définition, on peut identifier h' et $\bar{h}$ en posant, pour $\alpha \in A_3$, $\Lambda'(\alpha) = \bar{\Lambda}(\alpha)$; alors $\mathcal{F}$ égale FJ et les affirmations (i) découlent de 2.4.

(ii) Pour $x \in A_3$, l'égalité résulte de (i) et 2.2.3 (vii). Comme e est dans le centre de A_2, on vérifie facilement qu'elle est vraie pour e. On conclut en utilisant le fait que $M_3 \cap M_0'$ est engendrée par A_3 et le projecteur e.

2.6. **L'algèbre de Kac $\mathbb{A}$.**

2.6.1. *L'algèbre de Kac $\mathbb{A}$.* D'après [Da. 5.3.2], $\nu_i(x) = \sum_{r=1}^n E_{A_2}(e'a_r\alpha_i^*)xa_r^*$ et $\nu'_j(x) = \sum_{r=1}^n E_{A_2}(xa_r^*\alpha_j^*)e'a_r$ sont des éléments de A_3 si $x \in A_3$. Pour $x \in A_3$, l'égalité $\Gamma_3(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \otimes \nu_i(x)$ définit un coproduit co-associatif [Da. 5.3 - 5.4]. On a aussi $\Gamma_3(x) = \sum_{j=1}^n \nu'_j(x) \otimes \alpha_j$. La proposition 5.6.3 de [Da.] nous permet d'affirmer que l'algèbre A_3 munie du co-produit Γ_3, de la co-involution j_2 et de la trace normalisée est une algèbre de Kac $\mathbb{A}$.

2.6.2. *Interprétation de e'.* L'algèbre de Kac $\mathbb{A}$ est de dimension finie donc de type discret, le projecteur e' est le projecteur p du théorème 6.3.5 de [E.S.], c'est-à-dire que l'unité du dual de A_3 est l'homomorphisme ϵ défini par $\epsilon(x) = ntr(xe')$ pour $x \in A_3$. Le projecteur e' est donc le support de la co-unité de A_3.

2.6.3. Le lien entre les inclusions irréductibles de profondeur 2 et les algèbres de Kac résulte du théorème suivant. (Pour plus de précisions, voir 9.2.)

Théorème. *[Da. 5.7.2] [E.N. 4.2] L'algèbre de Kac $\mathbb{A} = (A_3, \Gamma_3, j_2, tr)$ agit sur M_1 par une action extérieure telle que M_0 soit l'algèbre des points fixes de cette action et M_2 soit isomorphe au produit croisé de M_1 par cette action.*

Ainsi quand on dira que M_1 est isomorphe au produit croisé de M_0 par une algèbre de Kac $\mathbb{A}$, on voudra dire que $\mathbb{A}$ est l'algèbre (A_3, Γ_3, j_2, tr).

L'inclusion ι de M_1 dans M_3 vu comme $M_1 \otimes \mathcal{L}(h)$ vérifie :

$$\iota(z) = \sum_{r,s=1}^n E_1(a_r^* z a_s) \otimes a_r e' a_s^* \quad (z \in M_1).$$

L'action δ de $\mathbb{A}$ sur M_1 est alors $Ad(1_1 \otimes u)\iota$.

2.6.4. *L'unitaire multiplicatif associé à (A_3, Γ_3).* D'après [B.S. 3.4.4], on associe à une algèbre de Hopf unifère bisimplifiable à droite, ce qui est le cas d'une algèbre de Kac, un unitaire multiplicatif X :

Proposition. *Soit X l'unitaire multiplicatif sur $h' \otimes h'$ défini par :*

$$X[\Lambda'(y) \otimes \Lambda'(z)] = \Lambda' \otimes \Lambda'[\Gamma_3(y)(1_a \otimes z)] \quad (y, z \in A_3).$$

On a les expressions suivantes :

$$(i)\ X = \sum_i^n u j_1(nE_{A_2}(e'e\alpha_i^*))u \otimes \alpha_i$$

$$(i')\ X = \sum_i^n u[nE_{A_2}(\alpha_i^* e e')]u \otimes \alpha_i$$

$$(ii)\ X = \sum_{r=1}^n (u j_1(a_r)u) \otimes nE_{A_3}(a_r^* e' e)$$

$$(ii')\ X = \sum_{r=1}^n u a_r u \otimes nE_{A_3}(e e' a_r^*).$$

Démonstration :

(i) Posons $X = \sum_{i=1}^n \pi'(x_i) \otimes \pi'(\alpha_i)$ où les x_i sont des éléments de $M_3 \cap M'_0$. Par définition et grâce à 2.2.2, on peut écrire :

$$\sum_{i=1}^n \Lambda'(nE_{A_3}(x_i y e)) \otimes \Lambda'(\alpha_i z) = \sum_{j=1}^n \Lambda'(\nu'_j(y)) \otimes \Lambda'(\alpha_j z)$$

ce qui est équivalent à :

$$nE_{A_3}(x_i y e) = \nu'_i(y) \qquad \forall i = 1, \ldots, n, \quad \forall y \in A_3.$$

Grâce à 2.2.1 appliqué à la tour des commutants et à 2.2.3 (ii), on en déduit :

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} nE_{A_3}(x_i \alpha_j e) e \alpha_j^* = \sum_{j=1}^{n} \nu'_i(\alpha_j) e \alpha_j^* = \sum_{j=1}^{n} nE_{A_2}(\alpha_j e \alpha_i^*) e' e \alpha_j^*$$

Ecrivons maintenant x_i sur la base $\{\sqrt{n} a_r e', r = 1, \ldots n\}$ de $M_3 \cap M_0'$ et appliquons 2.2.3 (i) pour la tour des commutants et 2.2.3 (viii), nous obtenons alors :

$$x_i = n^2 \sum_{r,j=1}^{n} a_r e' E_{A_2}[tr(a_r^* E_{A_2}(\alpha_j e \alpha_i^*)) e' e \alpha_j^*] = n^2 \sum_{r=1}^{n} a_r e' E_{A_2}[e' e E_{A_3}(e \alpha_i^* a_r^*)]$$

$$= n \sum_{r=1}^{n} a_r e' E_{A_2}(e' e \alpha_i^*) a_r^* = u j_1[nE_{A_2}(e' e \alpha_i^*)] u$$

(ii) s'obtient en écrivant $nE_{A_2}[e' e \alpha_i^*]$ sur la base de A_2.

(ii') se déduit de (ii) en écrivant $j_1(a_r)$ sur la base de A_2 puis en utilisant 2.2.3 (v) appliqué à la tour des commutants (2.3).

(i') s'obtient en écrivant $nE_{A_3}(ee' a_r^*)$ sur la base de A_3.

2.6.5. *Remarque.* Pour établir cette proposition, ainsi que les résultats de [Da. 5], le fait que $\{a_r, r = 1, \ldots n\}$ et $\{\alpha_i, i = 1, \ldots n\}$ soient des familles normalisées d'unités matricielles n'est pas indispensable, par contre, on utilise leurs propriétés de base de Pimsner-Popa et de base orthonormale ainsi que le fait que $\{j_1(a_r), r = 1, \ldots n\}$, $\{a_r^*, r = 1, \ldots n\}$, $\{j_2(\alpha_i), i = 1, \ldots n\}$, $\{\alpha_i^*, r = 1, \ldots n\}$ aient les mêmes propriétés.

2.7. **Les systèmes de Kac associés à une inclusion irréductible de profondeur 2.** Suivant [B.S. 6.2], posons : $\hat{X} = \sigma(u \otimes 1_a) X (u \otimes 1_a) \sigma$.

(h, X, u) est un système de Kac [B.S. 6.11.d], $(h, \hat{X}, u)$ aussi [B.S. 6.6].

Définition. Le système de Kac (h, X, u)(resp.$(h, \hat{X}, u)$) est appelé système de Kac (resp. dual) associé à l'inclusion irréductible de profondeur 2 $M_0 \subset M_1$.

Dans [B.S. 1.3-3.8], S. Baaj et G. Skandalis associent à un système de Kac (h, X, u) deux algèbres de Hopf $(S(X), \delta)$ et $(\hat{S}(X), \hat{\delta})$ en posant :

$$\delta(x) = X(x \otimes 1)X^* \quad (x \in S(X)) \quad \text{et} \quad \hat{\delta}(y) = X^*(1 \otimes y)X \quad (y \in \hat{S}(X)).$$

Quand h est de dimension finie, il existe une co-involution sur chacune de ces algèbres [B.S. 3.9], la trace normalisée est un poids de Haar et les algèbres $S(X)$ et $\hat{S}(X)$ sont chacune munies d'une structure d'algèbre de Kac que l'on notera $\mathbb{S}(X)$ et $\hat{\mathbb{S}}(X)$.

Proposition. *(i) $\hat{\mathbb{S}}(\hat{X})$ et $\mathbb{S}(X)$ coïncident avec l'algèbre de Kac $\mathbb{A}$.*

(ii) $\mathbb{S}(\hat{X})$ est l'algèbre (A_2, Γ_2, j_1, tr). $\mathbb{S}(\hat{X})$ est l'image par u de $\hat{\mathbb{S}}(X)$.

Démonstration :

En dimension finie, la structure d'algèbre de Kac est entièrement déterminée par la donnée de l'algèbre sous-jacente et de son coproduit ; aussi il nous suffit de comparer les coproduits.

(i) L'identité de $\hat{\mathbb{S}}(\hat{X})$ et $\mathbb{S}(X)$ resulte de [B.S. 6.8]. Elles coïncident avec $\mathbb{A}$ du fait de la définition de l'unitaire X [B.S.3.8].

(ii) Considérons le facteur $M_{-1} = J_1 M_1' J_1$ et l'algèbre $A_1 = M_1 \cap M_{-1}'$. La tour $M_{-1} \subset M_0 \subset M_1$ est la construction de base et $j_1(e')$ est le projecteur de Jones de cette construction ; l'algèbre A_1 est anti-isomorphe à A_3 par j_1.

La famille $\{j_1(\alpha_i), i = 1, \dots, n\}$ est une famille d'unités matricielles normalisées de A_{-1}. Posons $\nu_r'(x) \sum_{i=1}^n E_{A_1}(x j_1(\alpha_i^*) a_r^*) e j_1(\alpha_i)$ et utilisons la deuxième formule de 2.6.1 et la relation entre le co-produit et la co-involution, nous obtenons alors :

$$\Gamma_2(x) = \sum_{r=1}^n j_1(a_r) \otimes j_1(\nu_r'(j_1(x))).$$

$$\begin{aligned} \text{où} \quad j_1(\nu_r'(j_1(x)) &= \sum_{i=1}^n j_1[E_{A_1}(j_1(x) j_1(\alpha_i^*) a_r^*) e j_1(\alpha_i)] \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i e E_{A_3}(j_1(a_r^*) \alpha_i^* x) \quad (\text{car } j_1(e) = e). \end{aligned}$$

On en déduit en écrivant $j_1(a_r)$ sur la base de A_2 :

$$\Gamma_2(x) = \sum_{r=1}^n a_r \otimes \sum_{i=1}^n \alpha_i e E_{A_3}(a_r^* \alpha_i^* x).$$

D'autre part,d'après [B.S. 3.8], le coproduit de $S(\hat{X})$, que l'on note provisoirement Γ est, pour $x \in A_2$: $\Gamma(x) = \hat{X}(x \otimes 1_a)\hat{X}^*$.

D'après 2.6.4 (i') et 2.2.3 (i), on a donc :

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &= \sum_{i,j=1}^n \alpha_i x \alpha_j^* \otimes E_{A_2}(\alpha_i^* e \alpha_j) = \sum_{r=1}^n a_r \otimes \sum_{i,j=1}^n E_{A_2}(\alpha_i^* e tr(a_r^* \alpha_i x \alpha_j^*) \alpha_j) \\ &= \sum_{r=1}^n a_r \otimes E_{A_2}[\sum_{i=1}^n \alpha_i^* e E_{A_3}(a_r^* \alpha_i x)] = \Gamma_2(x) \end{aligned}$$

La dernière affirmation résulte de [B.S. 6.8].

3. Carrelage commutatif

3.1. **Carré bicommutatif.**

3.1.1. *Définition.* Soit $\mathcal{C} = (L, M, N, K)$ un quadruplet de facteurs de type II_1 tel que l'indice de K dans L soit fini.

$$\begin{array}{ccc} K & \subset & M \\ \cap & & \cap \\ N & \subset & L \end{array}$$

On dira que $\mathcal{C}$ est un carré bicommutatif si $\mathcal{C}$ est commutatif [G.H.J. 4.2] et co-commutatif [Sano 2] et si $K' \cap L = \mathbb{C}$.

3.1.2. *Propriétés.* Nous rappelons maintenant les propriétés des carrés bicommutatifs dues à T.Sano [Sano prop 2.1 et 2.2], dans ce qui suit, on peut échanger N et M :

[P1] $[L : M] = [N : K]$

[P2] Une base de Pimsner-Popa de N sur K est aussi une base de Pimsner-Popa de L sur M.

[P3] Si e_N^L est le projecteur de la construction de base sur $N \subset L$, la tour $K \subset M \subset \langle M, e_N^L \rangle$ est standard c'est-à-dire que $M \subset \langle M, e_N^L \rangle$ est isomorphe à $M \subset \langle M, e_K^M \rangle$ (ici toutes les algèbres sont représentées sur $L^2(L)$).

[P4] La tour $\langle M, e_N^L \rangle \subset \langle L, e_N^L \rangle \subset \langle \langle L, e_N^L \rangle, e_M^L \rangle$ est standard.

[P5] $e_N^L e_M^L = e_M^L e_N^L = e_K^L$ et $\langle \langle L, e_N^L \rangle, e_M^L \rangle = \langle L, e_K^L \rangle$.

$$
\begin{array}{ccccc}
K & \subset & M & \subset & \langle M, e_N^L \rangle \\
\cap & & \cap & & \cap \\
N & \subset & L & \subset & \langle L, e_N^L \rangle \\
\cap & & \cap & & \cap \\
\langle N, e_M^L \rangle & \subset & \langle L, e_M^L \rangle & \subset & \langle L, e_K^L \rangle
\end{array}
$$

3.1.3. Soit $K \subset L$ une inclusion irréductible d'indice fini de facteurs de type II_1 munis de la trace normale, finie, fidèle et normalisée tr, on suppose que L est l'algèbre de von Neumann engendrée par les facteurs intermédiaires M et N respectivement isomorphes au produit croisé de K par les algèbres de Kac $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$. Comme l'indice de K dans L est fini, les algèbres $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ sont de dimension finie, respectivement n_a et n_b. Soit J l'isométrie anti-linéaire associée à la représentation standard de K ; posons : $M_{1,0} = JM'J \quad M_{0,1} = JN'J \quad M_{0,0} = M_{1,0} \cap M_{0,1} = JL'J$.

