T H E S E présentée

pour l'obtention

du

DIPLOME de DOCTEUR de 3e CYCLE

à

L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE
- Paris 6 -

spécialité : MATHEMATIQUES

par ....Marie Claude DAVID...

Sujet de la thèse : Sur quelques problèmes de théorie ergodique non commutative

soutenue le ....29 Novembre 1979.......... **devant la Commission composée de :**

M .....J.DIXMIER........................ **Président**

M .....A.CONNES........................ **examinateur**

M .....A.BRUNEL........................ «

Je remercie A.Connes, dont les cours m'ont permis une agréable découverte des algèbres d'opérateurs, de m'avoir proposé pour ce travail un sujet tout à fait à mon goût.

Monsieur Dixmier, qui m'a accueilli au Laboratoire de Mathématiques Fondamentales, a accepté la présidence du jury, qu'il soit vivement remercié, ainsi que Monsieur Brunel qui a bien voulu en faire partie.

Je suis reconnaissante à J.P.Thouvenot pour ses conseils qui m'ont permis de mener à bien la deuxième partie de ce travail.

L'aide que T.Fack m'apporte par ses encouragements, sa disponibilité qui nous permet de nombreuses conversations intéressantes m'a été précieuse au long de ce travail. Je veux lui exprimer ici ma gratitude.

Pour la réalisation matérielle de ce texte, mes remerciements vont à Madame Boillat et à Monsieur Peyrabout.

INTRODUCTION

La théorie ergodique classique étudie les systèmes $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ où $(X,\mathcal{B})$ est un espace mesuré, μ une probabilité sur cet espace, et T une transformation sur X inversible conservant μ.
T définit sur les espaces $L^P(X,\mu)(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ des automorphismes isométriques que l'on notera $U_T:U_Tf=f\circ T$, $f \in L^P(X,\mu)$, et tout automorphisme de $L^\infty(X,\mu)$ est de cette forme.
C'est donc l'étude d'un automorphisme de l'algèbre de Von Neumann commutative $L^\infty(X,\mu)$ conservant l'état normal fidèle $f \to \int f d\mu$.
Cet automorphisme définit aussi un automorphisme sur le prédual de $L^\infty(X,\mu)$, $L^1(X,\mu)$.

La théorie ergodique non-commutative étudie le cas où l'algèbre de Von Neumann n'est pas commutative, c'est-à-dire que l'on considère une algèbre de Von Neumann $\mathcal{A}$, un état normal fidèle φ sur et un automorphisme θ de $\mathcal{A}$, θ préservant φ. Un état normal φ est une forme linéaire positive ultra-faiblement continue telle que $\varphi(1)=1$.
φ est fidèle si $A \in \mathcal{A}^+$, $\varphi(A)=0$ implique $A=0$.
$\mathcal{A}$ est muni d'une norme qu'on notera $\| \ \|$ ou $\| \ \|_\infty$.
φ définit un produit scalaire préhilbertien sur $\mathcal{A}$: $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{A}$, $(A,B)=\varphi(B^*A)$, et comme φ est fidèle une norme, $A \in \mathcal{A}$, $\|A\|_2^2=\varphi(A^*A)$, si φ est une trace ($\varphi(AB)=\varphi(BA)$) on parlera de norme-trace.
En plus de l'inégalité de Schwarz, la norme $\| \ \|_2$ vérifie les propriétés suivantes :

$$\forall \quad A \in \mathcal{A}, \quad B \in \mathcal{A}, \ \|AB\|_2 \leqslant \|A\|_\infty \|B\|_2$$

$$\forall \quad A_1,\dots A_n \text{ dans } \mathcal{A}, \ \Big\|\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} A_j\Big\|_2^2 \leqslant \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \|A_j\|_2^2$$

Le prédual $\mathcal{Q}_*$ de $\mathcal{Q}$ est l'ensemble des formes linéaires ultra-faiblement continues sur $\mathcal{Q}$. Si $f \in \mathcal{Q}_*$, $\theta f = f \circ \theta^{-1}$ est un élément de $\mathcal{Q}_*$ puisque θ est ultra-faiblement continue (on retrouve la définition de U_T sur $L^1(X,\mu)$ dans le cas commutatif). On notera $\| \ \|_1$ la norme de $\mathcal{Q}_*$.
Ce cadre, analogue à celui de la théorie ergodique classique, permet d'énoncer des définitions et des résultats semblables.
Certaines démonstrations se généralisent aisément comme nous l'avons fait dans la première partie, aux paragraphes I et II (pour les définitions et les résultats concernant l'ergodicité et le mélange faible).
Le but de ce travail est l'étude de deux résultats obtenus dans le cas commutatif, mais dont les démonstrations ne peuvent être traduites mot pour mot dans le cadre non-commutatif.

En premier lieu, nous cherchons à savoir si la propriété de mélange faible à l'ordre 2 pour un système implique le mélange faible à tout ordre (Définitions II). Ce résultat est démontré dans le cas commutatif par H. Furstenberg ([6],[11]). La seule difficulté de la généralisation est la non-commutativité de l'algèbre $\mathcal{Q}$. C'est pourquoi nous choisissons d'étudier le cas où φ est une trace. Or, si $\mathcal{Q}$ est semi-finie (il existe sur $\mathcal{Q}$ une trace semi-finie), tout état normal fidèle invariant par un automorphisme θ ergodique, puisque ici faiblement mélangeant (Proposition II 1), est une trace, et $\mathcal{Q}$ est finie [10].
Ce sont donc tous les systèmes $(\mathcal{Q},\theta,\varphi)$ où $\mathcal{Q}$ est semi-finie, θ faiblement mélangeant, φ un état normal fidèle qui entrent dans ce cas. Nous montrons (IV) la propriété de mélange faible à tout ordre pour les systèmes asymptotiquement abéliens en moyenne (III) faiblement mélangeant.
Mais, comme le montre l'exemple du système associé au groupe libre à une infinité de générateurs (V), l'hypothèse de la commutativité asymptotique en moyenne n'est pas nécessaire. En (V) on trouvera d'autres exemples de systèmes dynamiques non-commutatifs.

Dans la deuxième partie, nous étudions la propriété suivante: Soient $\mathcal{Q}$ une algèbre de Von Neumann, et θ un automorphisme de $\mathcal{Q}$; on dit que θ possède la propriété d'approximation convexe si pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout ensemble fini $f_1,\dots,f_k$ d'états normaux, il existe un état normal f tel que

$\forall\ j=1,\ldots,k \qquad f_j \overset{\varepsilon}{\in} \mathrm{Conv}\,(f,\theta)$

où Conv (f,θ) est l'enveloppe convexe de f et de ses transformées par θ et θ^{-1}

$f_j \overset{\varepsilon}{\in} \mathrm{Conv}\,(f,\theta)$ signifie $\{\ g_j \in \mathrm{Conv}\,(f,\theta) \mid \|f_j - g_j\|_1 \leqslant \varepsilon\}$.

Dans le cas commutatif, quand $\mathcal{O}\!\mathcal{L} = L^{\infty}(X,\mu)$ et $\theta = U_T$ où T est une transformation inversible conservant μ, les états normaux sont donnés par les élements de $L^1(X,\mu)$ positifs d'intégrale 1.
Si $f \in L^1(X,\mu)$, $f \geqslant 0$ et $\int f d\mu = 1$, f définit l'état normal

$F : g \in L^{\infty}(X,\mu) \to \int fg d\mu$

$\theta F = F o \theta^{-1}$ est défini par $U_T f$.

A.Connes et E.J.Woods ont montré que dans ce cas particulier, toute transformation possédant la propriété d'approximation convexe est d'entropie nulle [3]. Nous donnons ici une autre démonstration de ce résultat (II) d'après une idée de Y.Katznelson que nous proposa J.P.Thouvenot . Ce résultat nous permet d'étudier le cas du shift sur le facteur hyperfini de type II_1(III).
Cet automorphisme est ergodique, son entropie au sens de [8] est strictement positive et il ne possède pas la propriété d'approximation convexe, car sa restriction à l'algèbre des éléments diagonaux est un automorphisme de Bernoulli. On peut donc envisager de généraliser le résultat commutatif.

PREMIERE PARTIE

ETUDE DU MELANGE FAIBLE A TOUT ORDRE

<u>Lemme 3</u> : Soit (a_n) une suite de nombres complexes telle que

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} a_n = \alpha \text{ , et } \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |a_n|^2 = |\alpha|^2 \text{ ,}$$

$$\text{alors } \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |a_n - \alpha|^2 = 0 = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |a_n - \alpha| .$$

I. ERGODICITE

Soient $\mathfrak{A}$ une algèbre de Von Neumann,

θ un automorphisme de $\mathfrak{A}$,

φ un état normal fidèle θ-invariant.

Définition: Le système $(\mathfrak{A},\theta,\varphi)$ est ergodique si les seuls éléments de θ-invariants sont les scalaires, ce qui est équivalent à dire que les seuls projecteurs de $\mathfrak{A}$ θ-invariants sont 0 et Id.

En effet, par définition, les seuls projecteurs scalaires sont 0 et Id. Réciproquement, si A est un élément de $\mathfrak{A}$, A s'écrit $A_1-A_2+i(A_3-A_4)$ avec A_j élément de $\mathfrak{A}$ autoadjoint positif pour $j=1,2,3,4$. Si A est θ-invariant, il en est de même pour les A_j; on peut donc supposer que A est autoadjoint positif et que $\theta(A)=A$, alors, comme θ est ultra-fortement continu ([4],I.4.3), la famille spectrale de A est invariante par θ; on peut donc se ramener au cas d'un projecteur θ-invariant. Les projecteurs spectraux de A sont donc 0 ou Id., A est un scalaire.

E.C. Lance a montré dans le cas non commutatif l'analogue du théorème de convergence ponctuelle presque partout de Birkhoff.

Nous rappelons l'énoncé de ce théorème :[7]

Soient $\mathfrak{A},\theta,\varphi$ comme précédemment. Pour tout A de $\mathfrak{A}$, il existe un élément θ-invariant $\hat{A}$ de $\mathfrak{A}$, tel que $\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ E\in\mathfrak{A}$, E projecteur, $\varphi(E)>1-\varepsilon$, tel que

$$\lim_{N\to\infty}\|(S_N(A)-\hat{A})E\|=0 \text{ si } S_N(A)=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\theta^n(A).$$

Ici, il est question d'une convergence presque uniforme qui, dans le cas commutatif, est équivalente à la convergence presque partout (Théorème d'Egorov).

De ce théorème, nous allons déduire l'analogue des résultats classiques sur les systèmes ergodiques commutatifs.

Lemme: Si (A_n) est une suite bornée de $\mathfrak{A}$ et si $\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ E\in\mathfrak{A}$, E projecteur , $\varphi(E)>1-\varepsilon$ tel que $\lim_{n\to\infty}\|A_nE\|=0$, alors $\lim_{n\to\infty}\|A_n\|_2=0$.

<u>Démonstration</u>: Soit $\alpha > 0$. Soit $a=\sup_n \|A_n\|^2$. Soit $\varepsilon=\frac{\alpha}{2a}$. Soit E un projecteur de $\mathcal{Q}$ tel que $\varphi(E) > 1-\varepsilon$ et $\lim_{n\to\infty} \|A_n E\|=0$, alors comme (A_n) est bornée, $\lim_{n\to\infty} \|A_n^* A_n E\|=0$, et donc $\lim_{n\to\infty} \varphi(A_n^* A_n E)=0$; alors $\exists n_o \in N/\forall n \geqslant n_o$, $\varphi(A_n^* A_n E) < \alpha_{/2}$.

Aussi $\exists n_o \in N/\forall n \geqslant n_o$,

$$\varphi(A_n^* A_n) \leqslant \varphi(A_n^* A_n E)+\varphi(A_n^* A_n(1-E))$$

$$\varphi(A_n^* A_n) \leqslant \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2a} \|A_n\|^2=\alpha.$$

<u>Proposition</u>: Si le système est ergodique, pour tout A de $\mathcal{Q}$, $\hat{A}=\varphi(A)$ et

$$\lim_{N\to\infty} \|S_N(A)-\varphi(A)\|_2=0.$$

<u>Démonstration</u>: Le théorème et le lemme nous permettent d'écrire que $\lim_{N\to\infty} \|S_N(A)-\hat{A}\|_2=0$, donc $\varphi(\hat{A})=\lim_{N\to\infty} \varphi(S_N(A))=\varphi(A)$, car φ est θ-invariant.

Comme le système est ergodique, $\hat{A}$ est un scalaire égal à $\varphi(\hat{A})$, donc à $\varphi(A)$ et $\lim_{N\to\infty} \|S_N(A)-\varphi(A)\|_2=0$.

<u>Corollaire</u> : Le système $(\mathcal{Q},\theta,\varphi)$ est ergodique si et seulement si

$$\forall A \in \mathcal{Q}, \forall B \in \mathcal{Q}, \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \varphi(\theta^n A.B)=\varphi(A)\varphi(B).$$

En effet, si le système est ergodique, la convergence en norme 2 de $\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \theta^n A$ vers $\varphi(A)$ implique celle de $\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \theta^n(A).B$ vers $\varphi(A)B$, et donc la propriété du corollaire.

Réciproquement, en appliquant la propriété à un projecteur invariant E, on obtient $\varphi(E)=\varphi(E)^2$, et comme φ est fidèle, E est 0 ou Id., le système est ergodique.

II. MELANGE FAIBLE

Soient $(\mathfrak{A},\theta,\varphi)$ comme au I.

Définition: On dit que le système $(\mathfrak{A},\theta,\varphi)$ est faiblement mélangeant (à l'ordre 2) s'il vérifie l'une des trois propriétés équivalentes suivantes:

(1) $\forall A\in\mathfrak{A},\ \forall B\in\mathfrak{A}\ \lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum\limits_{n=0}^{N-1}|\varphi(\theta^n A.B)-\varphi(A)\varphi(B)|=0.$

(2) $\forall A\in\mathfrak{A},\ \forall B\in\mathfrak{A}\ J(A,B)\subset\mathbb{N}$, $J(A,B)$ de densité nulle, tel que $\lim\limits_{\substack{n\notin J(A,B)\\ n\to\infty}}\varphi(\theta^n A.B)=\varphi(A)\varphi(B)$.

(3) $\forall A\in\mathfrak{A},\ \forall B\in\mathfrak{A}\ \lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum\limits_{n=0}^{N-1}|\varphi(\theta^n A.B)-\varphi(A)\varphi(B)|^2=0.$

(L'équivalence provient de 0.2).

Proposition 1: Un système faiblement mélangeant est ergodique.
En effet, un projecteur invariant E vérifie $\varphi(E)=\varphi(E)^2$, donc comme est fidèle, E est 0 ou Id.

Proposition 2: Si $\mathcal{C}$ est une sous-algèbre involutive engendrant $\mathfrak{A}$, $(\mathfrak{A},\theta,\varphi)$ est faiblement mélangeant si et seulement si les trois propriétés équivalentes de la définition sont vérifiées pour tous A et B dans $\mathcal{C}$.

Démonstration: Soient A et B dans $\mathfrak{A}$ et (A_p) et (B_p) deux suites de tendant fortement vers A et B dans la boule de rayon $r=\sup(\|A\|,\|B\|)$.
Comme φ est ultra-faiblement continue,
$\forall\ \varepsilon>0,\ \exists\ p_o/\ \forall\ p\geqslant p_o,\ |\varphi(A_p)\varphi(B_p)-\varphi(A)\varphi(B)|<\varepsilon$,
et $\forall\ N\in\mathbb{N}$, $|\varphi(\theta^N A_p.B_p-\theta^N A.B)|<\varepsilon$.

$$(|\varphi(\theta^N A_p.B_p-\theta^N A.B)|<\|B\|\,\|\theta^N(A_p-A)\|_2+\|A\|\,\|\theta^N(B_p-B)\|_2$$
$$<r(\|A_p-A\|_2+\|B_p-B\|_2)\text{ car }\theta\text{ conserve }\varphi).$$

D'autre part, comme A_{p_o} et B_{p_o} sont dans $\mathcal{C}$

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |\varphi(\theta^N A_{p_o} B_{p_o}) - \varphi(A_{p_o})\varphi(B_{p_o})| = 0; \text{ donc, } \forall\ \varepsilon > 0$$

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |\varphi(\theta^N AB) - \varphi(A)\varphi(B)| < 2\varepsilon;$$

le système $(\mathcal{A},\theta,\varphi)$ est faiblement mélangeant.

<u>Définition</u>: On appelle carré cartésien du système $(\mathcal{A},\theta,\varphi)$, le système $(\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}, \theta\otimes\theta, \varphi\otimes\varphi)$ où $\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}$ est l'algèbre de Von Neumann engendrée par $A\otimes B$ avec $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{A}$ et
$\theta\otimes\theta(A\ B) = \theta(A)\otimes\theta(B)$
$\varphi\otimes\varphi(A\ B) = \varphi(A)\varphi(B)$ et $\varphi\otimes\varphi$ est un état normal fidèle.

<u>Proposition 3</u>: Les 3 propositions suivantes sont équivalentes:
(1) $(\mathcal{A},\theta,\varphi)$ est faiblement mélangeant,
(2) $(\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}, \theta\otimes\theta, \varphi\otimes\varphi)$ est ergodique,
(3) $(\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}, \theta\otimes\theta, \varphi\otimes\varphi)$ est faiblement mélangeant.

La démonstration de cette proposition est identique dans sa formulation à celle du cas commutatif [12].

$1 \Rightarrow 3$

D'après la proposition 2, il suffit de vérifier le mélange faible pour l'algèbre involutive engendrée par $A\otimes B$, $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{A}$, et donc sur les éléments de ce type.