On note e_a, e_b et e_d les projecteurs des constructions de base suivantes :

$$M_{1,0} \subset M_{1,1} = K \overset{e_a}{\subset} M_{1,2} = M$$

$$M_{0,1} \subset M_{1,1} = K \overset{e_b}{\subset} M_{2,1} = N$$

$$M_{0,1} \subset M_{1,1} = K \overset{e_d}{\subset} M_{2,2} = L$$

D'après 2.6.2 et 2.7, les projecteurs e_a et e_b sont les supports des co-unités de $\hat{\mathbb{A}}$ et $\hat{\mathbb{B}}$. ($\hat{\mathbb{A}}$ et $\hat{\mathbb{S}}(X) = \hat{\mathbb{A}}'$ ont mêmes supports de counité.)

Proposition. *Si les supports des co-unités de $\hat{\mathbb{A}}$ et $\hat{\mathbb{B}}$, c'est-à-dire les projecteurs e_a et e_b commutent et que l'indice $[L : K]$ soit le produit des dimensions de $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$, le carré $\mathcal{C}_{1,1} = (M_{1,1}, M_{0,1}, M_{1,0}, M_{0,0})$ est bicommutatif.*

Le carré $\mathcal{C}_{2,2} = (M_{2,2}, M_{1,2}, M_{2,1}, M_{1,1}) = (L, M, N, K)$ est obtenu par construction de base à partir de $\mathcal{C}_{1,1}$, il est aussi bicommutatif.

Démonstration :

D'après [G.H.J. 4.2.1.(iv)], le carré $\mathcal{C}_{1,1}$ est commutatif car on a :

$$M_{1,0} \cap M_{0,1} = M_{0,0} \quad \text{et} \quad e_a e_b = e_b e_a.$$

D'autre part, on a les relations suivantes entre les indices :

$$[M_{1,1} : M_{0,0}] = [L : K] = n_a.n_b$$
$$[M_{1,1} : M_{0,0}] = [M_{1,1} : M_{0,1}].[M_{0,1} : M_{0,0}] = n_b.[M_{0,1} : M_{0,0}]$$
$$[M_{1,1} : M_{1,0}] = n_a.$$

On en déduit que $[M_{1,1} : M_{1,0}]$ vaut $[M_{0,1} : M_{0,0}]$, alors d'après [S.W. cor.7.1], le carré $\mathcal{C}_{1,1}$ est co-commutatif. Comme l'inclusion $K \subset L$ est irréductible, $M_{0,0}' \cap M_{1,1}$ est réduit à $\mathbb{C}$, $\mathcal{C}_{1,1}$ est donc bicommutatif.

Le carré $\mathcal{C}_{2,2}$ est bicommutatif par construction.

3.1.4. *Remarque.* Réciproquement, si $\mathcal{C}_{1,1}$ est bicommutatif, alors les projecteurs e_a et e_b commutent et l'indice $[L : K]$ est le produit des dimensions de $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$.

3.2. **Carrelage commutatif.**

3.2.1. Gardons les hypothèses de 3.1.3 ; à partir du carré bicommutatif $\mathcal{C}_{1,1}$, nous allons construire d'autres carrés bicommutatifs par construction de base comme en 3.1 : Nous avons déjà le carré $\mathcal{C}_{2,2}$ et nous pouvons affirmer que $e_d = e_a e_b$ est le projecteur de la construction de base sur $M_{0,0} \subset M_{1,1}$.

Posons maintenant :

$$\begin{aligned} M_{0,2} &= \langle M_{0,1}, e_a \rangle \qquad M_{2,0} = \langle M_{2,1}, e_b \rangle \\ M_{1,2} &= \langle M_{1,1}, e_a \rangle \qquad M_{2,1} = \langle M_{1,1}, e_b \rangle \\ M_{2,2} &= \langle M_{1,2}, e_b \rangle = \langle M_{2,1}, e_a \rangle = \langle M_{1,1}, e_d \rangle. \end{aligned}$$

Alors d'après 3.1, pour i prenant les valeurs 0, 1, 2, les inclusions $M_{0,i} \subset M_{1,i} \subset M_{2,i}$, $M_{i,0} \subset M_{i,1} \subset M_{i,2}$ et $M_{0,0} \subset M_{1,1} \subset M_{2,2}$ sont standard. Comme n_a (resp. n_b) est l'indice de $M_{0,0}$ dans $M_{0,1}$ (resp. $M_{1,0}$) ; n_a (resp. n_b) est alors l'indice de toutes les inclusions horizontales (resp. verticales) $M_{i,j} \subset M_{i,j+1}$ (resp. $M_{i,j} \subset M_{i+1,j}$).

3.2.2. Le carré $\mathcal{C}_{1,2}$ est commutatif par construction de base [G.H.J. 4.2.3] et co-commutatif [Sano. prop 2.2.2] , le lemme suivant nous permet d'affirmer qu'il est bicommutatif ; on reprend les notations de 2 pour l'inclusion $M_{1,0} \subset M_{1,1}$.

Lemme. *L'inclusion $M_{0,1} \subset M_{1,2}$ est irréductible.*

Démonstration :

Soit $x \in M_{1,2} \cap M'_{0,1}$, x se décompose comme $\sum_{s=1}^{n_a} a_s E_{1,1}(a_s^* x)$. Comme $E_{1,1}(a_s^* x)$ commute à $M_{0,0}$, c'est un scalaire puisque l'inclusion $M_{0,0} \subset M_{1,1}$ est irréductible. Donc x est un élément de $A_{1,2} \cap M'_{0,1} = M_{1,2} \cap M'_{1,1}$, c'est un scalaire.

En échangeant les lignes et les colonnes, on peut affirmer de même que $\mathcal{C}_{2,1}$ est bicommutatif.

3.2.3. A partir de $\mathcal{C}_{2,2}$, on construit de même $\mathcal{C}_{3,3}$, les projecteurs e'_a pour l'inclusion $M_{2,1} \subset M_{2,2}$ et e'_b pour $M_{1,2} \subset M_{2,2}$, les algèbres $M_{3,1}$, $M_{3,0}$, $M_{1,3}$ et $M_{0,3}$. Alors $e'_d = e'_a e'_b$ est le projecteur de la construction de base sur $M_{1,1} \subset M_{2,2}$.

Comme précédemment les carrés $\mathcal{C}_{3,3}$, $\mathcal{C}_{2,3}$ et $\mathcal{C}_{3,2}$ sont bicommutatifs par construction de base, le carré $\mathcal{C}_{1,3}$ est commutatif et co-commutatif, l'irréductibilité de $M_{0,2} \subset M_{1,3}$ se démontre comme en 3.2.2 en utilisant une base $A_{1,3}$.

On peut continuer de façon cohérente cette construction et on obtient un réseau de facteurs formant des carrés bicommutatifs qu'on appellera un *carrelage commutatif* :

$$\begin{array}{ccccccccc}
M_{0,0} & \subset & M_{0,1} & \subset & M_{0,2} & \subset & M_{0,3} & \subset & M_{0,4} \\
\cap & \mathcal{C}_{\mathbf{1,1}} & \cap & \mathcal{C}_{\mathbf{1,2}} & \cap & & \cap & & \cap \\
M_{1,0} & \subset & M_{1,1} & \overset{e_a}{\subset} & M_{1,2} & \overset{e'_a}{\subset} & M_{1,3} & \overset{e''_a}{\subset} & M_{1,4} \\
\cap & \mathcal{C}_{\mathbf{2,1}} & \cap\, e_b & \mathcal{C}_{\mathbf{2,2}} & \cap\, e_b & & \cap\, e_b & & \cap \\
M_{2,0} & \subset & M_{2,1} & \overset{e_a}{\subset} & M_{2,2} & \overset{e'_a}{\subset} & M_{2,3} & \overset{e''_a}{\subset} & M_{2,4} \\
\cap & & \cap\, e'_b & & \cap\, e'_b & \mathcal{C}_{\mathbf{3,3}} & \cap\, e'_b & & \cap \\
M_{3,0} & \subset & M_{3,1} & \overset{e_a}{\subset} & M_{3,2} & \overset{e'_a}{\subset} & M_{3,3} & \overset{e''_a}{\subset} & M_{3,4} \\
\cap & & \cap\, e''_b & & \cap\, e''_b & & \cap\, e''_b & \mathcal{C}_{\mathbf{4,4}} & \cap \\
M_{4,0} & \subset & M_{4,1} & \subset & M_{4,2} & \subset & M_{4,3} & \subset & M_{4,4}
\end{array}$$

Toutes les inclusions sont irréductibles et d'indice fini. Chaque algèbre, ainsi que chaque carré, est répérée par un premier indice de ligne, un second indice de colonne. De plus, si $i \leq h$ et $j \leq k$, l'algèbre $M_{i,j}$ est contenue dans l'algèbre $M_{h,k}$. $1_{i,j}$ est l'identité de $H_{i,j}$, $E_{i,j}$ l'espérance conditionnelle, définie grâce à la trace, d'une algèbre contenant $M_{i,j}$ sur l'algèbre $M_{i,j}$, $\Lambda_{i,j}$ l'injection de $M_{i,j}$ dans $H_{i,j}$, l'espace de la représentation standard de $M_{i,j}$, $J_{i,j}$ l'isométrie bijective anti-linéaire canonique de $H_{i,j}$ et $j_{i,j}$ l'anti-isomorphisme linéaire défini, pour x dans $\mathcal{L}(H_{i,j})$ par :

$$j_{i,j}(x) = J_{i,j} x^* J_{i,j}.$$

Les projecteurs e''_a et e''_b sont associés à la construction de base sur les inclusions $M_{3,2} \subset M_{3,3}$, respectivement $M_{2,3} \subset M_{3,3}$. On pose $A_{i,j+2} = M_{i,j+2} \cap M'_{i,j}$, $B_{i+2,j} = M_{i+2,j} \cap M'_{i,j}$ et $D_{i+2,j+2} = M'_{i,j} \cap M_{i+2,j+2}$.

3.3. **Les algèbres de Kac dans le carrelage commutatif.**

3.3.1. Nous rappelons maintenant les théorèmes 2.1 et 2.2 de Sano.

Théorème (T. Sano). *Soit $\mathcal{C} = (L, M, N, K)$ un carré bicommutatif de facteurs de type II_1.*

$$\begin{array}{ccc}
K & \subset & M \\
\cap & & \cap \\
N & \subset & L
\end{array}$$

Si l'une des conditions suivantes est réalisée, $K \subset L$ est de profondeur 2.
(i) Les inclusions $K \subset M$ et $K \subset N$ sont de profondeur 2.
(ii) Les inclusions $N \subset L$ et $M \subset L$ sont de profondeur 2.
(iii) Les inclusions $K \subset N$ et $N \subset L$ sont de profondeur 2.

Appliquons ce théorème aux carrés bicommutatifs $\mathcal{C}_{1,1}, \mathcal{C}_{2,2}, \mathcal{C}_{1,2}$ et $\mathcal{C}_{2,1}$ du carrelage commutatif : Les inclusions $M_{0,0} \subset M_{1,1}$, $M_{0,1} \subset M_{1,2}$, $M_{1,0} \subset M_{2,1}$ et $M_{1,1} \subset M_{2,2}$ sont de profondeur 2. Dans les théorèmes 7.5, 7.6 et 8.5.2, nous précisons les algèbres de Kac associées à ces inclusions.

3.3.2. *Notations.* Nous présentons dans ce tableau les notations pour les objets analogues à ceux définis dans la partie 2 pour les inclusions "horizontale" $M_{1,0} \subset M_{1,1}$, "verticale" $M_{0,1} \subset M_{1,1}$ et "diagonale" $M_{0,0} \subset M_{1,1}$.

$M_0 \subset M_1$	$M_{1,0} \subset M_{1,1}$	$M_{0,1} \subset M_{1,1}$	$M_{0,0} \subset M_{1,1}$
A_1	$A_{1,2}$	$B_{2,1}$	$D_{2,2}$
A_3	$A_{1,3}$	$B_{3,1}$	$D_{3,3}$
h	h_a	h_b	h_d
π	π_a	π_b	π_d
u	u	v	w
Λ	$F_{1,1}$	$G_{1,1}$	$K_{1,1}$
$\bar{\Lambda}$	$F_{1,2}$	$G_{2,1}$	$K_{2,2}$
X	X	Y	W
Γ_3	Γ_a	Γ_b	Γ_d
$E_{M_3 \cap M_0'}$	E_a	E_b	E_d

Dans tout le texte, nous garderons les notations de 2 pour les bases de $A_{1,2}$ et $A_{1,3}$. Nous noterons $\{b_p, p = 1, \ldots, n_b\}$ (resp. $\{\beta_k, k = 1, \ldots, n_b\}$) une famille d'unités matricielles normalisées de $B_{2,1}$ (resp. $B_{3,1}$). On utilisera aussi $\{\lambda_t, t = 1, \ldots n_a\}$ une base de Pimsner-Popa de $M_{0,1}$ sur $M_{0,0}$ (donc de $M_{i,1}$ sur $M_{i,0}$ pour tout i).

3.4. **Les isomorphismes χ.**

3.4.1. On définit un isomorphisme entre les algèbres de la colonne 1 et celles de la colonne 3 du carrelage commutatif.

Proposition. *(i) $\chi = j_{2,2} j_{2,1}$ est un isomorphisme de $M_{4,1} \cap M'_{0,1}$ sur $M_{4,3} \cap M'_{0,3}$ qui laisse fixes les projecteurs e_b, e'_b, e''_b et e'_a et envoie l'algèbre $B_{i,1}$ sur $B_{i,3}$ $(i = 2, 3, 4)$.*

(ii) Pour $y \in M_{4,1} \cap M'_{1,1}$, $\chi(y) = \sum_{r=1}^{n_a} a_r y e'_a a_r^*$.

(iii) Pour $y \in M_{3,1} \cap M'_{0,1}$, $y e'_a$ vaut $\chi(y) e'_a$. En particulier, pour $y \in B_{3,1}$, on a :

$$y = n_a E_{3,1}(\chi(y) e'_a) = n_a E_{B_{3,1}}(\chi(y) e'_a)$$

Démonstration :

(i) Comme $M_{4,1}$ est le commutant de e'_a dans $M_{4,2}$, $j_{2,2}(M'_{4,1})$ est engendré par $M'_{0,2}$ et e'_a, on a : $\chi(B_{2,1}) = j_{2,2}(B_{4,1}) = B_{2,3}$. On démontre de même les autres affimations. L'invariance des projecteurs résulte de [Da. 2.2.1].

Nous donnons maintenant une formule pour χ qui nous servira pour démontrer (ii) et (iii).