Soient A, B, C, D dans $\mathcal{A}$, comme $(\mathcal{A},\theta,\varphi)$ est faiblement mélangeant,

$J_1 \subset \mathbb{N}$ de densité nulle / $\lim\limits_{\substack{n \notin J_1 \\ n \to \infty}} \varphi(\theta^n A.B) = \varphi(A)\varphi(B)$

$J_2 \subset \mathbb{N}$ de densité nulle / $\lim\limits_{\substack{n \notin J_2 \\ n \to \infty}} \varphi(\theta^n C.D) = \varphi(C)\varphi(D)$

alors $\exists$ J de densité nulle $J = J_1 \cup J_2$ tel que

$$\lim_{\substack{n \notin J \\ n \to \infty}} \varphi\otimes\varphi(\theta^n\otimes\theta^n(A\ C)B\ D) = \lim_{\substack{n \notin J \\ n \to \infty}} \varphi(\theta^n A.B)\varphi(\theta^n C.D) = \varphi(A)\varphi(B)\varphi(C)\varphi(D)$$

$$= \varphi\otimes\varphi(A\otimes C)\varphi\otimes\varphi(B\otimes D)$$

$3 \Rightarrow 2$ proposition 1.

$2 \Rightarrow 1$ Utilisons la caractérisation d'un système ergodique proposée dans I, corollaire, et appliquons-la en premier lieu aux opérateurs $A\otimes 1$ et $B\otimes 1$, et ensuite à $A\otimes A^*$ et $B\otimes B^*$, on obtient:

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \varphi(\theta^n A.B) = \varphi(A)\varphi(B) \text{ et}$$

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |\varphi(\theta^n A.B)|^2 = |\varphi(A)\varphi(B)|^2,$$

donc, d'après 0.3 $\lim\limits_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum\limits_{n=0}^{N-1} |\varphi(\theta^n A.B) - \varphi(A)\varphi(B)| = 0$, C.Q.F.D.

<u>Définition</u>: Le système $(\mathcal{A},\theta,\varphi)$ est faiblement mélangeant à l'ordre k si pour tous $A_1, A_2, \ldots, A_k$ dans $\mathcal{A}$

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |\varphi(\theta^n A_1 . \theta^{2n} A_2 \ldots \theta^{kn} A_k) - \prod_{j=1}^{k} \varphi(A_j)| = 0.$$

<u>Définition</u>: Le système $(\mathcal{A},\theta,\varphi)$ est dit faiblement mélangeant à tous les ordres, si, pour tout k, il est faiblement mélangeant à l'ordre k.

III. SYSTEME ASYMPTOTIQUEMENT ABELIEN EN MOYENNE

1- Définition.

Définition: Soient $\mathcal{A}$ une algèbre de Von Neumann, θ un automorphisme de $\mathcal{A}$, φ une trace normale finie fidèle θ-invariante telle que $\varphi(1)=1$. On dit que le système $(\mathcal{A},\theta,\varphi)$ est asymptotiquement abélien en moyenne si

(1) $\lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum\limits_{n=0}^{N-1} \|\theta^n A.B-B.\theta^n A\|_2^2=0$, $\forall A\in\mathcal{A}$, $\forall B\in\mathcal{A}$, ce qui est équivalent, d'après 0.2, à :

(2) $\lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum\limits_{n=0}^{N-1} \|\theta^n A.B-B.\theta^n A\|_2=0$ $\forall A\in\mathcal{A}$, $\forall B\in\mathcal{A}$, ou à:

(3) $\forall A\in\mathcal{A}$, $\forall B\in\mathcal{A}$, $\exists$ $J(A,B)\subset\mathbb{N}$ de densité nulle /

$$\lim_{\substack{n\notin J(A,B)\\ n\to\infty}} \|\theta^n A.B-B.\theta^n A\|_2=0.$$

C'est cette propriété qui va pallier la non-commutativité du système dans la démonstration du lemme fondamental (IV.1.3).

Remarque 1: Si la suite (θ^n) est asymptotiquement abélienne au sens de [2], (une suite (σ_n) d'automorphismes d'une algèbre de Von Neumann M est dite asymptotiquement abélienne si $\forall x\in M$, $\forall y\in M$, $[\sigma_n(x),y]\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ fortement), alors le système $(\mathcal{A},\theta,\varphi)$ est asymptotiquement abélien en moyenne.

Remarque 2: Il existe des systèmes $(\mathcal{A},\theta,\varphi)$ asymptotiquement abéliens en moyenne tels que $\mathcal{A}$ ne soit pas commutative.

2- Exemples.

Exemple a: Soit R le facteur hyperfini de type II_1. On écrit R comme produit tensoriel infini de couples (F,τ) avec $F=M_2(C)$ et τ-trace canonique sur F

$$(R,\varphi)=\bigotimes_{p\in Z}(F_p,\tau_p)\ ,\ (F_p,\tau_p)=(F,\tau)\ ,\ \forall\ p\in Z$$

R n'est pas commutatif car $F\subset R$.

Soit Π_q l'injection de F dans R au rang q, c'est-à-dire $\Pi_q(x)=\ldots 1\otimes 1 \ldots 1\otimes x\otimes 1\otimes \ldots$, $x \in F_q$. L'algèbre $\mathcal{C}$ engendrée par $\{\Pi_q(x),\ p \in Z,\ x \in F\}$ est faiblement dense dans R.

D'autre part, on a $\varphi(\ldots 1\otimes x_1\otimes \ldots x_n\otimes 1\ldots)= \prod_{j=1}^{n} \tau(x_j)$.

φ est une trace normale fidèle et $\varphi(1)=1$.

On définit l'automorphisme θ de R par

$\theta\Pi_q(x)=\Pi_{q+1}(x)$, φ est θ-invariant.

<u>Proposition 1</u>: Le système (R,θ,φ) est asymptotiquement abélien en moyenne.

En effet $\forall A \in \mathcal{C}$, $\forall B \in \mathcal{C}$, $\exists n_o \in N$ / $\forall n \geq n_o$

$$\theta^n A.B=B.\theta^n A$$

Comme $\mathcal{C}$ est une sous algèbre faiblement dense de R, comme φ est un état normal fidèle invariant par θ, le théorème 2 de [2] s'applique, et la suite (θ^n) est asymptotiquement abélienne.

<u>Exemple b</u>: Nous rappelons la construction de l'algèbre de Von Neumann associée à un groupe discret ([4] III.7.6). Celle-ci nous fournira à plusieurs reprises des exemples.

Soit G un groupe discret d'élément neutre e, $\mathcal{U}$ l'algèbre des fonctions numériques complexes sur G nulles sauf en un nombre fini de points, la multiplication dans $\mathcal{U}$ étant définie par la convolution des fonctions

$$(x*x')(g)= \sum_{h \in G} x(h)x'(h^{-1}g)$$

Pour $x \in \mathcal{U}$, définissons x^* par $x^*(g)=\overline{x(g^{-1})}$

Pour $x \in \mathcal{U}$, $y \in \mathcal{U}$, posons $(x/y)= \sum_{g \in G} x(g)\overline{y(g)}$

$\mathcal{U}$ est un espace préhilbertien, l'espace hilbertien complété est l'espace H des fonctions numériques complexes x sur G telles que

$$\sum_{g \in G} |x(g)|^2 < \infty$$

$\mathcal{U}$ est une algèbre hilbertienne. Nous ne considérerons par la suite que l'algèbre de Von Neumann associée à gauche à $\mathcal{U}$, nous la noterons $\mathcal{Q}$, algèbre de Von Neumann associée à G.

$\mathcal{Q}$ est finie et formée des opérateurs U_a, a étant un élément borné de H. Si a et b sont des éléments bornés de H, $U_a b=a*b$, donc dans ce cas

$U_a U_b=U_{a*b}$

Nous n'étudierons que des groupes où toute classe de conjugaison distincte de $\{e\}$ est infini alors $\mathcal{A}$ est un facteur de type II_1.
Soit φ la trace canonique sur $\mathcal{A}$, φ est normale finie fidèle ([3] I.6.2)

$\varphi(U_a)=a(e)$. $\qquad \varphi(U_b^*U_a)=(a/b)$

Pour cet exemple, prenons pour G le groupe des permutations de $\mathbb{Z}$ qui ne changent qu'un nombre fini de points de $\mathbb{Z}$. Toute classe distincte de $\{e\}$ est infinie.
Pour $g \in G-\{e\}$, posons $i(g)=\inf\{n \in Z,\ g(n)\neq n\}$

$m(g)=\sup\{n \in Z,\ g(n)\neq n\}$

et $\mathrm{Dom}\ g=\{n \in Z,\ i(g) \leqslant n \leqslant m(g)\}$, $\mathrm{Dom}\ e=\emptyset$.
Soit θ l'automorphisme de G défini par

$\theta(g)(p)=g(p+1)-1$ pour $g \in G$ et $p \in Z$. $\theta(e)=e$ donc θ conserve φ.
θ opère une translation de (-1) sur Dom g.
Nous notons aussi θ l'automorphisme sur $\mathcal{U}$ défini par

$\theta(x)(g)=x(\theta(g))$, $x \in \mathcal{U}$, $g \in G$, et son prolongement à $\mathcal{A}$.

<u>Proposition 2</u>: Le système $(\mathcal{A},\theta,\varphi)$ ainsi défini est asymptotiquement abélien en moyenne.

<u>Démonstration</u>: Soient $r \in G$, $s \in G$,

$$\varepsilon_r * \varepsilon_s(g)=\sum_{h \in G}\varepsilon_r(h)\varepsilon_s(h^{-1}g)=\varepsilon_{rs}(g).$$

Or, si $\mathrm{Dom}\ r \cap \mathrm{Dom}\ s=\emptyset$ $rs=sr$ (Si $n \notin \mathrm{Dom}\ r$, $r(n)=n$).

Donc, si $n > m(r)-i(s)$ ou si $r=e$ ou $s=e$, $\theta^n U_{\varepsilon_s}.U_{\varepsilon_r}=U_{\varepsilon_r}.\theta^n U_{\varepsilon_s}$

puisque $\theta^n U_{\varepsilon_s}.U_{\varepsilon_n}=U_{\varepsilon_{\theta^n(s).r}}$ et que θ opère une translation de (-1) sur Dom s.
De même que pour l'exemple a, puisque $\{\varepsilon_g, g \in G\}$ engendre $\mathcal{U}$ qui est faiblement dense dans $\mathcal{A}$, on en conclut que la suite (θ^n) est asymptotiquement abélienne.

3- Commutativité asymptotique en moyenne et propriété Γ.

Proposition 3: Soit $\mathcal{A}$ un facteur, si le système $(\mathcal{A},\theta,\varphi)$ est asymptotiquement abélien en moyenne, $\mathcal{A}$ possède la propriété Γ (c'est-à-dire $\forall\ A_1,\dots,A_k$ de $\mathcal{A}$ et $\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ V\in\mathcal{A}$, unitaire, $\varphi(V)=0$ tel que $\|V^{-1}A_hV-A_h\|_2\leqslant\varepsilon$, $\forall\ h=1,\dots k$).

Démonstration: Soit $U\in\mathcal{A}$, U unitaire, $\varphi(U)=0$.
Soient $A_1,\dots,A_k$ dans $\mathcal{A}$ et $\varepsilon>0$.
Soient $J(U,A_1)=J_1$, $J(U,A_2)=J_2,\dots$, $J(U,A_k)=J_k$ comme dans la définition.

Posons $J=\bigcup_{h=1}^{k} J_h$,

Pour tout $h=1,\dots k$, $\lim\limits_{\substack{n\notin J\\ n\to\infty}}\|\theta^n(U^{-1})A_h\theta^n(U)-A_h\|_2=0$.

$[\ \|\theta^n(U^{-1})A_h\theta^n(U)-A_h\|_2=\|\theta^n(U)A_h-A_h\theta^n(U)\|_2$ car U est unitaire et $\forall\ T\in\mathcal{A}$, $\varphi(UTU^{-1})=\varphi(T)]$

donc $\exists\ p\in\mathbb{N}$ pour tout $h=1,\dots k$, $\|\theta^p(U^{-1})A_h\theta^p(U)-A_h\|_2\leqslant\varepsilon$.

Il suffit donc de prendre $V=\theta^p(U)$, $\varphi(V)=0$ car φ est θ-invariante.

Ce résultat nous montrera que l'hypothèse de commutativité asymptotique en moyenne n'est pas nécessaire pour avoir le mélange faible à tout ordre (V).

4- Le carré cartésien d'un système asymptotique abélien en moyenne est asymptotique abélien en moyenne.

Proposition 4: Si un système est asymptotiquement abélien en moyenne, son carré cartésien l'est aussi.

Démonstration: Il suffit de vérifier que pour tous A, B, C, D de $\mathcal{A}$, il existe un sous ensemble J de N de densité nulle tel que

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ n\notin J}}\|[\theta^n\otimes\theta^n(A\otimes C),B\otimes D]\|_2=0.$$

Or $\|[\theta^n \otimes \theta^n(A\otimes C), B\otimes D]\|_2 = \|[\theta^n A, B]\otimes \theta^n C.D + B.\theta^n A\otimes[\theta^n C, D]\|_2$;

Donc $\|[\theta^n \otimes \theta^n(A\otimes C), B\otimes D]\|_2 \leqslant \|C\|\|D\|\|[\theta^n A, B]\|_2 + \|B\|\|A\|\|[\theta^n C, D]\|_2$.

Il suffit de prendre $J=J(A,B) \cup J(C,D)$, (J est de densité nulle (0.1)) avec les notations de la définition (3).

IV. MELANGE FAIBLE A TOUS LES ORDRES POUR UN SYSTEME ASYMPTOTIQUEMENT ABELIEN EN MOYENNE.

1- La démonstration de ce résultat reprend les étapes de la démonstration dans le cas commutatif. Tout d'abord, nous démontrons un lemme fondamental qui est une généralisation à tous les ordres du théorème de Von Neumann de la théorie ergodique classique:

Lemme: Soient $\mathcal{A}$ une algèbre de Von Neumann , φ une trace normale finie fidèle telle que $\varphi(1)=1.$, θ un automorphisme conservant φ. On suppose que le système $(\mathcal{A},\theta,\varphi)$ est faiblement mélangeant. Alors pour tous $A_1,A_2,\dots,A_k$ de $\mathcal{A}$

$$\lim_{N\to\infty} \left\| \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \theta^n A_1.\theta^{2n}A_2\dots\theta^{kn}A_k - \varphi(A_1)\varphi(A_2)\dots\varphi(A_k)\right\|_2 = 0$$

pour $k=1$ et $k=2$ sans hypothèse supplémentaire ou pour tout k si le système est asymptotiquement abélien en moyenne.

C'est dans la démonstration de ce lemme que la non-commutativité crée des difficultés qui nous ont amenés à cette hypothèse de commutativité asymptotique en moyenne. Nous donnons cette démonstration en IV.3.

De ce lemme, nous déduisons le théorème suivant:

Théorème: Si un système asymptotiquement abélien en moyenne est faiblement mélangeant, il est faiblement mélangeant à tous les ordres.

Démonstration: Soit $k\in\mathbb{N}$ et soient $A_1,A_2,\dots A_k$ dans $\mathcal{A}$, nous devons montrer que $\lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum\limits_{n=0}^{N-1}\left|\varphi(\theta^n A_1.\theta^{2n}A_2\dots\theta^{kn}A_k)-\prod\limits_{j=1}^{k}\varphi(A_j)\right|=0.$

Appliquons le lemme au système $(\mathcal{A},\theta,\varphi)$ supposé faiblement mélangeant et asymptotiquement abélien en moyenne, et au système $(\mathcal{A}\otimes\mathcal{A},\theta\otimes\theta,\varphi\otimes\varphi)$ qui possède les mêmes propriétés d'après les propositions III.3 et III.4. En calculant la trace sur chacune des relations obtenues, nous pouvons écrire:

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\varphi(\theta^n A_1.\theta^{2n}A_2\dots\theta^{kn}A_k)=\prod_{j=1}^{k}\varphi(A_j)$$

et $$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\varphi\otimes\varphi(\theta^n\otimes\theta^n(A_1\otimes A_1^*)\dots\theta^{kn}\otimes\theta^{kn}(A_k\otimes A_k^*))=\prod_{j=1}^{k}\varphi\otimes\varphi(A_j\otimes A_j^*)$$

C'est-à-dire $\lim\limits_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum\limits_{n=0}^{N-1} |\varphi(\theta^n A_1 . \theta^{2n} A_2 \ldots \theta^{kn} A_k)|^2 = \prod\limits_{j=1}^{k} |\varphi(A_j)|^2$

En posant $a_n = \varphi(\theta^n A_1 . \theta^{2n} A_2 \ldots \theta^{kn} A_k)$

$\alpha = \prod\limits_{j=1}^{k} \varphi(A_j)$ dans le lemme 0.3, nous obtenons le résultat espéré.

2- <u>Exemples</u>: Reprenons les exemples de III.2. Nous avons vu que les systèmes considérés sont asymptotiquement abélien en moyenne, montrons qu'ils sont faiblement mélangeants.

<u>Exemple a</u>: D'après la proposition III.2, il suffit de montrer que pour tout A de la forme $\Pi_p(a)$ et tout B de la forme $\Pi_q(b)$, il existe $J(A,B) \subset N$, de densité nulle tel que $\lim\limits_{\substack{n \to \infty \\ n \notin J(A,B)}} \varphi(\theta^n A.B) = \varphi(A)\varphi(B)$

Il suffit de prendre $J(A,B) = \{n \in N \ , \ n \leqslant \sup(0,q-p)\}$, alors pour tout $n \notin J(A,B), \varphi(\theta^n A.B) = \tau(a)\tau(b) = \varphi(A)\varphi(B)$

le système (R,θ,φ) est faiblement mélangeant à tout ordre.

<u>Exemple b</u>: De même dans ce cas, il suffit de considérer $A = U_{\varepsilon_s}$ et $B = U_{\varepsilon_r}$, $s \in G$, $r \in G$.

Alors $\varphi(\theta^n A.B) = \varepsilon_{\theta^n s.r}(e)$.

Si $s=r=e$, $\forall\, n \in N \quad \varphi(\theta^n A.B) = 1 = \varphi(1)^2$.

Si $s=e$ et $r \neq e$ (ou $s \neq e$ et $r=e$) $\varphi(\theta^n A.B) = 0 = \varphi(A)\varphi(B)$, $\forall\, n \in N$.

(on remarque que $\theta e = e$ et $\varphi(U_{\varepsilon_s}) = \delta_{s,e}$).