Lemme. *Si $y \in M_{4,1} \cap M'_{0,1}$ dans $M'_{0,3} \cap M_{4,3}$ défini par :*

$$\chi(y) = n_a \sum_{t=1}^{n_a} \lambda_t e_a y e'_a e_a \lambda_t^*.$$

Démonstration du lemme :

Comme $\{\sqrt{n_a} \lambda_t e_a b_p, t = 1, \ldots, n_a, p = 1, \ldots n_b\}$ est une base de Pimsner-Popa de $M_{2,2}$ sur $M_{1,1}$ [Da. 1.5.2.g], la formule [Da. 3.2.1] s'écrit pour $y \in B_{3,1} \subset D_{3,3}$:

$$j_{2,2}(y) = n_a^2 n_b \sum_{t,p=1}^{n_a,n_b} E_{2,2}(e'_a e'_b \lambda_t e_a b_p y) e'_a e'_b b_p^* e_a \lambda_t^*.$$

Simplifions cette expression :

$$\begin{aligned} n_a E_{2,2}(e'_a e'_b \lambda_t e_a b_p y) &= n_a E_{2,2}(e'_a) E_{2,2}(e'_b \lambda_t e_a b_p y) \qquad (\mathcal{C}_{2,3} \text{ est commutatif}) \\ &= E_{2,2}(e'_b \lambda_t e_a b_p y) = \lambda_t e_a E_{2,2}(e'_b b_p y) \qquad (e'_b \in M'_{1,2}) \\ &= \lambda_t e_a E_{2,1}(e'_b b_p y) \qquad (e'_b b_p y \in M_{3,1} \text{ et } \mathcal{C}_{3,3} \text{ commutatif}) \end{aligned}$$

On conclut grâce à la formule 2.2.3 (ii) écrite pour $j_{2,2}(y)$ et $y \in B_{3,1}$.

La formule se vérifie facilement pour e_b et e''_b, comme elle définit un morphisme et on conclut en rappelant que $M_{4,1} \cap M'_{0,1}$ est engendrée par $B_{3,1}$ et ces deux projecteurs.

fin de la démonstration de la proposition :

(ii) Pour obtenir la nouvelle expression de χ pour y dans $M_{4,1} \cap M'_{1,1}$, il suffit d'écrire les $\sqrt{n_a}\lambda_t e_a$ sur la base $\{a_r, r = 1, \ldots, n_a\}$ qui est une base de Pimsner-Popa de $M_{1,2}$ sur $M_{1,1}$.

(iii) Comme y et e'_a commutent aux λ_t, on peut écrire en utilisant les propriétés des bases de Pimsner Popa :

$$\chi(y)e'_a = n_a \sum_{t=1}^{n_a} \lambda_t e_a y e'_a e_a \lambda_t^* e'_a = \sum_{t=1}^{n_a} \lambda_t e_a y e'_a \lambda_t^* = \sum_{t=1}^{n_a} \lambda_t e_a \lambda_t^* y e'_a = y e'_a = y e'_a.$$

La propriété pour y de $B_{3,1}$ en découle.

3.4.2. On vérifie alors facilement que χ envoie la tour dérivée de $M_{0,1} \subset M_{1,1}$ sur celle de $M_{0,3} \subset M_{1,3}$.

Proposition. *Soit $(k_b, G_{1,3})$ la représentation standard de l'algèbre $B_{2,3}$.*

(i) L'application $\mathcal{H}$ qui à $G_{1,1}(b)$ associe $G_{1,3}(\chi(b))$ pour $b \in B_{2,1}$ est une isométrie surjective de h_b sur k_b.

(ii) On note encore π_b la représentation de $M_{3,3} \cap M'_{0,3}$ sur k_b et on a :

$$\mathcal{H}\pi_b(y)\mathcal{H}^* = \pi_b(\chi(y)) \qquad (y \in M_{3,1} \cap M'_{0,1})$$

c'est-à-dire χ envoie la tour $\mathbb{C} \subset B_{2,1} \overset{e'_b}{\subset} M_{3,1} \cap M'_{0,1} \overset{e''_b}{\subset} M_{4,1} \cap M'_{0,1}$ sur la tour analogue de la troisième colonne en respectant la représentation π_b et l'unitaire v (on gardera la même notation pour la troisième colonne).

3.4.3. *Remarques.* (i) On devrait noter χ_b cet isomorphisme χ puisque l'on peut définir de même un isomorphisme χ_a de $M_{4,1} \cap M'_{0,1}$ sur $M_{3,4} \cap M'_{3,0}$; en fait on notera χ ces deux isomorphismes quand aucune confusion ne sera possible.

(ii) On a donc d'autres inclusions de profondeur 2 : $M_{0,3} \subset M_{1,3}$, $M_{3,0} \subset M_{3,1}$ ...

4. Exemple fondamental

Comme en [B.S. 8.13], considérons un couple assorti de systèmes de Kac (h_a, X, u) et (h_b, Y, v), l'unitaire Z de $\mathcal{L}(h_a \otimes h_b)$ et leur Z-produit tensoriel $(h_a \otimes h_b, V, w)$. On suppose que n_a la dimension de h_a et n_b, celle de h_b sont finies.

4.1. **Notations.** On définit les représentations π de $\mathcal{L}(h_a)$ et π' de $\mathcal{L}(h_b)$ dans $h_a \otimes h_b$ pour $x \in \mathcal{L}(h_a)$ et pour $y \in \mathcal{L}(h_b)$ par :

$$\pi(x) = x \otimes 1_b \quad \text{et} \quad \pi'(y) = Z^*(1_a \otimes y)Z$$

D'après [B.S. 8.14], l'algèbre $w\hat{S}(V)w$ est linéairement engendrée par $\pi(uS(X)u)$ et $\pi'(vS(Y)v)$. D'après [B.S. 8.12], l'algèbre $S(V)$ est engendrée par $\pi(S(X))$ et $\pi'(S(Y))$. On note e_d (resp. e_X, e_Y, e'_d, e'_X, e'_Y) le support de la co-unité de $\hat{\mathbb{S}}(V)$ (resp. $\hat{\mathbb{S}}(X)$, $\hat{\mathbb{S}}(Y)$, $\mathbb{S}(V)$, $\mathbb{S}(X)$, $\mathbb{S}(Y)$) et ϵ_X et ϵ_Y les co-unités respectives de $\mathbb{S}(X)$ et de $\mathbb{S}(Y)$; on pose alors :

$$e_a = \pi(e_X) \quad e'_a = \pi(e'_X) \quad e_b = \pi'(e_Y) \quad e'_b = \pi'(e'_Y)$$

On suppose que l'algèbre de Kac $\mathbb{S}(V)$ agit sur un facteur P de type II_1 par l'action extérieure δ ([Y]) et, comme en 2.6.3, on considère la tour :

$$M_{0,0} \subset \overset{e_d}{M_{1,1}} \subset \overset{e'_d}{M_{2,2}} \subset M_{3,3}$$

isomorphe à la tour $P^\delta \otimes \mathbb{C} \subset \delta(P) \subset P \rtimes_\delta \mathbb{S}(V) \subset P \otimes \mathcal{L}(h_a \otimes h_b)$ et telle que l'algèbre $D_{2,2} = M_{2,2} \cap M'_{0,0}$ soit identifiée à $w\hat{S}(V)w$, $D_{3,3} = M_{3,3} \cap M'_{1,1}$ à $S(V)$ et $M_{3,3} \cap M'_{0,0}$ à $\mathcal{L}(h_a \otimes h_b)$. L'action est alors $\delta_d = Ad(1_{1,1} \otimes w)\iota_d$ où ι_d est l'inclusion de $M_{1,1}$ dans $M_{3,3}$ vu comme $M_{1,1} \otimes \mathcal{L}(h_a \otimes h_b)$ (2.6.3).

Nous allons montrer que l'inclusion $M_{1,1} \subset M_{2,2}$ vérifie les hypothèses de 3.1.3. Pour cela, définissons les sous-facteurs suivants de $M_{3,3}$:

$$M_{1,2} = (M_{1,1} \cup \pi(u\hat{S}(X)u))'' \qquad M_{2,1} = (M_{1,1} \cup \pi'(v\hat{S}(Y)v))''$$
$$M_{1,3} = (M_{1,2} \cup \pi(S(X)))'' \qquad M_{3,1} = (M_{2,1} \cup \pi'(S(Y)))''$$

4.2. **Etude de l'inclusion $M_{1,1} \subset M_{1,2}$.**

Proposition. *L'inclusion $M_{1,1} \subset M_{1,2}$ est une inclusion irréductible de profondeur 2 et d'indice n_a. Si $M_{1,0}$ est le commutant de e_a dans $M_{1,1}$, la tour*

$$M_{1,0} \subset \overset{e_a}{M_{1,1}} \subset \overset{e'_a}{M_{1,2}} \subset M_{1,3}$$

est obtenue par construction de base. Et on a :

$$\pi(u\hat{S}(X)u) = A_{1,2} = M_{1,2} \cap M'_{1,0} \quad \textit{et} \quad \pi(S(X)) = A_{1,3} = M_{1,3} \cap M'_{1,1}.$$

Démonstration :

Comme en 2.2.1, $\{a_r, r = 1, \dots n_a\}$ (resp.$\{\alpha_i, i = 1, \dots n_a\}$) est une famille d'unités matricielles normalisées de $\pi(u\hat{S}(X)u)$ (resp. $\pi(S(X))$). Comme l'action de $\mathbb{S}(V)$ est extérieure, l'inclusion $M_{0,0} \subset M_{1,1}$ est irréductible, l'élément $E_{1,1}(a_r^* a_s)$ de $M'_{0,0} \cap M_{1,1}$ vaut donc $tr(a_r^* a_s)$, on peut alors écrire $H_{1,2}$ comme la somme orthogonale des sous-espaces $a_r H_{1,1}$ où r varie de 1 à n_a. Grâce à [G.H.J. 3.4.1. et 3.2.4], on en déduit que $[M_{1,2} : M_{1,1}]$ vaut n_a et que $\{a_r, r = 1, \dots n_a\}$ est une base de Pimsner-Popa de $M_{1,2}$ sur $M_{1,1}$.

Comme $M'_{1,1} \cap M_{1,2}$ est contenu dans $M'_{1,1} \cap M_{2,2}$, l'inclusion $M_{1,1} \subset M_{1,2}$ est irréductible, on peut donc montrer, comme précédemment, que $[M_{1,3} : M_{1,2}]$ vaut n_a et que $\{\alpha_i, i = 1, \dots n_a\}$ est une base de Pimsner-Popa de $M_{1,3}$ sur $M_{1,2}$. En décomposant les éléments de $M'_{1,1} \cap M_{1,3}$ sur la base $\{\alpha_i, i = 1, \dots n_a\}$, on montre facilement que $\pi(S(X))$ est l'algèbre $A_{1,3} = M'_{1,1} \cap M_{1,3}$.

Comme e'_X est le support de la co-unité de $\mathbb{S}(X)$, on a :

$$E_{1,2}(e'_a)1_{1,2} = tr(\pi(e'_X))1_{1,2} = n_a^{-1}1_{1,2}.$$

Puisque les indices $[M_{1,2} : M_{1,1}]$ et $[M_{1,3} : M_{1,2}]$ sont égaux, que e'_a commute à $M_{1,1}$ et que $E_{1,2}(e'_a)1_{1,2}$ vaut $[M_{1,2} : M_{1,1}]^{-1}1_{1,2}$, $M_{1,3}$ est l'extension de $M_{1,2}$ par $M_{1,1}$ et e'_a est le projecteur de Jones [PiPo. 2-1.2.2].

Grâce à [Sano cor.2.1], l'égalité $dimA_{1,3} = [M_{1,2} : M_{1,1}]$ permet d'affirmer que l'inclusion $M_{1,1} \subset M_{1,2}$ est de profondeur 2.

Soit $M_{1,0}$ le commutant de e_a dans $M_{1,1}$, comme $E_{1,1}(e_a)1_{1,1}$ vaut $n_a^{-1}1_{1,1}$, d'après [PiPo 1 1.8], $M_{1,2}$ est l'extension de $M_{1,1}$ par $M_{1,0}$. L'inclusion $M_{1,0} \subset M_{1,1}$ est de profondeur 2 puisque $M'_{1,0} \cap M_{1,3}$ est anti-isomorphe à $M'_{1,1} \cap M_{1,4}$. L'algèbre $A_{1,2} = M'_{1,0} \cap M_{1,2}$ est donc de dimension n_a, elle coïncide avec $\pi(u\hat{S}(X)u)$.

Nous obtenons des résultats analogues pour l'inclusion $M_{1,1} \subset M_{2,1}$.

4.3. **Le carré bicommutatif $\mathcal{C}_{2,2} = (M_{2,2}, M_{1,2}, M_{2,1}, M_{1,1})$.** Comme l'algèbre $D_{2,2}$ est engendrée par les algèbres $\pi(u\hat{S}(X)u)$ et $\pi'(v\hat{S}(Y)v)$, le facteur $M_{2,2}$ est engendré par les facteurs intermédiaires $M_{1,2}$ et $M_{2,1}$. De plus les représentations π et π' sont des morphismes d'algèbres de Hopf de $u\hat{S}(X)u$, respectivement $v\hat{S}(Y)v$ dans $w\hat{S}(V)w$. On a donc :

$$e_d = \rho_V(tr \otimes tr) = \pi(\rho_X(tr))\pi'(\rho_Y(tr))$$

c'est-à-dire $e_a e_b = e_d = e_d^* = e_b^* e_a^* = e_b e_a$ puisque le support de la co-unité d'une algèbre de Kac est un projecteur central. On conclut, comme en 3.1.3, que les carrés $(M_{1,1}, M_{0,1}, M_{1,0}, M_{0,0})$ et $(M_{2,2}, M_{1,2}, M_{2,1}, M_{1,1})$ sont bicommutatifs.

4.4. **Le carré bicommutatif $\mathcal{C}_{3,3} = (M_{3,3}, M_{2,3}, M_{3,2}, M_{2,2})$.** Soient $M_{0,2}$ l'algèbre engendrée par $M_{0,1}$ et e_a et $M_{2,0}$ l'algèbre engendrée par $M_{1,0}$ et e_b ; d'après 3.2.2, les carrés $\mathcal{C}_{1,2} = (M_{1,2}, M_{0,2}, M_{1,1}, M_{0,1})$ et $\mathcal{C}_{2,1} = (M_{2,1}, M_{1,1}, M_{2,0}, M_{1,0})$ sont bicommutatifs ; à partir de $\mathcal{C}_{1,2}$, on construit, comme en 3.1, $\mathcal{C}_{1,3} = (M_{1,3}, M_{0,3}, M_{1,2}, M_{0,2})$ où $M_{0,3}$ est l'algèbre engendrée par $M_{0,2}$ et e'_a et $\mathcal{C}_{2,3} = (M_{2,3}, M_{1,3}, M_{2,2}, M_{1,1})$ où $M_{2,3} = \langle M_{1,3}, e_b\rangle = \langle M_{2,2}, e'_a\rangle$; de même à partir de $\mathcal{C}_{2,1}$, on construit $\mathcal{C}_{3,1}$ et $\mathcal{C}_{3,2}$, le carré $\mathcal{C}_{3,3} = (M_{3,3}, M_{2,3}, M_{3,2}, M_{2,2})$ est alors bicommutatif [3.2.3].

4.5. Ces quelques lemmes nous seront utiles pour montrer que $\mathbb{S}(X)$ et $\mathbb{S}(Y)$ agissent sur $M_{1,1}$.

Lemme 1 : *Le projecteur e'_a (resp. e'_b) commute à $\pi'(\mathcal{L}(h_b)$ (resp. $\pi(\mathcal{L}(h_a))$ et on a :*

$$e'_a = e'_X \otimes 1_b = Ze'_aZ^*, \quad e'_b = 1_a \otimes e'_Y = Ze'_bZ^*, \quad e'_d = e'_X \otimes e'_Y$$

Démonstration :

Les propriétés de commutation des projecteurs résultent de 4.4.

e'_a vaut $e'_X \otimes 1_b$ par définition. Comme e'_a commute à $\pi'(\mathcal{L}(h_b)$, $Z(e'_X \otimes 1_b)Z^*$ commute à $1_a \otimes \mathcal{L}(h_b)$, il existe donc un projecteur p de $\mathcal{L}(h_b)$ tel que Ze'_aZ^* égale $p \otimes 1_b$; comme e'_b commute à $\pi(\mathcal{L}(h_a)$, il existe un projecteur q de $\mathcal{L}(h_b)$ tel que e'_b soit égal à $1_a \otimes q$, alors on a : $e'_X \otimes q = e'_a e'_b = e'_d = we'_d w = (u \otimes v)(p \otimes e'_Y)(u \otimes v)$ d'où on tire les égalités : $p = e'_X$, et $q = e'_Y$ et celles du lemme.

Lemme 2 :

$$(i)\ \textit{Le carré} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \subset & M'_{1,0} \cap M_{1,3} \\ \cap & & \cap \\ M'_{0,1} \cap M_{3,1} & \subset & M'_{0,0} \cap M_{3,3} \end{array} \quad \textit{est commutatif.}$$

$$(ii)\ \textit{Pour } y \in \mathcal{L}(h_b),\ (1_a \otimes tr)(\pi'(y)) = tr(\pi'(y)).$$

$$(iii)\ Pour\ x \in \mathcal{L}(h_a),\ (1_b \otimes tr)(T(x \otimes 1_b)) = tr(x).$$

Démonstration :
(i) On utilise la commutativité des carrés $\mathcal{C}_{3,3}$, $\mathcal{C}_{2,3}$ et $\mathcal{C}_{2,2}$.
(ii) résulte de (i) car on peut écrire pour $y \in \mathcal{L}(h_b)$ et $x \in \mathcal{L}(h_a)$:

$$tr[(1_a \otimes tr)(\pi'(y))x] = (tr \otimes tr)(\pi'(y)\pi(x)) = tr(\pi'(y))tr(x) = tr(y)tr(x).$$

(iii) Pour $y \in \mathcal{L}(h_b)$ et $x \in \mathcal{L}(h_a)$, on a :

$$(tr \otimes tr)(\pi'(y)\pi(x)) = (tr \otimes tr)((y \otimes 1_a)T(x \otimes 1_b)] = tr[y(1_b \otimes tr)(T(x \otimes 1_b))].$$

Et on conclut grâce à (i).

Lemme 3 : *Avec les notations de 3.3.2*

$$\text{(i) } (1_a \otimes \epsilon_Y)(a_r b_p e'_a e'_b b_q^* a_s^*) = tr(b_p)tr(b_q^*)\pi^{-1}(a_r e'_a a_s^*)$$

$$\text{(ii) } (1_b \otimes \epsilon_X)T(a_r b_p e'_a e'_b b_q^* a_s^*) = tr(a_r)tr(a_s^*)\pi'^{-1}(b_p e'_b b_q^*)$$

Démonstration :
Le lemme 1 permet d'écrire :

$$(1_a \otimes \epsilon_Y)(a_r b_p e'_a e'_b b_q^* a_s^*) = \pi^{-1}(a_r e'_a)(1_a \otimes \epsilon_Y)(b_p e'_b b_q^*)\pi^{-1}(a_s^*)$$

ainsi que $(1_a \otimes \epsilon_Y)(b_p e'_b b_q^*) = (1_a \otimes tr)(n_b e'_b b_p e'_b b_q^*)$. D'après le lemme 2, on a alors :

$$(1_a \otimes \epsilon_Y)(b_p e'_b b_q^*) = tr(n_b e'_b b_p e'_b b_q^*) = tr(b_p)tr(b_q^*).$$

Et (i) est démontré. (ii) se démontre de manière analogue.

Lemme 4 : *Comme en 2.6.3, ι_a (resp. ι_b, ι_d) est l'inclusion de $M_{1,1}$ dans $M_{1,3}$ (resp. $M_{3,1}$, $M_{3,3}$). On a les relations suivantes :*

$$(i)\ \iota_a = [1_{1,1} \otimes \pi(1_a \otimes \epsilon_Y)]\iota_d$$

$$(ii)\ \iota_b = [1_{1,1} \otimes \pi'(1_b \otimes \epsilon_X)T]\iota_d$$

Démonstration :
Comme $\mathcal{C}_{2,2}$ est commutatif, la famille $\{a_r b_p, r = 1, \dots, n_a, p = 1, \dots, n_b,\}$ est une base de Pimsner-Popa de $M_{2,2}$ sur $M_{1,1}$, on exprime ι_d , pour $z \in M_{1,1}$, à l'aide de cette base [2.6.3]. Les relations (i) et (ii) résultent alors du lemme 3.

4.6. Actions de $\mathbb{S}(X)$ et de $\mathbb{S}(Y)$ sur le facteur $M_{1,1}$.

Proposition. *Posons :*

$$\delta_X = [1_{1,1} \otimes (\epsilon_Y \otimes 1_a)T]\delta_d \quad et \quad \delta_Y = [1_{1,1} \otimes (\epsilon_X \otimes 1_b)]\delta_d$$

δ_X est une action de $\mathbb{S}(X)$ sur le facteur $M_{1,1}$ et l'inclusion $M_{1,1} \subset M_{1,2}$ est isomorphe à $\delta_X(M_{1,1}) \subset M_{1,1} \rtimes_{\delta_X} \mathbb{S}(X)$.

δ_Y est une action de $\mathbb{S}(Y)$ sur le facteur $M_{1,1}$ et l'inclusion $M_{1,1} \subset M_{2,1}$ est isomorphe à $\delta_Y(M_{1,1}) \subset M_{1,1} \rtimes_{\delta_Y} \mathbb{S}(Y)$.

Démonstration :
Comparons d'abord δ_X et δ_Y avec les actions δ_a et δ_b obtenues canoniquement à partir des inclusions $M_{1,1} \subset M_{1,2}$ et $M_{1,1} \subset M_{2,1}$.

De la définition de δ_X, de 2.6.3 et du lemme 4 de 4.5, on déduit :

$$\begin{aligned}\delta_X &= [1_{1,1} \otimes (\epsilon_Y \otimes 1_a)T]\delta_d = [1_{1,1} \otimes ((\epsilon_Y \otimes 1_a)TAdw)]\iota_d \\ &= [1_{1,1} \otimes ((1_a \otimes \epsilon_Y)Ad(u \otimes v)]\iota_d = [1_{1,1} \otimes (Adu(1_a \otimes \epsilon_Y))]\iota_d \\ &= [1_{1,1} \otimes (Adu)\pi^{-1}]\iota_a = [1_{1,1} \otimes \pi^{-1}]\delta_a.\end{aligned}$$

De même pour δ_Y, on obtient $\delta_Y = [1_{1,1} \otimes \pi'^{-1}]\delta_b$

On sait donc maintenant que δ_X (resp. δ_Y) est un morphisme injectif de $M_{1,1}$ dans $M_{1,1} \otimes S(X)$ (resp. $M_{1,1} \otimes S(Y)$)). Il reste à s'assurer que ce sont bien les algèbres de Kac $\mathbb{S}(X)$ et $\mathbb{S}(Y)$ qui agissent sur $M_{1,1}$.

Si Γ_a (resp. Γ_b) est le coproduit de $\mathbb{S}(X)$ (resp. $\mathbb{S}(Y)$), d'après [B.S. 8.2], le coproduit Γ de $\mathbb{S}(V)$ est défini par : $\Gamma = (1_a \otimes T \otimes 1_b)(\Gamma_a \otimes \Gamma_b)$.

Pour montrer l'égalité : $(\delta_X \otimes 1_a)\delta_X = (1_{1,1} \otimes \Gamma_a)\delta_X$, il suffit de vérifier :

$$(*)\ (\epsilon_Y \otimes 1_a \otimes \epsilon_Y \otimes 1_a)(T \otimes T)\Gamma = \Gamma_a(\epsilon_Y \otimes 1_a)T.$$

La propriété (ii) de l'inversion permet d'écrire :

$$(T\otimes T)\Gamma = (T\otimes T)(1_a\otimes T\otimes 1_b)(\Gamma_a\otimes\Gamma_b) = (T\otimes 1_b\otimes 1_a)(1_a\otimes\Gamma_b\otimes 1_a)(1_a\otimes T)(\Gamma_a\otimes 1_b)$$

Comme $(1_b \otimes \epsilon_Y)\Gamma_b$ est l'identité de $\mathcal{L}(h_b)$, on a :

$$(\epsilon_Y \otimes 1_a \otimes \epsilon_Y \otimes 1_a)(T \otimes T)\Gamma = (\epsilon_Y \otimes 1_a \otimes 1_a)(T \otimes 1_a)(1_a \otimes 1_b \otimes 1_a)(1_a \otimes T)(\Gamma_a \otimes 1_b)$$

La propriété (i) de l'inversion permet alors d'obtenir (*).

On montre de même l'égalité : $(\delta_Y \otimes 1_b)\delta_Y = (1_{1,1} \otimes \Gamma_b)\delta_Y$.

4.7. **Conclusion.**

Théorème. *Soit $((h_a, X, u)$ et (h_b, Y, v), $Z)$ un couple assorti de systèmes de Kac tel que les dimensions de h_a et h_b soient finies.*

On suppose que $S(X) \otimes_Z S(Y)$ agit sur un facteur K de type II_1 par une action extérieure δ et que l'inclusion $K \subset L$ est isomorphe à $\delta(K) \subset K \rtimes_\delta (S(X) \otimes_T S(Y))$. Alors il existe des facteurs intermédiaires M et N et des actions δ_X et δ_Y de $\mathbb{S}(X)$ et $\mathbb{S}(Y)$ sur K telles que l'inclusion $K \subset M$ (resp. $K \subset N$) soit isomorphe à $\delta_X(K) \subset K \rtimes_{\delta_X} \mathbb{S}(X)$ (resp. $\delta_Y(K) \subset K \rtimes_{\delta_Y} \mathbb{S}(Y)$.

$$\text{Le carré} \quad \begin{array}{ccc} K & \subset & M \\ \cap & & \cap \\ N & \subset & L \end{array} \quad \text{est alors bicommutatif.}$$

4.8. **Cas particulier.** Dans [S.W.], T. Sano et Y. Watatani traitent le cas où A et B forment un paire assortie au sens de S. Majid ([M.1] [M. 2]) et D, le groupe engendré par A et B agit par une action extérieure δ sur un facteur P de type II_1.

5. Les algèbres des inclusions diagonales

Nous étudions maintenant les algèbres de Kac $D_{2,2}$, $D_{3,3}$, $D_{2,3}$ et $D_{3,4}$.

5.1. **Bases.** Comme le carré $\mathcal{C}_{2,2}$ est commutatif, le carré $(D_{2,2}, B_{2,1}, A_{1,2}, \mathbb{C})$ est commutatif ; le lemme 2.2 de [Sano] et des considérations de dimension permettent d'affirmer alors que :

(i) $D_{2,2}$ est l'algèbre engendrée par $A_{1,2}$ et $B_{2,1}$

(ii) $D_{2,2}$ admet comme bases orthonormales $\{a_r b_p, r = 1, \dots, n_a, p = 1, \dots, n_b\}$ et $\{b_p a_r, r = 1, \dots, n_a, p = 1, \dots, n_b\}$; ce ne sont pas des unités matricielles mais elles vérifient les propriétés retenues dans la remarque 2.6.5.

On a des propriétés analogues pour les algèbres $D_{2,3}$, $D_{3,2}$ et $D_{3,4}$ [Sano th. 2.1].

On peut voir de même que $D_{3,3}$ est l'algèbre engendrée par $A_{1,3}$ et $B_{3,1}$ en considérant le carré $\mathcal{C}_{3,3}$ ou par $A_{3,3}$ et $B_{3,3}$ en considérant le carré $(M'_{1,1}, M'_{1,2}, M'_{2,1}, M'_{2,2})$ mais il est plus intéressant d'utiliser [Sano th. 2.2] :

$$D_{3,3} = A_{1,3}.B_{3,3} = B_{3,1}.A_{3,3}.$$

On obtient ainsi des bases orthonormales de $D_{3,3}$ qui sont aussi des familles d'unités matricielles normalisées car $A_{1,3}$ et $B_{3,3}$ commutent :

$$\{\alpha_i \chi_b(\beta_k), i = 1, \dots, n_a, k = 1, \dots, n_b\} \text{ et } \{\beta_k \chi_a(\alpha_i), i = 1, \dots, n_a, k = 1, \dots, n_b\}.$$

5.2. **Quelques commutants relatifs.**

Proposition. *(i)* $M_{2,1} \cap M'_{0,0} = B_{2,1}$

(ii) $M_{3,1} \cap M'_{1,0} = B_{3,1}$

(iii)$M_{3,1} \cap M'_{0,0} = M_{3,1} \cap M'_{0,1}$

(iv) $M_{2,3} \cap D_{3,3} = A_{1,3}$.

On obtient des résultats analogues en échangeant les lignes et les colonnes.

Démonstration :

(i) Comme $\{b_p, h = 1 \dots n_b\}$ est une base de Pimsner-Popa de $M_{2,1}$ sur $M_{1,1}$, un élément x de $M_{2,1} \cap M'_{0,0}$ s'écrit $\sum_{h=1}^{n_a} E_{1,1}(xb_p)b_p^*$. Comme x et b_p commutent à $M_{0,0}$, $E_{1,1}(xb_p)$ appartient à $M_{1,1} \cap M'_{0,0}$, c'est donc un scalaire et x appartient à $M_{2,1} \cap M'_{0,1}$.

(ii) Se démontre de même puisque l'inclusion $M_{1,0} \subset M_{2,1}$ est irréductible.

(iii) De même en utilisant (i), on montre (iii).

(iv) Si z appartient à $M_{2,3} \cap D_{3,3}$, alors il existe des éléments z_p de $A_{1,3}$ tels que z vaille $\sum_{h=1}^{n_b} z_p \chi(b_p)$; or on a :

$$z = E_{2,3}(z) = E_{2,3}(\sum_{h=1}^{n_b} z_p \chi(b_p)) = \sum_{h=1}^{n_b} z_p E_{2,3}(\chi(b_p)) = \sum_{h=1}^{n_b} z_p tr(\chi(b_p))$$

On en déduit que z est un élément de $A_{1,3}$.