Si $s \neq e$ et $r \neq e$, $\forall\, n > m(r) - i(s) \quad \theta^n s.r \neq e$, donc $\varphi(\theta^n A.B) = 0 = \varphi(A)\varphi(B)$

le système $(\mathcal{Q},\theta,\varphi)$ est faiblement mélangeant à tout ordre.

3- <u>Démonstration du lemme fondamental</u>: La démonstration se fait par récurrence sur k, ordre du mélange.

a) k=1

Si le système est faiblement mélangeant, il est ergodique et on a:

$\lim\limits_{N \to \infty} \| \frac{1}{N} \sum\limits_{n=1}^{N} \theta^n A - \varphi(A) \|_2 = 0$ pour tout A dans $\mathcal{Q}$. (Proposition I)

b) On suppose le théorème vrai pour k-1; le résultat est vrai à l'ordre k si A_k est un scalaire, donc on peut se ramener au cas où $\varphi(A_k)=0$.

Dans la suite, on suppose le théorème vrai jusqu'à l'ordre k-1 et $\varphi(A_k)=0$ alors démontrer que $M_k(N)=\|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\theta^n A_1.\theta^{2n}A_2\ldots\theta^{kn}A_k\|_2^2$ tend vers 0 quand N tend vers l'infini.

c) Soit H un entier positif.
Comme $\|\theta^n A_1.\theta^{2n}A_2\ldots\theta^{kn}A_k\|\leqslant\prod_{j=1}^{k}\|A_j\|\ \forall\ n\in N$ (θ est de norme 1)

$$M_k(N)\leqslant O(\frac{H}{N})+\|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{H}\sum_{j=n+1}^{n+H}\theta^j A_1.\theta^{2j}A_2\ldots\theta^{kj}A_k\|_2^2$$

d'où $M_k(N)\leqslant O(\frac{H}{N})+\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{H^2}\|\sum_{j=n+1}^{n+H}\theta^j A_1\ldots\theta^{kj}A_k\|_2^2$

d) On développe $\|\sum_{j=n+1}^{n+H}\theta^j A_1\ldots\theta^{kj}A_k\|_2^2$

Comme les $\theta^{jn}A_j$ sont uniformément bornés,

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{H^2}\|\sum_{j=n+1}^{n+H}\theta^j A_1\ldots\theta^{kj}A_k\|_2^2\leqslant O(\frac{H}{N})+\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\sum_{|m|\leqslant H}\frac{H-|m|}{H^2}\varphi(\theta^{kj}A_k^*\ldots\theta^j A_1^*.\theta^n A_1\ldots\theta^{kn}A_k)$$

D'où $M_k(N)\leqslant O(\frac{H}{N})+\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\sum_{|m|\leqslant H}\frac{H-|m|}{H^2}\varphi(\theta^{kj}A_k^*\ldots\theta^j A_1^*.\theta^n A_1\ldots\theta^{kn}A_k)$

avec m=j-n.

e) Si k=2, l'hypothèse de récurrence est:

$$\lim_{N\to\infty}\|[\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\theta^n T]-\varphi(T)\|_2=0\ ,\ \forall\ T\in\mathfrak{A}.$$

Donc $\forall\ T\in\mathfrak{A},\ \forall\ S\in\mathfrak{A},\ \lim_{N\to\infty}\|[\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\theta^n T.S]-\varphi(T)S\|_2=0.$

D'où $\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}[\varphi(\theta^n T.S)-\varphi(T)\varphi(S)]=0\ ,\ \forall\ T\in\mathfrak{A},\ \forall\ S\in\mathfrak{A}.$

Comme φ est invariante par θ,

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}[\varphi(\theta^{2n}T.\theta^{n}S)-\varphi(T)\varphi(S)]=0\ ,\ \forall\ T\in\mathcal{A},\ \forall\ S\in\mathcal{A}.$$

Posons $T=B.\theta^{2m}B^{*}$, $S=\theta^{m}A^{*}.A$.

En utilisant la propriété de commutation de la trace, on obtient:

$$\forall\ A\in\mathcal{A},\ \forall\ B\in\mathcal{A},\ \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}[\varphi(\theta^{2j}B^{*}.\theta^{j}A^{*}.\theta^{n}A.\theta^{2n}B)-\varphi(B.\theta^{2m}B^{*})\varphi(A.\theta^{m}A^{*})]=0$$

avec $m=j-n$.

Si $k>2$, on suppose que le système $(\mathcal{A},\theta,\varphi)$ est asymptotiquement abélien en moyenne, et on démontre une formule semblable à celle qu'on vient d'établir dans le cas $k=2$.

<u>Lemme</u>: Pour tous R_n, T_n, A, B de $\mathcal{A}$ tels qu'il existe M majorant $\|R_n\|^2$ et $\|T_n\|^2$ pour tout n de N; si $k\neq j$

$$\lim_{N\to\infty}\Big\|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}R_n.\theta^{jn}A.\theta^{kn}B.T_n-\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}R_n.\theta^{kn}B.\theta^{jn}A.T_n\Big\|_2=0$$

En effet :

$$\Big\|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(R_n.\theta^{jn}A.\theta^{kn}B.T_n-R_n.\theta^{kn}B.\theta^{jn}A.T_n)\Big\|_2^2\leqslant\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\|R_n.\theta^{jn}A.\theta^{kn}B.T_n-R_n.\theta^{kn}B.\theta^{jn}A.T_n\|_2^2$$

Donc

$$\Big\|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(R_n.\theta^{jn}A.\theta^{kn}B.T_n-R_n.\theta^{kn}B.\theta^{jn}A.T_n)\Big\|_2^2\leqslant\frac{M^2}{N}\sum_{n=1}^{N}\|\theta^{jn}A.\theta^{kn}B-\theta^{kn}B.\theta^{jn}A\|_2^2$$

Or, $\displaystyle\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\|\theta^{jn}A.\theta^{kn}B-\theta^{kn}B.\theta^{jn}A\|_2^2\leqslant\frac{k-j}{(k-j)N}\sum_{n=1}^{(k-j)N}\|\theta^{n}A.B-B.\theta^{n}A\|_2^2$

et $(\mathcal{A},\theta,\varphi)$ est asymptotiquement abélien en moyenne.

En appliquant ce lemme un nombre fini de fois, on peut regrouper les termes en A_j et A_j^{*} et on montre que

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\theta^{n}A_2.\theta^{2n}A_3\ldots\theta^{(k-1)n}A_k.\theta^{(k-1)n}(\theta^{km}A_k^{*})\ldots\theta^{n}(\theta^{2m}A_2^{*})$$ a même limite en

norme-trace quand N tend vers l'infini que

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\theta^{n}(A_2.\theta^{2m}A_2^{*})\ldots\theta^{(k-1)n}(A_k.\theta^{km}A_k^{*})$$

Donc, en tenant compte de l'hypothèse de récurrence

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}[\theta^n A_2.\theta^{2n}A_k\ldots\theta^{(k-1)n}A_k.\theta^{(k-1)n}(\theta^{km}A_k^*)\ldots\theta^n(\theta^{2m}A_2^*)] =$$

$$= \prod_{j=2}^{k}\varphi(A_j.\theta^{jm}A_j^*)$$

alors puisque φ est une trace θ-invariante, par un calcul analogue à celui effectué dans le cas k=2, on obtient :

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\varphi(\theta^{kj}A_k^*\ldots\theta^{j}A_1^*.\theta^{n}A_1\ldots\theta^{kn}A_k) = \prod_{h=1}^{k}\varphi(A_h.\theta^{hm}A_h^*) \quad ; \; m=j-n.$$

f) Comme le système est faiblement mélangeant,

$$\lim_{H\to\infty}\frac{1}{H}\sum_{|m|\leqslant H}|\varphi(A_k.\theta^{km}A_k^*) - \varphi(A_k)\varphi(A_k^*)| = 0$$

D'autre part, $\prod_{p=2}^{k}\varphi(A_p.\theta^{pm}A_p^*) \leqslant \prod_{p=2}^{k}\varphi(A_pA_p^*)$ (inégalité de Schwarz; θ conserve φ)

et $\varphi(A_k)=0$.

Donc $\lim_{H\to\infty}\frac{1}{H}\sum_{|m|\leqslant H}(H-|m|)\prod_{p=1}^{k}\varphi(A_p.\theta^{pm}A_p^*) = 0$

g) Conclusion: La majoration du d) et les résultats des e) et f) permettent d'affirmer que $M_k(N)$ tend vers 0 quand N tend vers l'infini.

V. CAS D'UNE ALGEBRE DE VON NEUMANN ASSOCIEE A UN GROUPE DISCRET.

Nous proposons ici un résultat qui nous permet d'étudier les systèmes où $\mathcal{A}$ est l'algèbre de Von Neumann associée à un groupe discret G (nous avons rappelé cette construction en III 2.b) et θ un automorphisme de $\mathcal{A}$ défini par une permutation des générateurs de G.

Nous traitons, en particulier, le cas du groupe libre à une infinité de générateurs qui nous donne l'exemple d'un système faiblement mélangeant à tout ordre qui n'est pas asymptotiquement abélien en moyenne (il ne possède pas la propriété Γ).