5.3. **Le coproduit Γ_d sur $D_{3,3}$.**

Proposition. *Pour $x \in A_{1,3}$, posons $\eta_k(x) = \sum_{p=1}^{n_b} E_{2,1}(e'_b b_p \beta_k^*) x b_p^*$, alors $\eta_k(x)$ appartient à $A_{1,3}$ et le coproduit Γ_d de $D_{3,3}$ vérifie :*

$$\text{(i) } \Gamma_d(\pi_d(x)) = \sum_{i=1,k=1}^{n_a,n_b} \pi_d(\alpha_i\ \chi(\beta_k)) \otimes \pi_d(\eta_k(\nu_i(x))) \quad (x \in A_{1,3})$$

$$\text{(ii) } \Gamma_d(\pi_d(x)) = \sum_{i=1,k=1}^{n_a,n_b} \pi_d(\beta_k\ \chi(\alpha_i))) \otimes \pi_d(\nu_i(\eta_k(x))) \quad (x \in A_{1,3})$$

Démonstration :

Il est clair que $\eta_k(x)$ appartient à $M_{2,3} \cap M'_{0,0}$. D'autre part, si $z \in M_{1,1}$, on a :

$$\begin{aligned}
\eta_k(x)z &= \sum_{p=1}^{n_b} E_{2,1}(e'_b b_p \beta_k^*) x \sum_{p=1}^{n_b} E_{1,1}(b_p^* z b_q) b_q^* \\
&= \sum_{q=1}^{n_b} E_{2,1}(e'_b \sum_{p=1}^{n_b} b_p E_{1,1}(b_p^* z b_q) \beta_k^*) x b_q^* \qquad \text{(car } x, \beta_k^* \in D_{3,3}) \\
&= \sum_{q=1}^{n_b} E_{2,1}(e'_b z b_q \beta_k^*) x b_q^* = z\eta_k(x)
\end{aligned}$$

Donc $\eta_k(x)$ commute à $M_{1,1}$ et appartient à $M_{2,3} \cap D_{3,3} = A_{1,3}$ d'après 5.2 (iv).

(i) D'après 2.6.1, 2.6.5 et 5.1, si on choisit $\{\alpha_i\ \chi(\beta_k), i, k = 1 \dots n_a, n_b\}$ comme famille d'unités matricielles normalisées de $D_{3,3}$, il nous suffit de montrer que, pour $x \in A_{1,3}$, l'élément $\nu_{i,k}(x) = \sum_{r,p=1}^{n_a,n_b} E_{2,2}(e'_a e'_b b_p a_r \chi(b_k^*)\alpha_i^*) x a_r^* b_p^*$ de $D_{3,3}$ vaut $\eta_k(\nu_i(x))$. Grâce aux propriétés de commutation [3.4.1], on a :

$$\nu_{i,k}(x) = \sum_{r,p=1}^{n_a,n_b} E_{2,2}(e'_b b_p \chi(\beta_k^*) e'_a a_r \alpha_i^*) x a_r^* b_p^* = \sum_{r,p=1}^{n_a,n_b} E_{2,2}(e'_b b_p \beta_k^* e'_a a_r \alpha_i^*) x a_r^* b_p^*.$$

Comme $e'_b b_p \beta_k^*$ appartient à $M_{3,1}$ et $e'_a a_r \alpha_i^*$ appartient à $M_{1,3}$, les propriétés du carrelage commutatif et 5.2 (i) permettent d'écrire :

$$E_{2,2}(e'_b b_p \beta_k^* e'_a a_r \alpha_i^*) = E_{2,2}(e'_b b_p \beta_k^*)\ E_{2,2}(e'_a a_r \alpha_i^*) = E_{2,1}(e'_b b_p \beta_k^*)\ E_{1,2}(e'_a a_r \alpha_i^*)$$

On obtient donc : $\nu_{i,k}(x) = \eta_k(\nu_i(x))$.

(ii) s'obtient de même en utilisant la base $\{\beta_k \chi(\alpha_i), i, k = 1 \dots n_a, n_b\}$.

6. Une inversion sur $A_{1,3}$ et $B_{3,1}$

6.1. Les unitaires Z_a, Z_b et Z.

6.1.1. *Définition.* s est l'application de $h_a \otimes h_b$ dans $h_b \otimes h_a$ qui à $x \otimes y$ associe $y \otimes x$.

L'application Z_a est l'unitaire de $h_a \otimes h_b$ sur h_d défini par :

$$Z_a(F_{1,1}(a) \otimes G_{1,1}(b)) = K_{1,1}(ab) \qquad (a \in A_{1,2}, b \in B_{2,1}).$$

On définit de façon analogue l'unitaire Z_b de $h_b \otimes h_a$ sur h_d. Et on pose $Z = Z_b^* Z_a$.

6.1.2. *Proposition.* (i) Pour $x \in M_{1,3} \cap M'_{1,0}$, $\pi_d(x) = Z_a(\pi_a(x) \otimes 1_b) Z_a^*$.

(ii) Pour $y \in M_{3,1} \cap M'_{0,1}$, $\pi_d(y) = Z_b(\pi_b(y) \otimes 1_a) Z_b^*$.

Démonstration :

(i) Soient $x \in M_{1,3} \cap M'_{1,0}$, $a \in A_{1,2}$ et $b \in B_{2,1}$; d'après 2.2.2, on a :

$$\begin{aligned} \pi_d(x) K_{1,1}(ab) &= n_d K_{1,1}[E_{D_{2,2}}(x a b e'_a e'_b)] \\ &= n_d K_{1,1}[E_{D_{2,2}}(x a e'_a b e'_b)] \\ &= n_d K_{1,1}[E_{D_{2,2}}(x a e'_a)\ E_{D_{2,2}}(b e'_b)] \qquad (\mathcal{C}_{3,3} \text{ est commutatif}) \\ &= n_a K_{1,1}[E_{A_{1,2}}(x a e'_a) b] \qquad (\mathcal{C}_{2,3} \text{ est commutatif et 5.2(i)}) \\ &= Z_a(\pi_a(x) \otimes 1_b) Z_a^* K_{1,1}(ab) \qquad \text{d'après 2.2.2.} \end{aligned}$$

On obtient (ii) en échangeant les lignes et les colonnes.

6.1.3. *Relations entre les unitaires Z_a, Z_b, Z , u, v et w.*

Proposition. *(i)* $Z_a(u \otimes v) = w Z_b s$ *(i')* $Z_b(v \otimes u) = w Z_a s^*$

(ii) $Z_a^* w Z_a = (u \otimes v) s^* Z$

(iii) $Z^* s(u \otimes v) = (u \otimes v) s^* Z$

Démonstration :

Grâce à 2.2, on s'obtient (i) par un calcul direct puis (i') en échangeant les lignes et les colonnes. De (i) on déduit (ii). De (ii) et (i'), on déduit (iii).

6.1.4. *Action de* AdZ_a *sur* $1_a \otimes \pi_b(M'_{0,1} \cap M_{3,1})$.

Proposition. *Si* $y \in M'_{0,1} \cap M_{3,1}$, *on a*

$$(i)\ Z_a(1_a \otimes \pi_b(y))Z_a^* = w\pi_d(vyv)w$$

$$(ii)\ Z_a(1_a \otimes \pi_b(y))Z_a^* = \sum_{r=1}^{n_a} a_r y e'_a a_r^*.$$

Si $y \in B_{3,1}$, *on a* $Z_a(1_a \otimes \pi_b(y))Z_a^* = \pi_d(\chi(y))$.

On a des résultats analogues pour Z_b *en échangeant les lignes et les colonnes.*

Démonstration :

(i) résulte de 6.1.3 et 6.1.2.

(ii) Pour $y \in B_{2,1}$, la formule annoncée se déduit de (i) et 2.2.3 (viii) appliquée à v et w. On vérifie (ii) pour $y = e'_b$ à partir de (i). Comme $M'_{0,1} \cap M_{3,1}$ est engendrée par $B_{2,1}$ et e'_b, les propriétés de la base de Pimsner-Popa $\{a_r, r = 1, \ldots, n_a\}$ et celles de commutation du projecteur e'_a permettent de conclure. La formule particulière pour $B_{3,1}$ utilise l'expression de χ [3.4.1].

De cette proposition, de 6.1.2 et 5.1 résulte le corollaire suivant :

Corollaire.

$$Z(A_{1,3} \otimes B_{3,1})Z^* = B_{3,1} \otimes A_{1,3}$$

6.1.5. *Action de* AdZ_b^* *sur* $\pi_d(M'_{0,1} \cap M_{1,3})$.

Proposition. *(i) Si* $x \in M'_{0,1} \cap M_{1,3}$, *on a :*

$$Z_b^*\pi_d(x)Z_b = \sum_{p,q=1}^{n_b} \pi_b(b_p e'_b b_q^*) \otimes \pi_a[E_a(b_p^* x b_q)].$$

(ii) Si $x \in A_{1,3}$, *on a :*

$$Z_b^*\pi_d(x)Z_b = \sum_{k=1}^{n_b} \pi_b(\beta_k) \otimes \pi_a(\eta_k(x)).$$

Démonstration :

(i) Pour $x \in M'_{0,1} \cap M_{1,3}$, $b \in B_{2,1}$ et $a \in A_{1,2}$, on peut écrire :

$$(Z_b^* x Z_b)(G_{1,1}(b) \otimes F_{1,1}(a)) = Z_b^* n_d K_{1,1}(E_{D_{2,2}}(xbae'_a e'_b)) \quad [2.2.2]$$

Comme $xbae'_a \in M_{2,3}$ et que $\{b_p, q = 1, \ldots, n_b\}$ est une base de Pimsner-Popa de $M_{2,3}$ sur $M_{1,3}$, on a :

$$n_d K_{1,1}(E_{D_{2,2}}(xbae'_a e'_b)) = n_a K_{1,1}(E_{D_{2,2}}(xbae'_a)) = n_a \sum_{q=1}^{n_b} K_{1,1}[b_p E_{D_{2,2}}(E_{1,3}(b_p^* xbae'_a))].$$

D'après 5.2 (i) et la propriété de commutation de $\mathcal{C}_{2,3}$, $E_{D_{2,2}}E_{1,3}$ vaut $E_{A_{1,2}}E_a$, d'où :

$$\begin{aligned}(Z_b^* x Z_b)(G_{1,1}(b) \otimes F_{1,1}(a)) &= \sum_{p=1}^{n_b} G_{1,2}(b_p) \otimes F_{1,1}[n_a E_{A_{1,2}}(E_a(b_p^* xb)ae'_a)] \\ &= \sum_{p,q=1}^{n_b} G_{1,2}(b_p) \otimes \pi_a[E_a(b_p^* xb)]F_{1,1}(a)) \quad [2.2.2] \\ &= \sum_{p,q=1}^{n_b} \pi_b(b_p e'_b b_q^*)G_{1,2}(b) \otimes \pi_a[E_a(b_p^* x b_q)]F_{1,1}(a)\end{aligned}$$

(ii) D'après 6.1.4, si $x \in A_{1,3}$, on sait qu'il existe des éléments x_k de $A_{1,3}$ tels que : $Z_b^* x Z_b$ s'écrive $\sum_{k=1}^{n_b} \pi_b(\beta_b) \otimes \pi_a(x_k)$. (i), 2.2.1 et 5.3 permettent d'écrire :

$$x_k = \sum_{p,q=1}^{n_b} tr(\beta_k^* b_p e'_b b_q^*) E_a(b_p^* x b_q) = \sum_{q=1}^{n_b} E_a(E_{B_{2,1}}(e'_b b_q^* \beta_k^*) x b_q) = \eta_k(x).$$

6.2. **Une inversion sur $A_{1,3}$ et $B_{3,1}$.**

6.2.1. Dans [B.S. 8.1], S. Baaj et G. Skandalis définissent une inversion sur deux algèbres de Hopf :

Définition. Soient (A, Γ_a) et (B, Γ_b) deux C*-algèbres de Hopf. Une inversion sur A et B est un *-isomorphisme T de $A \otimes B$ sur $B \otimes A$ tel que l'on ait :

$$(i)(T \otimes 1_a)(1_a \otimes T)(\Gamma_a \otimes 1_b) = (1_b \otimes \Gamma_a)T$$
$$(ii)(1_b \otimes T)(T \otimes 1_b)(1_a \otimes \Gamma_b) = (\Gamma_b \otimes 1_a)T$$

6.2.2. D'après 6.1.4, $T = AdZ$ est un *-isomorphisme de $A_{1,3} \otimes B_{3,1}$ sur $B_{3,1} \otimes A_{1,3}$.

Théorème. *T est une inversion sur $(A_{1,3}, \Gamma_a)$ et $(B_{3,1}, \Gamma_b)$.*

Démonstration : Comme la construction offre des rôles analogues à $A_{1,3}$ et $B_{3,1}$, nous allons voir dans le lemme 2 qu'il nous suffit de démontrer les relations (i) et (ii) de 6.2.1 sur $A_{1,3} \otimes 1_b$ par exemple, ce que nous faisons dans les lemmes 3 et 4.

Lemme 1 :

$$(\mathrm{i}) A_{1,3} \otimes B_{3,1} = T^{-1}(B_{3,1} \otimes 1_a)(A_{1,3} \otimes 1_b)$$
$$(\mathrm{ii}) A_{1,3} \otimes B_{3,1} = T^{-1}(1_b \otimes A_{1,3})(1_a \otimes B_{3,1})$$
$$(\mathrm{iii}) B_{3,1} \otimes A_{1,3} = T(A_{1,3} \otimes 1_b)(B_{3,1} \otimes 1_a)$$
$$(\mathrm{iv}) B_{3,1} \otimes A_{1,3} = T(1_a \otimes B_{3,1})(1_b \otimes A_{1,3})$$

Démonstration :

(i) L'algèbre engendrée par $A_{1,3} \otimes 1_b$ et $T^{-1}(B_{3,1} \otimes 1_a)$ est l'image par AdZ_a^* de l'algèbre engendrée par $A_{1,3}$ et $B_{3,1}$ qui est $D_{3,3}$ [5.1] donc on obtient :

$$A_{1,3} \otimes B_{3,1} = T^{-1}(B_{3,1} \otimes 1_a)(A_{1,3} \otimes 1_b).$$

L' égalité (ii) est obtenue de façon analogue puisque l'algèbre $D_{3,3}$ est engendrée par les algèbres $A_{3,3}$ et $B_{3,3}$ [5.1].

On obtient les égalités (iii) et (iv) en échangeant les lignes et les colonnes.

Lemme 2 : *Les relations (i) et (ii) de 6.2.1 sont vérifiées pour T sur $A_{1,3} \otimes B_{3,1}$ si et seulement si elles sont vérifiées sur $A_{1,3} \otimes 1_b$.*

Démonstration :

On a déjà remarqué que les lignes et les colonnes du carrelage bicommutatif jouent des rôles symétriques, échanger les lignes et les colonnes change $(A_{1,3}, \Gamma_a)$ en $(B_{3,1}, \Gamma_b)$ et T en T^{-1}. Aussi si la relation (i) est vérifiée sur $A_{1,3} \otimes 1_b$, par symétrie la relation $(T^{-1} \otimes 1_b)(1_b \otimes T^{-1})(\Gamma_b \otimes 1_a) = (1_a \otimes \Gamma_b)T^{-1}$ est vérifiée sur $B_{3,1} \otimes 1_a$, ce qui est équivalent à dire que la relation (ii) est vérifiée sur $T^{-1}(B_{3,1} \otimes 1_a)$; si de plus on a supposé que la relation (ii) est vraie sur $A_{1,3} \otimes 1_b$, on a donc obtenu que la relation (ii) est vérifiée sur l'algèbre engendrée par $A_{1,3} \otimes 1_b$ et $T^{-1}(B_{3,1} \otimes 1_a)$ donc sur $A_{1,3} \otimes B_{3,1}$ d'après le lemme 1. Alors, il suffit de conclure que, par symétrie, la relation (i) est vérifiée sur $A_{1,3} \otimes B_{3,1}$.

Lemme 3 : *La relation (i) de 6.2.1 est vérifiée pour T sur $A_{1,3} \otimes 1_b$.*

Démonstration :

La relation (i) est équivalente à

$$(AdZ_a \otimes 1_a)(1_a \otimes T)(\Gamma_a \otimes 1_b) = (AdZ_b \otimes 1_a)(1_b \otimes \Gamma_a)T$$

Pour $x \in A_{1,3}$, on a d'après 2.6.1 :

$$(AdZ_a \otimes 1_a)(1_a \otimes T)(\Gamma_a \otimes 1_b)[x \otimes 1_b]$$
$$= (AdZ_a \otimes 1_a)(1_a \otimes T)[\sum_{i=1}^{n_a} \pi_a(\alpha_i) \otimes \pi_a(\nu_i(x)) \otimes 1_b]$$

Grâce à 6.1.5 (ii) appliqué à $\nu_i(x)$ et à 6.1.4, on obtient :

$$(AdZ_a \otimes 1_a)(1_a \otimes T)(\Gamma_a \otimes 1_b)[x \otimes 1_b] = \sum_{i,k=1}^{n_a,n_b} \pi_d(\alpha_i \chi(\beta_k)) \otimes \pi_a(\eta_k(\nu_i(x)))$$

De même, on peut écrire :

$$\begin{aligned}(AdZ_b \otimes 1_a)(1_b \otimes \Gamma_a)T[x \otimes 1_b] &= (AdZ_b \otimes 1_a)(1_b \otimes \Gamma_a)[\sum_{h=1}^{n_b} \beta_h \otimes \eta_h(x)] \\ &= (AdZ_b \otimes 1_a)[\sum_{i,h=1}^{n_a,n_b} \beta_h \otimes \alpha_i \otimes \nu_i(\eta_h(x))] \\ &= \sum_{i,h=1}^{n_a,n_b} \pi_d(\beta_h \chi(\alpha_i)) \otimes \pi_a(\nu_i(\eta_h(x))).\end{aligned}$$

L'égalité résulte de la proposition 5.3.

Lemme 4 : *La relation (ii) de 6.2.1 est vérifiée pour T sur $A_{1,3} \otimes 1_b$.*

Démonstration :

D'une part, d'après 6.1.5 (ii), on a :

$$(1_b \otimes T)(T \otimes 1_b)(1_a \otimes \Gamma_b)[x \otimes 1_b] = \sum_{h,k=1}^{n_b} \beta_h \otimes \beta_k \otimes \eta_k(\eta_h(x))$$

D'autre part, d'après 6.1.5(ii) et 2.6.1, on a :

$$(\Gamma_b \otimes 1_a)T[x \otimes 1_b] = \sum_{h,k=1}^{n_b} \beta_h \otimes \nu_h(\beta_j) \otimes \eta_j(x)) = \sum_{h,j,k=1}^{n_b} \beta_h \otimes \beta_k \otimes tr(\nu_h(\beta_j)\beta_k^*)\eta_j(x).$$

Posons : $\eta'_h(\beta_k^*) = \sum_{p=1}^{n_b} b_p^* \beta_k^* E_{2,1}(e'_b b_p \beta_h^*)$, alors $\eta'_h(\beta_k^*)$ appartient à $M_{3,1}$ et on vérifie facilement (comme en 5.3) que $\eta'_h(\beta_k^*)$ commute à $M_{1,1}$, c'est donc un élément de

$B_{3,1}$. On peut alors simplifier $\sum_{j=1}^{n_b} tr(\nu_h(\beta_j)\beta_k^*)\eta_j(x)$:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n_b} tr(\nu_h(\beta_j)\beta_k^*)\eta_j(x) &= \sum_{j=1}^{n_b} tr(\eta_h'(\beta_k^*)\beta_j)\eta_j(x)\\ &= \sum_{q=1}^{n_b} E_{2,1}(e_b'b_q\eta_h'(\beta_k^*))xb_q^*\\ &= \sum_{p,q=1}^{n_b} E_{2,1}(e_b'b_qb_p^*\beta_k^*)E_{2,1}(e_b'b_p\beta_h^*)xb_q^*\\ &= \sum_{p,q=1}^{n_b} E_{2,1}(e_b'b_q\beta_k^*)E_{2,1}(e_b'b_p\beta_h^*)xb_p^*b_q^*\\ &= \eta_k(\eta_h(x))\end{aligned}$$

La relation est démontrée.

Remarque. (i) Posons $\gamma_b(x) = T(x \otimes 1_b)$ pour $x \in A_{1,3}$, le lemme 4 est équivalent au fait que γ_b est une action à gauche de $B_{3,1}$ sur $A_{1,3}$ [B.S 8.4].

(ii) D'après [B.S 8.2], on peut associer à T un coproduit Γ_T sur $A_{1,3} \otimes B_{3,1}$ défini par : $\Gamma_T = (1_a \otimes T \otimes 1_b)(\Gamma_a \otimes \Gamma_b)$. Sachant que la relation (ii) de définition de l'inversion est vérifiée sur $A_{1,3} \otimes 1_b$, la relation (i) de définition de l'inversion est vérifiée sur $A_{1,3} \otimes 1_b$ si et seulement si le coproduit Γ_T est coassociatif.

6.3. **Couple assorti de C*-algèbres de Hopf.** Comme les algèbres de Hopf considérées sont de dimension finie, on déduit des théorèmes 4.10 et 3.8 de [B.S.], du théorème et du lemme 1 de 6.2.2 et de la définition [B.S. 8.12] le corollaire suivant :

Corollaire. *Les algèbres $(A_{1,3}, \Gamma_a) = S(X)$ et $(B_{3,1}, \Gamma_b) = S(Y)$ et l'inversion T définissent un couple assorti de C*-algèbres de Hopf.*

7. Couple assorti de systèmes de Kac

7.1. Suivant la définition [B.S. 8.13], nous allons établir la proposition :

Proposition. *Les systèmes de Kac (h_a, X, u) et (h_b, Y, v) et l'opérateur unitaire s^*Z de $\mathcal{L}(h_a \otimes h_b)$ forment un couple assorti de systèmes de Kac, c'est-à-dire :*

(i) Les algèbres $S(X)$, soit $(A_{1,3}, \Gamma_a)$, et $S(Y)$, soit $(B_{3,1}, \Gamma_b)$, et l'inversion T forment un couple assorti de C-algèbres de Hopf.*

(ii) $(h_a \otimes h_b, V, (u \otimes v)s^*Z)$ est un système de Kac où $V = (Z_{1,2}^* X_{2,3} Z_{1,2}) Y_{2,4}$.

Démonstration :

Il nous reste à démontrer (ii). On sait que (h_d, W, w) est un système de Kac. On va montrer que $(h_a \otimes h_b, V, (u \otimes v)s^*Z))$ lui est isomorphe par Z_a [B.S. 6.6]. D'après la proposition 6.1.3, on a déjà l'égalité $w = AdZ_a((u \otimes v)s^*Z)$.

Montrons maintenant que $Ad(Z_a \otimes Z_a)(V) = W$.

$$Ad(Z_a \otimes Z_a)(V) = (Z_b \otimes Z_a)X_{2,3}(Z_b^* \otimes Z_a^*)(Z_a \otimes Z_a)Y_{2,4}(Z_a^* \otimes Z_a^*).$$

Alors d'après 2.6.4 (iii) et 6.1.4, on a :

$$Ad(Z_a \otimes Z_a)(V) = \sum_{i,k=1}^{n_a,n_b} w[n_a E_{A_{1,2}}(\alpha_i^* e_a e_a') n_b E_{B_{2,1}}(\beta_k^* e_b e_b')] w \otimes \alpha_i \chi(\beta_k).$$

Comme $\beta_k^* e_b e'_b \in M'_{1,0} \cap M_{3,1}$, d'après 5.2, on a : $E_{B_{2,1}}(\beta_k^* e_b e'_b) = E_{D_{2,2}}(\beta_k^* e_b e'_b)$. De même, on a : $E_{A_{1,2}}(\alpha_i^* e_a e'_a) = E_{D_{2,2}}(\alpha_i^* e_a e'_a)$.

La propriété [G.H.J. 4.2.1] du carré commutatif $\mathcal{C}_{3,3}$ permet alors d'écrire :

$$n_a E_{A_{1,2}}(\alpha_i^* e_a e'_a) n_b E_{B_{2,1}}(\beta_k^* e_b e'_b) = n_d E_{D_{2,2}}(\alpha_i^* e_a e'_a \beta_k^* e_b e'_b).$$

Grâce à 3.4.1 et aux propriétés de commutation, on obtient :

$$n_a E_{A_{1,2}}(\alpha_i^* e_a e'_a) n_b E_{B_{2,1}}(\beta_k^* e_b e'_b) = n_d E_{D_{2,2}}(\chi(\beta_k^*)\alpha_i^* e_d e'_d)$$

On a donc $Ad(Z_a \otimes Z_a)(V) = W$.

7.2. **Le système de Kac (h_d, W, w).** Suivant les définitions 2.7 et [B.S. 8.15], nous pouvons énoncer :

Corollaire. *Le système de Kac (h_d, W, w) associé à l'inclusion diagonale est l'image par Z_a du système de Kac s^*Z-produit tensoriel $(h_a \otimes h_b, V, (u \otimes v)s^*Z)$.*

7.3. **Le T-produit tensoriel de $(A_{1,3}, \Gamma_a)$ et $(B_{3,1}, \Gamma_b)$.** On vérifie facilement que AdZ_a^* est un morphisme de l'algèbre de Kac $(D_{3,3}, \Gamma_d, j_{2,2}, tr)$ sur l'algèbre de Kac T-produit tensoriel ([B.S. 8.6]) $\mathbb{A} \rtimes_T \mathbb{B} = (A_{1,3} \otimes B_{3,1}, \Gamma_T, (j_{1,2} \otimes j_{2,1})s^*T, tr \otimes tr)$ (voir remarque 6.2.2). En effet, d'après 6.1.3, $(j_{1,2} \otimes j_{2,1})s^*T$ est une co-involution qui vérifie la relation $(j_{1,2} \otimes j_{2,1})s^*T AdZ_a^* = AdZ_a^* j_{2,2}$.

7.4. **L'inclusion diagonale $M_{1,1} \subset M_{2,2}$.** D'après [Da. 5.7.2], [L.] , [Sz.] ou [E.N.], on a donc :

Corollaire. *$M_{2,2}$ est le produit croisé de $M_{1,1}$ par une action extérieure du T-produit tensoriel de $(A_{1,3}, \Gamma_a)$ et $(B_{3,1}, \Gamma_b)$, c'est-à-dire de l'algèbre de Kac $(A_{1,3} \otimes B_{3,1}, \Gamma_T, (j_{1,2} \otimes j_{2,1})s^*T, tr \otimes tr)$.*

7.5. Plus généralement le corollaire précédent s'exprime ainsi :

Théorème. *Soit une inclusion irréductible $K \subset L$ d'indice fini de facteurs de type II_1 telle que L soit l'algèbre de von Neumann engendrée par les facteurs intermédiaires M et N respectivement isomorphes aux produits croisés de K par les algèbres de Kac $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$. Si l'indice $[L : K]$ est le produit des dimensions de $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ et que les supports des co-unités des algèbres $\hat{\mathbb{A}}$ et $\hat{\mathbb{B}}$ représentées dans K commutent, il existe une inversion T sur $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ telle que L soit isomorphe au produit croisé de K par le T-produit tensoriel de $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$.*

7.6. Considérant l'inclusion $M_{0,0} \subset M_{1,1}$, on énonce le théorème dual du précédent :

Théorème. *Soit une inclusion irréductible $K \subset L$ d'indice fini de facteurs de type II_1 telle que L soit l'algèbre de von Neumann engendrée par les facteurs intermédiaires M et N respectivement isomorphes aux algèbres des points fixes de L sous une action extérieure des algèbres de Kac $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$. Si l'indice $[L : K]$ est le produit des dimensions de $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ et que les supports des co-unités des algèbres $\hat{\mathbb{A}}$ et $\hat{\mathbb{B}}$ représentées dans L commutent, il existe une inversion T sur $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ telle que K soit isomorphe à l'algèbre des points fixes de L sous une action extérieure du T-produit tensoriel de $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$.*

8. Le système de Kac T-biproduit croisé de $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$

Dans cette partie, nous allons expliciter le système de Kac dual du système de Kac associé à l'inclusion "diagonale latérale" $M_{0,1} \subset M_{1,2}$ qui est de profondeur 2 [3.3.1] en fonction des systèmes de Kac des inclusions "verticale" et "horizontale".

8.1. **Le système de Kac dual associé à l'inclusion diagonale latérale $M_{0,1} \subset M_{1,2}$.** Pour cette inclusion irréductible de profondeur 2, on reprend les résultats de 2 en adoptant les notations suivantes : k_d est l'espace standard de $D_{2,3}$, $\tilde{\pi}_d$ la représentation de $M'_{0,1} \cap M_{3,4}$ sur k_d, J_d et $\hat{J}_d$ les isométries anti-linéaires de k_d et ω l'unitaire $J_d\hat{J}_d$ [2.2].

D'après 5.1, l'algèbre $D_{2,3}$ admet la famille $\{b_p\alpha_i, p = 1, \ldots, n_b, i = 1, \ldots, n_a\}$ comme base orthonormale; comme $j_{1,2}$ est la co-ivolution de $D_{2,3}$, cette algèbre admet aussi comme base la famille $\{j_{1,2}(\alpha_i)\chi(b_p), p = 1, \ldots, n_b, i = 1, \ldots, n_a\}$ alors, si U l'unitaire multiplicatif associé à l'inclusion $M_{0,1} \subset M_{1,2}$, d'après 2.6.4 (ii) et 2.6.5, on a :

$$\hat{U} = n_d \sum_{p,i=1}^{n_b,n_a} \tilde{\pi}_d[E_{D_{3,4}}(\chi(b_p^*)j_{1,2}(\alpha_i^*)e'_b e''_a e_b e'_a)] \otimes \tilde{\pi}_d(j_{1,1}(b_p)\alpha_i).$$

D'après 2.7, $(k_d, \hat{U}, \omega)$ est un système de Kac et $S(\hat{U})$ est l'algèbre $(D_{2,3}, \Gamma_{2,3})$ tandis que $\hat{S}(\hat{U})$ est l'algèbre $(D_{3,4}, \Gamma_{3,4})$.