Proposition: Soient G un groupe discret et $\mathcal{A}$ l'algèbre de Von Neumann associée à G (voir III 2.b).
Soient $R \subset \mathbb{R}$ et $\{g_r,\ r \in R\}$ un système minimal de générateurs de G.
Soit f une bijection de R dans R telle que
$\theta: G \to G$ soit un automorphisme
$g_r \to g_{f(r)}$ de G.
Nous appellerons aussi θ l'automorphisme de $\mathcal{A}$ défini par $\theta(U_a)=U_{\theta(a)}$ si $\theta(a)(g)=a(\theta(g))$.
Si $\lim\limits_{n\to\infty} |f^n(r)-r|=\infty$, alors le système $(\mathcal{A},\theta,\varphi)$ est faiblement mélangeant à tous les ordres.

Démonstration: On veut montrer que $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $\forall\ A_1,\dots,A_k$ dans $\mathcal{A}$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} |\varphi(\theta^n(A_1)\theta^{2n}(A_2),\dots\theta^{kn}(A_k))-\prod_{p=1}^{k}\varphi(A_p)| =0.$$

Il suffit de le montrer pour $A_p=U_{a_p}$, $a_p \in \mathcal{U}$, $p=1,\dots,k$ puisque engendre l'algèbre de Von Neumann $\mathcal{A}$ (Proposition II.2).
Soit S le groupe libre engendré par les générateurs de G intervenant dans l'écriture réduite des éléments de la réunion des supports de $a_1,a_2,\dots,a_k$.

Les exemples b et c sont construits à partir des sous groupes de G ainsi définis ([8] p.805)

G admet pour générateurs $\{x_r , r \in \mathbb{Q}\} r=\frac{p}{q}$.

$A=\left\{\frac{p}{2^n}, p \in Z , n \in \mathbb{N} , n\neq 0 \Rightarrow p \text{ impair}\right\}$ $\quad B=\mathbb{Q}-A$

Les règles de composition sont les suivantes:

i. $r \in A$, x_r se combine librement avec tout produit $x_{s_1} x_{s_2} \dots x_{s_p}$

si $s_1, s_2, \dots s_p < r$.

ii. $r \in B$, x_r commute à tous les produits $x_{s_1} x_{s_2} \dots x_{s_p}$

si $s_1, s_2, \dots, s_p < r$.

iii. Tous les x_r sont d'ordre fini.

H_r est le sous-groupe engendré par $x_{r'}$, $r' \leq r$.

G_r est le sous-groupe engendré par $x_{r'}$, $r' < r$.

Soit $\mathcal{A}$(resp.$\mathcal{B}$) l'algèbre de Von Neumann associée à H_1(resp.G_1).

$\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont des facteurs de type II_1.

$\mathcal{A}$ n'a pas la propriété Γ. $\mathcal{B}$ a la propriété Γ.

Exemple b: $R=\{r \in \mathbb{Q} , r \leq r_o\} r_o=\frac{p_o}{q_o}$ $q_o \in N^*$

$f: R \to R$, $f(r)=(1+q_o)r-p_o$

$f(A)=A$, f est bijective et croissante donc définit un automorphisme θ de H_{r_o}

$f(r_o)=r_o \quad \theta(U_{x_{r_o}})=U_{x_{r_o}}$

$(\mathcal{A},\theta,\varphi)$ n'est pas ergodique, donc pas faiblement mélangeant.

Exemple c: $R=\{r \in Q , r < r_o\} r_o=\frac{p_o}{q_o}$, $q_o \in N^*$

$f: R \to R$, $f(r)=(1+q_o)r-p_o$

$f(A)=A$, f est bijective et croissante donc définit un automorphisme θ de G_{r_o}

$f(r)-r=q_o(r-r_o)$ et on montre par récurrence que

$$f^n(r)-r=q_o(r-r_o)\ \frac{(q_o+1)^n-1}{q_o}$$

donc $\lim\limits_{n \to \infty} |f^n(r)-r| = \infty$

Le système $(\mathfrak{B},\theta,\varphi)$ est faiblement mélangeant à tous les ordres.

DEUXIEME PARTIE

ETUDE DE LA PROPRIETE D'APPROXIMATION CONVEXE

I. APPROXIMATION CONVEXE, DEFINITIONS.

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Von Neumann. Son prédual $\mathcal{A}_*$ est l'ensemble des formes linéaires ultrafaiblement continues sur $\mathcal{A}$.
On note $\| \ \|_1$ la norme de $\mathcal{A}_*$; si $f \in \mathcal{A}_*$

$$\|f\|_1 = \sup_{\substack{A \in \mathcal{A} \\ \|A\| \leqslant 1}} |f(A)|$$

On appelle état normal de $\mathcal{A}$ un élément f positif de $\mathcal{A}_*$ de norme 1; comme f est positif $\|f\|_1 = f(1)$.
Si θ est un automorphisme de $\mathcal{A}$, on pose $\theta f = f \circ \theta^{-1}$ pour $f \in \mathcal{A}_*$; si f est un état normal θf est un état normal (θ est ultra-faiblement continu).

<u>Définition</u>: Soient $\mathcal{A}$ une algèbre de Von Neumann, θ un automorphisme de $\mathcal{A}$. On dit que θ possède la propriété d'approximation convexe si pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout ensemble fini $f_1, \dots, f_k$, d'états normaux, il existe un état normal f tel que :

$$\forall \ j=1,\dots,k \qquad f_j \overset{\varepsilon}{\in} \mathrm{Conv}\,(f,\theta)$$

si a) $\mathrm{Conv}\,(f,\theta)$ est l'enveloppe convexe de f et des transformés de f par θ et θ^{-1};

b) $f_j \overset{\varepsilon}{\in} \mathrm{Conv}\,(f,\theta)$ signifie $\{\exists \ g_j \in \mathrm{Conv}\,(f,\theta) \mid \|f_j - g_j\|_1 \leqslant \varepsilon\}$.

<u>Proposition</u>: Si θ possède la propriété d'approximation convexe, alors θ est ergodique (1ère partie I).

<u>Démonstration</u>: Soit E un projecteur de $\mathcal{A}$ différent de 0 et 1 tel que $\theta(E) = E$, et soit $\varepsilon < \dfrac{1}{2(\|E\| + \|1-E\|)}$.
Soit f(resp. g) un état normal de support E(resp. 1-E). Comme θ possède la propriété d'approximation convexe, il existe un état normal φ tel que

a) $\| f - \sum\limits_{p \in P} \alpha_p \theta^p \varphi \|_1 < \varepsilon$, $\sum\limits_{p \in P \text{ fini}} \alpha_p = 1 \quad \alpha_p > 0 \quad P \subset \mathbb{Z}$

b) $\| g - \sum\limits_{k \in K} \beta_k \theta^k \varphi \|_1 < \varepsilon$, $\sum\limits_{k \in K \text{ fini}} \beta_k = 1 \quad \beta_k > 0 \quad K \subset \mathbb{Z}$

alors (a) $\Rightarrow |\Sigma \alpha_p \theta^p \varphi(1-E)| < \varepsilon \|1-E\|$

c'est-à-dire comme E est invariant et $\Sigma \alpha_p = 1$, $\varphi(1-E) < \varepsilon \|1-E\|$.

De même (b) $\Rightarrow |\Sigma \beta_k \theta^k \varphi(E)| < \varepsilon \|E\| \Rightarrow \varphi(E) < \varepsilon \|E\|$;

d'où $1 = \varphi(1) < \frac{1}{2}$ contradiction;

θ est donc ergodique.

Dans toute la suite, nous ne considérerons que des transformations ergodiques.

II. APPROXIMATION CONVEXE, CAS COMMUTATIF

1- Ici, nous considérerons un espace de probalité (X,μ) (on sous-entend la tribu des ensembles mesurables; les ensembles considérés seront toujours mesurables), et l'algèbre de Von Neumann abélienne $L^\infty(X,\mu)$. T une transformation conservant la mesure μ induit un automorphisme U_T (ou plus simplement U) sur $L^\infty(X,\mu)$ par $U_T f = f \circ T$.

Le prédual de $L^\infty(X,\mu)$ est $L^1(X,\mu)$ muni de la norme $\| \ \|_1$ habituelle; dans ce cadre particulier on peut énoncer la définition de l'approximation convexe ainsi,

<u>Définition 1</u>: U_T possède la propriété d'approximation convexe si pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout ensemble fini $\{f_1,\dots,f_k\}$ de fonctions positives d'intégrale 1, il existe une fonction f positive d'intégrale 1 telle que $\forall$ $j=1,\dots,k$

$$f_j \overset{\varepsilon}{\in} \mathrm{Conv}\ (f,U_T).$$

On utilisera souvent cet énoncé équivalent.

<u>Définition 2</u>: U_T possède la propriété d'approximation convexe si pour tout $\varepsilon > 0$ pour toute partition finie P de X $P=\{A_1,\dots,h_n\}$ il existe f positive d'intégrale 1 telle que $\forall$ $j=1,\dots,n$

$$\frac{1}{\mu(A_j)} \chi_{A_j} \overset{\varepsilon}{\in} \mathrm{Conv}\ (f,U_T).$$

Ces deux définitions sont équivalentes, en effet, la seconde est un cas particulier de la première, la réciproque résulte de la densité de l'espace des fonctions étagées (fonctions ne prenant qu'un nombre fini de valeurs) dans $L^1(X,\mu)$ et de la remarque suivante.