8.2. **Le système de Kac T-biproduit croisé de (h_a, X, u) et (h_b, Y, v).**

8.2.1. *Définition.* Considérons comme dans [B.S. 8.14], l'unitaire multiplicatif Q :

$$Q = (Z_{3,4}^*\hat{Y}_{2,3}Z_{3,4})(Z_{1,2}^*X_{2,3}Z_{1,2}).$$

8.2.2. D'après [B.S. 8.14 et 15], on peut énoncer :

Définition. Le système $(h_a \otimes h_b, Q, (u \otimes v)s^*Z)$ est un système de Kac appelé biproduit croisé de (h_a, X, u) par (h_b, Y, v) relativement à s^*Z. Nous l'appellerons pour faire court le s^*Z-biproduit croisé de (h_a, X, u) par (h_b, Y, v) ou s^*Z-biproduit croisé de $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$.

8.2.3. La preuve de la proposition [B.S. 8.14] nous permet de préciser :

Proposition. *L'algèbre $AdZ(S(Q))$ est le produit croisé de $S(X)$ par l'action à gauche γ_b de $S(Y)$ définie par l'inversion T :*

$$\gamma_b(x) = T(x \otimes 1_b) \qquad (x \in S(X)).$$

L'algèbre $AdZ(\hat{S}(Q))$ est le produit croisé de $S(Y)$ par l'action à droite γ_a de $S(X)$ définie par l'inversion T :

$$\gamma_a(y) = T(1_a \otimes y) \qquad (y \in S(Y)).$$

Nous allons comparer le système de Kac biproduit croisé relativement à Z au système de Kac dual associé à l'inclusion "diagonale latérale" $M_{0,1} \subset M_{1,2}$ en le représentant sur k_d. Pour cela nous construisons un unitaire $\mathcal{K}$ de h_d sur k_d.

8.3. **Un unitaire $\mathcal{K}$ de h_d sur k_d.**

8.3.1. *L'unitaire $\tilde{Z}_b$.* Comme en 6.1.1, on définit un unitaire $\tilde{Z}_b$ de l'espace de Hilbert $k_b \otimes \overline{h}_a$ sur l'espace de Hilbert k_d par :

$$\tilde{Z}_b(G_{1,3}(b) \otimes F_{1,2}(\alpha)) = K_{1,2}(b\alpha) \qquad (b \in B_{2,1}, \alpha \in A_{1,3})$$

Proposition. *(i) Pour $y \in M'_{0,3} \cap M_{3,3}$, $\tilde{Z}_b(\pi_b(y) \otimes 1_a)\tilde{Z}_b^* = \tilde{\pi}_d(y)$.*

(ii) Pour $x \in M'_{1,1} \cap M_{1,4}$, $\tilde{Z}_b(1_b \otimes \bar{\pi}_a(x))\tilde{Z}_b^* = \omega\tilde{\pi}_d(\bar{u}x\bar{u})\omega$.

(iii) Soit $\{\tilde{b}_p, p = 1, \ldots n_b\}$ une famille d'unités matricielles normalisées de $B_{2,3}$. Pour $x \in M'_{1,1} \cap M_{1,4}$, $\tilde{Z}_b^*\tilde{\pi}_d(x)\tilde{Z}_b = \sum_{p,q=1}^{n_b} \pi_b[\tilde{b}_p e'_b \tilde{b}_q^*] \otimes \bar{\pi}_a[\bar{E}_a(\tilde{b}_p^* x \tilde{b}_q)]$.

Démonstration :

(i) se démontre comme 6.1.2.

(ii) Cette assertion est l'analogue de 6.1.4, nous allons la démontrer directement car 6.1.3 n'a pas d'analogue dans ce cadre.

Si $\alpha \in A_{1,3}$ et $b \in B_{2,3}$, on a :

$$\tilde{Z}_b(1_b \otimes \bar{\pi}_a(\bar{u}x\bar{u}))\tilde{Z}_b^* K_{1,2}(b\alpha) = n_a K_{1,2}(bE_{A_{1,3}}(e_a \alpha j_{1,2}(x)) \qquad [2.5]$$

Comme $e_a\alpha j_{1,2}(x)$ est un élément de $M'_{0,1} \cap M_{1,3}$, on peut écrire d'après 5.2 (iv) :

$$E_{A_{1,3}}(e_a\alpha j_{1,2}(x) = E_{D_{2,3}}(e_a\alpha j_{1,2}(x))$$

On a alors :

$$\begin{aligned}\tilde{Z}_b(1_b \otimes \bar{\pi}_a(uxu))\tilde{Z}_b^* K_{1,2}(b\alpha) &= n_a K_{1,2}(E_{D_{2,3}}(be_a\alpha j_{1,2}(x))) \\ &= n_a K_{1,2}(E_{D_{2,3}}(e_a b\alpha j_{1,2}(x))) \qquad (b \in B_{2,3}) \\ &= n_a \omega K_{1,2}(E_{D_{2,3}}(xj_{1,2}(b\alpha)e''_a)) \qquad [2.2]\end{aligned}$$

Comme $xj_{1,2}(b\alpha)e''_a \in M_{2,4}$, on a :

$$n_a K_{1,2}(E_{D_{2,3}}(xj_{1,2}(b\alpha)e''_a)) = n_d K_{1,2}(E_{D_{2,3}}(xj_{1,2}(b\alpha)e''_a e'_b))$$

On obtient alors (ii) en appliquant 2.2, 2.2.3 (viii) pour $\bar{u}$ et 2.2.2.

(iii) se démontre comme 6.1.5.

8.3.2. On pose $\mathcal{G}_b = \mathcal{H}\hat{J}_b$. $\mathcal{K}$ est l'unitaire $\hat{J}_d\ \tilde{Z}_b\ (\mathcal{G}_b \otimes \mathcal{F}_a)\ Z_b^*$ de h_d sur k_d.

Pour $a \in A_{1,2}$ et $b \in B_{2,1}$, on a :

$$\mathcal{K}K_{1,1}(ba) = n_a\tilde{\pi}_d[bE_{A_{1,3}}(j_{1,2}(a)e'_a e''_a)] = n_a\tilde{\pi}_d[bE_{A_{1,3}}(ae'_a e_a)]$$

La première égalité résulte de 2.5, 3.4.2, 8.3.1 et 2.2. La deuxième demande d'utiliser la définition de l'espérance conditionnelle, l'invariance de la trace par $j_{1,2}$ et 2.2.3 (v) pour la tour des commutants.

8.3.3.

Proposition. *(i) Pour $y \in B_{2,1}$, $Ad\mathcal{K}(\pi_d(y)) = \tilde{\pi}_d(y)$*

(ii) Pour $y \in B_{3,1}$, $Ad\mathcal{K}(\pi_d(y)) = \omega\tilde{\pi}_d[v\chi(y)v]\omega$.

Démonstration :

(i) résulte d'un calcul direct utilisant 8.3.1, 3.4.2 et 2.2.3 (vi).

(ii) Pour $y \in B_{3,1}$, on a :

$$Ad\mathcal{K}(\pi_d(y)) = Ad[\hat{J}_d\tilde{Z}_b](j_{2,2}(vy^*v)) = Ad\hat{J}_d\tilde{\pi}_d(vj_{2,2}(y^*)v)$$

Ecrivons 2.2.3 (viii) dans sa version relative à la tour des commutants [2.3], pour $j_{2,2}(y^*) \in B_{3,3}$ et la base $\{j_{2,3}(\chi(\beta_k^*)), k = 1, \ldots n_b\}$:

$$vj_{2,2}(y^*)v = \sum_{k=1}^{n_b} j_{2,3}\chi(\beta_k^*)e_b j_{2,3}j_{2,2}(y^*)j_{2,3}\chi(\beta_k)$$

Grâce à 2.2.3 (vi), on obtient :

$$Ad\mathcal{K}(\pi_d(y)) = \omega\tilde{\pi}_d[\sum_{k=1}^{n_b}\chi(\beta_k)e_b j_{2,2}(y)\chi(\beta_k^*)]\omega.$$

On conclut grâce à 2.2.3 (viii) et 2.3 appliqué à l'élément y de $D_{3,4}$.

8.3.4.

Proposition. *(i) Pour* $x \in A_{1,2}$, $Ad\mathcal{K}(\pi_d(x)) = \omega\tilde{\pi}_d(j_{2,3}j_{1,2}(x))\omega$.
(ii) Pour $x \in A_{1,3}$, $Ad\mathcal{K}(\pi_d(x)) = \tilde{\pi}_d(x)$.

Démonstration :
D'après 6.1.5, pour $x \in M'_{0,1} \cap M_{1,3}$, on a :

$$Z_b^*\pi_d(x)Z_b = \sum_{p,q=1}^{n_b} \pi_b[b_p e'_b b_q^*] \otimes \pi_a[E_a(b_p^* x b_q))]$$

Alors, grâce à 2.5, 3.4.2, et 8.3.1, comme $\{j_{1,2}(b_p^*), p = 1, \dots, n_b\}$ est une famille d'unités matricielles normalisées de $B_{2,3}$, on obtient :

$$Ad[(\mathcal{G}_b \otimes \mathcal{F}_a)\ Z_b^*](\pi_d(x)) = Ad\tilde{Z}_b^*[\tilde{\pi}_d(j_{1,2}(x^*))].$$

On conclut à l'aide de 2.2.3 (vi).

8.3.5.

Proposition. *(i) Pour* $x \in A'_{1,2}$, $Ad(\mathcal{K}Z_b)(1_b \otimes \pi_a(x)) = \tilde{\pi}_d(j_{2,3}j_{1,2}(uxu))$.
(ii) Pour $y \in B_{3,1}$, $Ad(\mathcal{K}Z_a)(1_a \otimes \pi_b(y)) = \tilde{\pi}_d(\chi(y))$.

Démonstration :
(i) Si $x \in A'_{1,2}$, alors $uj_{1,2}(x^*)u$ est un élément de $D_{3,4}$. L'égalité résulte donc de 8.3.1, de 2.2.2 et de 2.2.3 (vi).
(ii) Si $y \in B_{3,1}$, 6.1.4 (ii), 3.4.1 (ii), 8.3.3, 2.2.3 (viii) pour v et 8.3.4 donnent :

$$Ad(\mathcal{K}Z_a)(1_a \otimes \pi_b(y)) = \omega\tilde{\pi}_d[\sum_{r,k=1}^{n_a,n_b} j_{2,3}j_{1,2}(a_r)\chi(\beta_k)e_b j_{2,3}(\chi(y))\chi(\beta_k^*)e'_a j_{2,3}j_{1,2}(a_r^*)]\omega.$$

Comme $\{j_{2,3}j_{1,2}(a_r)\chi(\beta_k), r = 1, \dots, n_a, k = 1, \dots n_b\}$ est une base de Pimsner-Popa de $D_{3,4}$, la formule (ii) résulte alors de 2.2.3 (viii) pour ω.

8.4. **Représentation du système de Kac biproduit croisé dans le carrelage.**

Proposition. *Le système de Kac* $(k_d, \hat{U}, w)$ *est l'image par l'unitaire* $\mathcal{K}Z_a$ *du système* $(h_a \otimes h_b, Q, (u \otimes v)s^*Z)$, *le* s^*Z*-biproduit croisé de* (h_a, X, u) *par* (h_b, Y, v).

Démonstration :
Montrons d'abord que $Ad[\mathcal{K}Z_a \otimes \mathcal{K}Z_a](Q) = \hat{U}$.

$$Ad[\mathcal{K}Z_a \otimes \mathcal{K}Z_a](Q) = Ad(\mathcal{K} \otimes \mathcal{K})[Ad(Z_a \otimes Z_b)(\hat{Y}_{2,3})Ad(Z_b \otimes Z_a)(X_{2,3})].$$

Compte tenu de la définition des unitaires multiplicatifs X et Y et des propriétés de l'isomorphisme $\mathcal{K}$, on obtient donc :

$$Ad[\mathcal{K}Z_a \otimes \mathcal{K}Z_a](Q) = n_d \sum_{i,p=1}^{n_a,n_b} \tilde{\pi}_d(d_{i,p}) \otimes \tilde{\pi}_d(j_{1,1}(b_p)\alpha_i)$$

où $d_{i,p} = \chi_b(E_{B_{3,1}}(b_p^* e'_b e_b))j_{2,3}j_{1,2}j_{1,1}(E_{A_{1,2}}(e'_a e_a \alpha_i^*))$.
Calculons $d_{i,p}$, d'après [Da. 2.2.1 (i)], 3.4.1, 3.4.2 et 3.4.3, on peut écrire :

$$\begin{aligned} j_{2,3}j_{1,2}j_{1,1}(E_{A_{1,2}}(e'_a e_a \alpha_i^*)) &= j_{2,3}j_{1,3}j_{1,2}(E_{A_{1,2}}(e'_a e_a \alpha_i^*)) \\ &= \chi_a[E_{A_{1,4}}(j_{1,2}(\alpha_i^*)e''_a e'_a] \\ &= E_{A_{3,4}}[\chi_a(j_{1,2}(\alpha_i^*))e''_a e'_a] \end{aligned}$$

Comme le carré $(M'_{0,2}, M'_{1,2}, M'_{0,3}, M'_{1,3})$ est commutatif et que $\chi_b(b_p^*)e'_b e_b$ appartient à $M'_{0,3} \cap M_{3,3}$, grâce à 3.4.2, on obtient :

$$\chi_b(E_{B_{3,1}}(b_p^* e'_b e_b)) = E_{B_{3,3}}(\chi_b(b_p^*)e'_b e_b) = E_{D_{3,4}}(\chi_b(b_p^*)e'_b e_b).$$

De même en considérant les carrés $(M'_{0,1}, M'_{3,1}, M'_{2,2}, M'_{3,2})$ et $(M'_{1,1}, M'_{1,2}, M'_{2,1}, M'_{2,2})$, comme $\chi_a(j_{1,2}(\alpha_i^*))e''_a e'_a$ appartient à $M'_{3,1} \cap M_{3,4}$, on obtient :

$$j_{2,3}j_{1,2}j_{1,1}(E_{A_{1,2}}(e'_a e_a \alpha_i^*)) = E_{D_{3,4}}[\chi_a(j_{1,2}(\alpha_i^*))e''_a e'_a]$$

D'où $\qquad d_{i,p} = E_{D_{3,4}}(\chi_b(b_p^*)e'_b e_b)E_{D_{3,4}}[\chi_a(j_{1,2}(\alpha_i^*))e''_a e'_a]$.