<u>Remarque 1</u>: Si pour $\varepsilon > 0$ et $j=1,\dots,n$ $g_j \overset{\varepsilon}{\in} \mathrm{Conv}\ (f,U_T)$, alors toute fonction g de l'enveloppe convexe des g_j, $j=1,\dots,n$, vérifie

$$g \overset{\varepsilon}{\in} \mathrm{Conv}\ (f,U_T).$$

<u>Remarque 2</u>: On peut choisir f étagée positive d'intégrale 1 dans les définitions de la propriété. Nous ferons par la suite toujours ce choix.

<u>Remarque 3</u>: Si U_T possède la propriété d'approximation convexe, pour tout $\varepsilon > 0$ on pourra choisir f vérifiant la propriété et telle que $\mu(\text{supp } f) \leqslant \alpha$
[$\text{supp } f = \{x \in X \ , \ f(x) \neq 0\}$] .

<u>Démonstration</u>: Soient $\varepsilon > 0$, $f_1, \ldots, f_k$ des fonctions positives d'intégrale 1 et $E \subset X$ tel que $\mu(E) \leqslant \frac{\alpha}{2}$. Ecrivons la propriété d'approximation convexe pour η, $f_1, \ldots, f_k$, $\frac{1}{\mu(E)} \chi_E$: il existe f positive d'intégrale 1 et des nombres réels positifs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_N$ tels que

$$\left\| \frac{1}{\mu(E)} \chi_E - \sum_1^N \alpha_n U_T^n f \right\|_1 \leqslant \eta \quad , \quad \sum_1^N \alpha_n = 1$$

et $\forall\ j=1,\ldots,k \qquad f_j \overset{\eta}{\in} \text{Conv}(f, U_T)$.

Soit $A=\{x, f(x) \geqslant a\}$ $\quad A^n=\{x, U_T^n f \geqslant a\}=T^{-n}A$.

Majorons la mesure de A:

$$\text{comme} \left\| \sum_1^N \alpha_n (U^n f) \chi_{\left(\bigcup_1^N A^n\right) \cap {}^cE} \right\|_1 \leqslant \eta \qquad ({}^cE = X - E),$$

$$\int \sum_1^N \alpha_n (U^n f) \chi_{A^n \cap {}^cE} \leqslant \eta \qquad \text{et on a} \quad a \sum_1^N \alpha_n \mu(A^n \cap {}^cE) \leqslant \eta$$

or $\inf_n \mu(A^n \cap {}^cE) \geqslant \mu(A) - \mu(E)$, on obtient la majoration suivante:

$$\mu(A) \leqslant \left(1 + \frac{\eta}{a\mu(E)}\right) \mu(E)$$

Choisissons $\qquad \eta = \dfrac{\varepsilon\mu(E)}{1+\mu(E)}$ et $a = \dfrac{\varepsilon}{1+\mu(E)}$

Ainsi $\mu(A) \leqslant \alpha$.

Alors la fonction $f\chi_A$ vérifie la propriété pour $\varepsilon, f_1, \dots, f_k$ et son support est de mesure moindre que α; en effet pour tout $j=1,\dots,k$, f_j est proche à η près d'une combinaison convexe $\sum_n \alpha_{j,n} U_T^n f$ de f et de ses transformées et on a donc

$$\|f_j - \sum_n \alpha_{j,n} U_T^n(f\chi_A)\|_1 \leqslant \|f_j - \sum_n \alpha_{j,n} U_T^n f\|_1 + \sum_n \alpha_{j,n} U_T^n(f\chi_A)\|_1 \leqslant \eta + a = \varepsilon$$

2- <u>Théorème</u>: Avec les notations de 1, si U_T possède la propriété d'approximation convexe, alors l'entropie de T est nulle.

Nous démontrons ce résultat d'A.Connes et E.J.Woods [3] par une méthode proposée par J.P.Thouvenot d'après une idée de Y.Katznelson.

Voici les résultats préliminaires nécessaires à cette démonstration.

<u>Proposition 1</u>: Pour tout $\beta > 0$, il existe un réel $M(\beta)$ tel que pour toute fonction positive f d'intégrale 1, il existe une fonction $\widetilde{f}$ positive intégrable telle que

$$\|f-\widetilde{f}\|_1 < \beta \text{ , et } H(\widetilde{P}) \leqslant M(\beta)$$

où $\widetilde{P}$ désigne la partition des ensembles F_λ avec

$$F_\lambda = \{x \in X, \widetilde{f}(x) = \lambda\} \text{ , } \lambda \in R^+.$$

<u>Remarque</u>: Si f est bornée, $\widetilde{f}$ peut être choisie étagée.

<u>Démonstration</u>: Soient $\beta > 0$ et $f \in L^1_+(X,\mu) \int f d\mu = 1$.

Posons $E_n = \{x, \beta(n-1) \leqslant f(x) < \beta n\}$, $a_n = \mu(E_n)$, $n \in N$

Comme $\bigcup_n E_n = X$, $\sum_n a_n = 1$,

Posons $\widetilde{f} = \sum_{n=1}^{\infty} \beta n \chi_{E_n}$ ($\widetilde{f}$ est étagée si f est bornée)

$\widetilde{f}$ est strictement positive , $f \leqslant \widetilde{f}$ et $\|f-\widetilde{f}\|_1 = \int(\widetilde{f}-f)d\mu \leqslant \beta$.

Aussi $\int \widetilde{f} d\mu = \sum_n n a_n = \frac{\theta}{\beta}$ avec $\theta \in [1, 1+\beta]$

Cherchons à majorer $H(\widetilde{P})=-\sum_n a_n \text{Log } a_n$ sous les conditions (A):

$$\sum_n a_n=1 \text{ et } \sum_n na_n=\frac{\theta}{\beta},$$

le maximum de $H(\widetilde{P})$ est atteint au point (c_n) si:

$$c_n=ce^{-Kn} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \text{avec } K=\text{Log }(1+\beta/\theta) \quad c=\frac{1}{1+\theta/\beta}$$

En effet comme la fonction $x \to -x \text{ Log } x$ est convexe, si $\widetilde{P}$ est la partition de répartition (a_n) et $\widetilde{Q}$ est celle de répartition (c_n), (a_n) et (c_n) vérifiant (A), alors

$$H(\widetilde{P}) \leqslant H(\widetilde{Q})+\sum_n (a_n-c_n).[-(\text{Log } c_n+1)]$$

Or $-(\text{Log } c_n+1)= \text{Log }(1+\theta/_\beta)-1- \text{Log }(1+\beta/_\theta)n$

et $\sum_n a_n=\sum_n c_n$ et $\sum_n na_n=\sum_n nc_n$

donc $\sum_n (a_n-c_n).[-(\text{Log } c_n+1)]=0$ et $H(\widetilde{P}) \leqslant H(\widetilde{Q})$

le maximum de $H(\widetilde{P})$ sous les conditions (A) est

$$H(\widetilde{Q})=\text{Log }(1+\theta/_\beta)+\theta/_\beta \text{ Log }(1+\beta/_\theta)$$

il suffit de prendre $M(\beta)=\dfrac{(1+\beta)^2}{\beta}$

<u>Corollaire 1</u>: Pour tout $\beta > 0$ il existe un réel $M(\beta)$ tel que pour toute fonction f positive d'intégrale 1, il existe $\widetilde{f}$ positive intégrable, telle que $\|f-\widetilde{f}\|_1 < \beta$.

Supp $\widetilde{f}$=Supp f=A

$H(\widetilde{P}/_A) \leqslant M(\beta)$

où $H(\widetilde{P}/_A)$ est l'entropie de la trace de $\widetilde{P}$ sur A.

<u>Démonstration</u>: On applique la proposition à la restriction f_A de f à A muni de la mesure $\nu=\mu(A)^{-1}\chi_A\mu$. Soit $\widetilde{f}=\widetilde{f}_A\chi_A$ alors

$$\|f-\widetilde{f}\|_1 \leqslant \beta \quad , \quad H(\widetilde{P}_A)=H(\widetilde{P}/_A)$$

$\widetilde{f}_A$ est strictement positive donc supp $\widetilde{f}$=A.

<u>Corollaire 2</u>: Si U_T possède la propriété d'approximation convexe, pour tout $h > 0$, on peut choisir f vérifiant la propriété et telle que l'entropie de la partition P associée à f soit moindre que h.