Comme $\chi_b(b_p^*)e'_b e_b$ appartient à $M'_{0,2} \cap M_{3,4}$ et que $\chi_a(j_{1,2}(\alpha_i^*))e'_a e''_a$ appartient à $M'_{1,1} \cap M_{3,4}$, la propriété du carré commutatif $(M'_{0,1}, M'_{1,1}, M'_{0,2}, M'_{1,2})$ nous permet d'écrire l'égalité $\quad d_{i,p} = E_{D_{3,4}}[\chi_b(b_p^*)e'_b e_b \chi_a(j_{1,2}(\alpha_i^*))e''_a e'_a]$. Grâce à 3.4.1 (iii) et les propriétés de commutations des projecteurs, on obtient finalement :

$$d_{i,p} = E_{D_{3,4}}[\chi(b_p^*)j_{1,2}(\alpha_i^*)e'_b e''_a e_b e'_a].$$

On conclut alors à l'égalité des unitaires multiplicatifs grâce à 8.1.

Montrons maintenant l'égalité $\omega\mathcal{K}Z_a = \mathcal{K}Z_a(u \otimes v)s^*Z$. D'après 6.1.3, il suffit de vérifier l'égalité $\omega\mathcal{K} = \mathcal{K}w$. D'après 8.3.2, pour $a \in A_{1,2}$ et $b \in B_{2,1}$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}wK_{1,1}(ba) &= \mathcal{K}K_{1,1}(j_{1,1}(ba)) \\
&= n_a \sum_{s,p=1}^{n_a,n_b} tr(j_{1,1}(ba)a_s^* b_p^*)\tilde{\pi}_d[b_p E_{A_{1,3}}(j_{1,2}(a_s)e'_a e''_a)] \\
&= n_a \sum_{s=1}^{n_a} \tilde{\pi}_d[E_{B_{2,1}}(j_{1,1}(ba)a_s^*)E_{A_{1,3}}(j_{1,2}(a_s)e'_a e''_a)] \\
&= n_a \sum_{s=1}^{n_a} \tilde{\pi}_d[E_{B_{2,1}}(j_{1,1}(ba)a_s^*)E_{A_{1,3}}(a_s e'_a e''_a)] && [2.5\ (ii)] \\
&= n_a \tilde{\pi}_d[E_{D_{2,3}}(\sum_{s=1}^{n_a} E_{B_{2,1}}(j_{1,1}(ba)a_s^*)a_s e'_a e_a)] && [5.2\ (ii)] \\
&= n_a \tilde{\pi}_d[E_{D_{2,3}}(j_{1,1}(a)j_{1,1}(b)e'_a e_a)] && [5.2\ (i)] \\
&= n_a \tilde{\pi}_d[E_{D_{2,3}}(j_{1,1}(a)e'_a e_a j_{1,2}(b))] && [3.4.1] \\
&= n_a \tilde{\pi}_d[E_{A_{1,3}}(j_{1,1}(a)e'_a e_a)j_{1,2}(b)] && [5.2\ (ii)] \\
&= n_a \tilde{\pi}_d[E_{A_{1,3}}(e_a e'_a a)j_{1,2}(b)] && [2.2.3\ (v),\ 2.3]
\end{aligned}$$

Et on conclut grâce à 8.3.2 et à 2.2.

8.5. **Les inclusions diagonales latérales.**

8.5.1. De 8.1, 8.2.3 et 8.4, nous déduisons le corollaire suivant :

Corollaire. 1. *$M_{1,2}$ est isomorphe au produit croisé de $M_{0,1}$ par une action extérieure du produit croisé de $S(X)$ par l'action à gauche γ_b de $S(Y)$.*

$M_{2,3}$ est isomorphe au produit croisé de $M_{1,2}$ par une action extérieure du produit croisé de $S(Y)$ par l'action à droite γ_a de $S(X)$.

Nous obtenons des résultats analogues pour les inclusions $M_{1,0} \subset M_{2,1}$ et $M_{2,1} \subset M_{3,2}$ en échangeant les lignes et les colonnes et Z en Z^*. Comme $D_{3,2}$ est isomorphe à $D_{3,4}$ par $j_{2,1}j_{2,2}$, nous avons aussi :

Corollaire. 2. *$M_{2,1}$ est isomorphe au produit croisé de $M_{1,0}$ par une action extérieure du produit croisé de $S(Y)$ par l'action à droite γ_a de $S(X)$.*

8.5.2. Plus généralement les corollaires précédents s'expriment ainsi :

Théorème. *Soit une inclusion irréductible $K \subset L$ d'indice fini de facteurs de type II_1 telle que L soit l'algèbre de von Neumann engendrée par les facteurs intermédiaires M et N respectivement isomorphes aux produits croisés de K par les algèbres de Kac $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$. Notons $K^{\mathbb{A}}$ l'algèbre des points fixes de K sous l'action de $\mathbb{A}$. Si l'indice $[L:K]$ est le produit des dimensions de $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ et que les supports des co-unités des $\hat{\mathbb{A}}$ et $\hat{\mathbb{B}}$ représentées dans K commutent, il existe une inversion T sur $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$, une action à gauche γ_b de $\mathbb{B}$ sur $\mathbb{A}$ et une action à droite γ_a de $\mathbb{A}$ sur $\mathbb{B}$:*

$$\gamma_b(x) = T(x \otimes 1_b) \qquad (x \in A) \quad \textit{et} \quad \gamma_a(y) = T(1_a \otimes y) \qquad (y \in B)$$

telles que M (resp. N) soit isomorphe au produit croisé de $K^{\mathbb{B}}$ (resp. $K^{\mathbb{A}}$) par une action extérieure du produit croisé de $\mathbb{A}$ (resp. $\mathbb{B}$) par l'action γ_b (resp. de γ_a) de $\mathbb{B}$ (resp. $\mathbb{A}$) .

8.6. **Exemple.** D'après 8.5.1 et [B.S. 8.22], dans le cas particulier des groupes, on obtient que $P \rtimes A$ est isomorphe au produit croisé de P^B par une action extérieure du produit croisé de $L^\infty(A)$ par l'action par translation à gauche de B sur $D\backslash B$. L'inclusion $P^B \subset P \rtimes A$ est encore étudiée dans les articles [B.H.], [H.Sz.] et [I.K.].

On peut dire aussi que $(P \otimes L^\infty(G/B)) \rtimes D$ est le produit croisé de $P \rtimes A$ par une action extérieure du produit croisé de $L^\infty(B)$ par l'action par translation à droite de A sur $A\backslash D$ car d'après [S.W. 5] et [Sano 3], le carré $\mathcal{C}_{2,3}$ dans ce cas est

$$\begin{array}{ccc} P \rtimes A & \subset & (P \otimes L^\infty(G/B)) \rtimes A \\ \cap & & \cap \\ P \rtimes D & \subset & (P \otimes L^\infty(G/B)) \rtimes D \end{array}$$

On trouve des résultats analogues à ceux de [Sano 3].

9. Appendice : Algèbres de Kac et Unitaire multiplicatif

Dans cette partie, nous mettons en correspondance les objets définis différemment dans [E.S], [B.S.], [E.N.] et [Da.]. Nous gardons les notations de chaque article.

9.1. **Différentes dualités.** Comme dans [E.S.], on considère une algèbre de Kac $\mathbb{A}$, on note A l'algèbre de von Neumann sous-jacente, Γ son co-produit et W l'unitaire fondamental de A [E.S. 2.4] ($W \in A \otimes \hat{A}$), il en résulte, pour $x \in A$, l'égalité :

$$\Gamma(x) = W(1 \otimes x)W^*$$

Le co-produit $\hat{\Gamma}$ de l'algèbre duale $\hat{\mathbb{A}}$ [E.S. 3.7.4] est donné par :

$$\hat{\Gamma}(x) = \sigma W^*(x \otimes 1)W\sigma \qquad (x \in \hat{A}).$$

Considérons maintenant, comme dans [B.S.], l'unitaire multiplicatif $X = W^*$, à X sont associées en dimension finie, deux algèbres de Kac $\mathbb{S}(X)$ et $\hat{\mathbb{S}}(X)$ [2.72.7]. Grâce à la remarque 3.11 (a) de [B.S.], on obtient les relations suivantes :

$$\mathbb{K} = \mathbb{S}(X) = \hat{\mathbb{A}}^\varsigma \text{ et } \hat{\mathbb{K}}' = \hat{\mathbb{S}}(X) = \mathbb{A} \quad \text{ou bien} \quad \hat{\mathbb{L}}' = \mathbb{S}(X) \text{ et } \mathbb{L} = (\hat{\mathbb{S}}(X))'^\varsigma$$

Compte-tenu de ces relations, les notions de produit croisé par $\mathbb{K}$ selon [E] et par $(S(X), \delta)$ selon [B.S] coïncident.

9.2. **Inclusion de profondeur 2 et action d'algèbre de Kac.** On a montré sous de hypothèses plus ou moins générales ([Sz.], [Da.], [L], [E.N.]) que si $M_0 \subset M_1$ est une inclusion irréductible de facteurs de profondeur 2, alors il existe une algèbre de Kac $\mathbb{K}$ et une action extérieure δ de $\mathbb{K}$ sur M_0 telles que l'inclusion soit isomorphe à l'inclusion de $\delta(M_0)$ dans le produit croisé de M_0 par l'action extérieure δ de $\mathbb{K}$. Nous faisons ici le lien entre la construction de [E.N.] et celle de [Da]

Dans [E.N], il est associé à une inclusion de profondeur 2 un unitaire multiplicatif W et deux algèbres de Hopf $(S(W), \Gamma_1)$ et $(\hat{S}(W), \hat{\Gamma}_1)$. Grâce à [Da. 5.2.3 - 5.3], [E.N. 8.10], [B.S. 6.2. - 6.8] et [E.S. 6.8], pour l'inclusion $M_{1,0} \subset M_{1,1}$, on peut affirmer que $(S(W), \Gamma_1)$ est l'image par Adu de $(A_{1,2}, \Gamma_{1,2})$ en effet, pour $x \in A_{1,2}$ et $\tilde{W} = \sigma(1 \otimes u)W(1 \otimes u)\sigma$, on a :

$$\Gamma_{1,2}(x) = (Adu \otimes 1_a)(\gamma_{1,2}(j_{1,1}(x))) = \tilde{W}^*(1_a \otimes x)\tilde{W}$$

Appliquons ce résultat à $M_{1,1} \subset M_{1,2}$, nous obtenons, grâce à [E.N. 8.3], que l'algèbre $(A_{1,3}, \Gamma_a)$ est isomorphe à l'image par Adu de $(A'_{1,3}, \hat{\Gamma}_1)$.

Dans [E.N. 11.6 et 7], il suffit de considérer l'isomorphisme $Ad[(1_{1,1} \otimes u)\sigma U_1^*]$ pour exprimer $M_{1,2}$ comme le produit croisé de $M_{1,1}$ par une action de $(A_{1,3}, \Gamma_a)$ et $M_{1,0}$ comme l'algèbre des points fixes sous cette même action. On retrouve la proposition 5.7.1 et le théorème 5.7.2 de [Da.], ce dernier théorème devait s'écrire :

Soient M un facteur de type II_1, tr sa trace normale, finie, fidèle et normalisée et N un sous-facteur d'indice fini dans M. Si l'inclusion de N dans M est irréductible de profondeur 2 et que $\hat{\mathbb{K}}'$ soit l'algèbre de Kac $(M' \cap M_2, \theta\gamma_2\gamma_1, \gamma_1, tr)$, M est isomorphe au produit croisé de N par une action de $\mathbb{K}$.

D'après ce qui précède, l'algèbre $\mathbb{K}$ est l'algèbre $(A_{1,2}, \Gamma_{1,2}, j_{1,1}, tr)$ si $\hat{\mathbb{K}}'$ est l'algèbre $(A_{1,3}, \Gamma_{1,3}, j_{1,2}, tr)$.

10. Références

[B.H.] D. Bisch et U. Haagerup : Composition of subfactors : new examples of infinite depth subfactors.

[B.S] S. Baaj et G. Skandalis : Unitaires multiplicatifs et dualité pour les produits croisés de C*-algèbres. Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., série 4, t. 26, 1993, p. 425 à 488.

[Da.] M. - C. David : Paragroupe d'Adrian Ocneanu et algèbre de Kac. Pacific Journal of mathematics, Vol 172, No2, 1996.

[E.] M. Enock : Produit croisé d'une algèbre de von Neumann par une algèbre de Kac. Journal of Functional Analysis, 26 (1) (1977).

[E.N.] M. Enock et R. Nest : Irreducible inclusions of factors, multiplicative unitaries and Kac algebras. Journal of Functional Analysis, Vol.137, No. 2, May 1, 1996, p466-543.

[E.S.] M. Enock et J. - M. Schwartz : Kac algebras and duality of locally compact groups, Springer, Berlin, 1992.

[G.H.J.] F. M. Goodman, P. de la Harpe et V. F. R. Jones : Coxeter Graphs and Towers of algebras. MSRI Publications number 14.

[H.Sz.] J. H. Hong et W. Szymanski : Composition of subfactors and twisted bicrossed products.

[I.K.] M. Izumi et H. Kosaki : Finite dimensional Kac algebras arising from certain group actions on a factors.

[L.] R. Longo : A duality for Hopf algebras and subfactors. Comm. Math. Phys. 159 (1994) 133-155.

[M. 1] S. Majid : Physics for algebraists : non-commutative and non-cocommutative Hopf algebras by a bicrossproduct construction. J. Algebra, 130 (1990), 17-64.

[M. 2] S. Majid : Hopf-von Neumann algebra bicrossproducts, Kac algebra bicross-products, and the classical Yang-Baxter equations. Journal of Functional Ana-lysis, Vol.95, No. 2, 1991, p 291-319.

[PiPo 1] M. Pimsner et S. Popa : Entropy and index for subfactors. Ann.Scient.ENS 19 (1986) p. 57-106

[PiPo 2] M. Pimsner et S. Popa : Iterating the basic construction. Trans.A.M.S. 310 (1988) No 1 p.127-134.

[Sano] T. Sano : Commuting co-commuting squares and finite dimensional Kac algebras. Pacific Journal of mathematics, Vol 172, No1, 1996.

[S. W.] T. Sano et Y. Watatani : Angles between two subfactors. Journal of Operator theory 32 (1994) 209-241.

[Sz.] W. Szymanski : Finite index subfactors and Hopf algebras crossed products. Proc.Amer. Math. Soc. 120 (1994) 519-528.

[V.J.] V. Jones : Index for subfactors. Invent. Math. 72 1-25 (1983).

[V.D.] A. Van Daele : Continuous crossed products and type III von Neumann algebras. London Mathematical Society, Lecture Note Series 31.

[Y] T. Yamanouchi : Construction of an outer action of a finite dimensional Kac algebra on the AFD factor of type II_1. International Journal of Mathematics, vol. 4, n°6 (1993) 1007 - 1045.

Mathématique, Bât. 425, Université Paris-Sud, F-91405 Orsay Cedex. mcld@math.u-psud.fr