<u>Démonstration</u>: Soit g vérifiant la propriété pour $\frac{\varepsilon}{2}$, $f_1,\dots,f_k$ et telle que $\mu(A) \leqslant \alpha < 1$.
D'après la proposition il existe une fonction positive intégrale $\tilde{g}$ telle que $\|g-\tilde{g}\|_1 \leqslant \beta$, $g \leqslant \tilde{g}$, Supp $\tilde{g}$=A et $H(\tilde{P}/_A) \leqslant M(\beta)$.
Posons $f=(\int\tilde{g}d\mu)^{-1}\tilde{g}$,
alors $\|g-f\|_1 \leqslant 2\beta$ car $\int\tilde{g}d\mu \in [1,1+\beta]$ (voir la démonstration de la proposition).
Supp f=A et $H(P/_A) \leqslant M(\beta)$ car f est homothétique de $\tilde{g}$ ($P=\tilde{P}$ est la partition associée à f ou $\tilde{g}$).
Posons $\beta=\frac{\varepsilon}{4}$, alors f vérifie la propriété d'approximation convexe pour $\varepsilon,f_1,\dots,f_k$.
De plus $H(P)=H(P/_A)\mu(A)+H(\{A,{}^cA\})$ car P est plus fine que la partition $\{A,{}^cA\}$, on a donc
$H(P)= \leqslant M(\frac{\varepsilon}{4})\alpha- \alpha\text{Log } \alpha-(1-\alpha) \text{ Log } (1-\alpha)$.
Ainsi pour un choix convenable de α, f vérifie la propriété pour $\varepsilon,f_1,\dots,f_k$ et $H(P) \leqslant h$.

<u>Remarque</u>: Comme on a pu choisir g étagée donc bornée, f est étagée.

<u>Proposition 2</u>: Soient P une partition $(B_1,B_2,\dots B_n)$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$,f une fonction positive étagée sur la partition Q telle que pour tout $j=1,\dots,n$, il existe des nombres $\alpha_{j,k}$ positifs $k=1,\dots,k_j$ vérifiant $\sum_k \alpha_{j,k}=1$ et

$$\left\| \frac{1}{\mu(B_j)} \chi_{B_j} - \sum_{k=1}^{k_j} \alpha_{j,k} U_T^k \right\|_1 \leqslant \varepsilon.$$

Alors il existe une partition $P=(B_1,B_2,\dots,B_n)$ moins fine que $Q_T=\bigvee_1^\infty T^{-k}Q$ telle que $|P-\hat{P}|=\sum_{j=1}^n \mu(B_j \,\Delta\, \hat{B}_j) \leqslant 2(n+1)\varepsilon$.

<u>Démonstration</u>: Notons $C(Q_T)$ le clan engendré par Q_T. Une partition formée d'éléments de $C(Q_T)$ est moins fine que Q_T.

Soit $A_j = \left\{ x \in X \ , \ \left| \sum_k \alpha_{j,k} U_T^k f(x) - \frac{1}{\mu(B_j)} \right| \leq \frac{1}{2\mu(B_j)} \right\}$

$A_j \in C(Q_T)$ car f est étagée.

Comme $\left\| \left(\frac{1}{\mu(B_j)} - \sum_k \alpha_{j,k} U_T^k f \right) \chi_{B_j \cap {}^c A_j} \right\|_1 \leq \varepsilon$,

$\mu(B_j \cap {}^c A_j) \leq 2\varepsilon\mu(B_j)$; de même $\left\| \sum \alpha_{j,k} U_T^k f \chi_{{}^c B_j \cap A_j} \right\|_1 \leq \varepsilon$

entraîne $\mu({}^c B_j \cap A_j) \leq 2\varepsilon\mu(B_j)$

donc $\mu(B_j \,\Delta\, A_j) \leq 4\varepsilon\mu(B_j)$.

Posons $\hat{B}_1 = A_1$, $\hat{B}_2 = {}^c A_1 \cup A_2, \ldots, \hat{B}_n = {}^c(A_1 \cup \ldots A_{n-1}) \cap A_n$

$$\mu(B_1 \,\Delta\, \hat{B}_1) \leq 4\varepsilon\mu(B_1)$$

$$\mu(B_j \,\Delta\, \hat{B}_j) \leq \mu(B_j \,\Delta\, A_j) + \mu(B_j \cap \bigcup_{p=1}^{j-1} A_p)$$

$$\mu(B_j \,\Delta\, \hat{B}_j) \leq 4\varepsilon\mu(B_j) + 2\varepsilon \sum_{p=1}^{j-1} \mu(B_p) \qquad \text{pour } j=1,\ldots,n$$

car $\mu(B_j \cap \bigcup_{p=1}^{j-1} A_p) \leq \sum_{p=1}^{j-1} \mu(B_j \cap B_p) + \sum_{p=1}^{j-1} \mu({}^c B_p \cap A_p)$

donc si $\hat{P} = (\hat{B}_1, \ldots, \hat{B}_n)$, $\hat{P}$ est moins fine que Q_T et

$$|P - \hat{P}| \leq 4\varepsilon \sum_{p=1}^{n} \mu(B_j) + 2\varepsilon \sum_{p=1}^{n} (p-1)\mu(B_j) \leq 2(n+1)\varepsilon.$$

<u>Démonstration du Théorème</u>: Soit P une partition finie de X et n le nombre de ses atomes. Montrons que $H(T,P)=0$.

Soit h un réel positif que nous prendrons arbitrairement petit et nous montrerons que $H(T,P) \leq h$.

U_T possède la propriété d'approximation convexe donc d'après le corollaire 2 de la proposition 1, il existe f vérifiant la propriété pour ε et la partition P et telle que $H(Q) \leqslant \frac{h}{2}$, si Q est la partition associée à f (que l'on choisit étagée), et par conséquent $H(T,Q_T) \leqslant H(Q) \leqslant \frac{h}{2}$.

D'autre part, on sait que si P_1 et P_2 sont deux partitions de n atomes, il existe $\delta > 0$ tel que

$$|P_1-P_2| \leqslant \delta \quad \text{implique} \quad |H(T,P_1)-H(T,P_2)| \leqslant \frac{h}{2} \quad [9]$$

Or d'après la proposition 2, on peut approcher P par une partition $\hat{P}$ moins fine que Q_T à moins de $2(n+1)\varepsilon$; choisissons donc $\varepsilon = \frac{\delta}{2(n+1)}$, alors $H(T,P) \leqslant H(T,\hat{P}) + \frac{h}{2} \leqslant H(T,Q) + \frac{h}{2} \leqslant h$.

III. LE SHIFT SUR LE FACTEUR HYPERFINI DE TYPE II_1 NE POSSEDE PAS LA PROPRIETE D'APPROXIMATION CONVEXE

On appelle θ le shift c'est-à-dire l'automorphisme correspondant à la translation de 1 sur le facteur hyperfini de type II_1 construit comme produit tensoriel infini : $(R,\varphi)= \bigotimes_{p\in\mathbb{Z}} (F,\tau)$ où F est l'algèbre des matrices nxn et τ la trace normalisée sur F (voir exemple a de la 1ère partie III.2).

A.Connes et E.Størmer ont défini une entropie pour les automorphismes des algèbres de Von Neumann de type II_1 [1]. Alors l'entropie de θ est log n, θ est ergodique et nous allons montrer que θ ne possède pas la propriété d'approximation convexe en nous ramenant au shift de Bernoulli U_T sur $\{x_1,\dots,x_n\}$ de répartition $(\frac{1}{n},\dots,\frac{1}{n})$.

<u>Définition</u>: Soient $Y=\{a_1,\dots,a_n\}$ et ν la probabilité sur Y

$\nu(a_j)=\frac{1}{n} \quad \forall\, j=1,\dots,n.$

On pose $X= \prod_{-\infty}^{+\infty} Y_k$ avec $Y_k=Y$

et μ la probabilité produit sur X.

T est la transformation préservant la mesure définie par

$T[(x_k)]=(x'_k)$ avec $x'_k=x_{k+1}$

U_T est l'automorphisme de $L^\infty(X,\mu)$ associée à T [9].

<u>Définition</u>: Soit R le facteur hyperfini de type II_1 , $R= \bigotimes_{p\in\mathbb{Z}} (F,\tau)$.

On appelle algèbre des éléments diagonaux, que l'on notera D, l'algèbre de Von Neumann engendrée par

$\{e^p_{ii}\ ,\ p\in\mathbb{Z}\ ,\ 1\leqslant i\leqslant n\}$ si e^p_{ij} est une unité matricielle de F au rang p dans le produit tensoriel.

<u>Lemme</u>: Avec les notations précédentes la restriction du shift à l'algèbre des éléments diagonaux D est le shift de Bernoulli U_T.

Démonstration: D est engendrée par les projecteurs $\{e_{ii}^{p}\ ,\ p \in Z\ ,\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$

$L^{\infty}(X,\mu)$ est l'algèbre de Von Neumann engendrée par les projecteurs $\chi_{a_i^p}$

où $a_i^p = \ldots Y\times\ldots Y\times\{a_i\}\times Y\ldots\times Y\ldots$ avec $\{a_i\}$ au rang p.

Alors l'application $\alpha D \to L^{\infty}(X,\mu)$ définie par $\alpha(e_{ii}^p)=\chi_{a_i}^p$ se prolonge en un isomorphisme des algèbres de Von Neumann D et $L^{\infty}(X,\mu)$ tel que si $x \in D$ $\varphi(x)=\mu(\alpha(x))$ puisque $\varphi(e_{ii}^p)=\mu(\{a_i^p\})=\frac{1}{n}$.

La restriction du shift θ à D est alors exactement $\alpha^{-1}U_T\alpha$, où U_T est le shift de Bernoulli.

Proposition: Le shift θ sur le facteur hyperfini de type $II_1 R$ ne possède pas la propriété d'approximation convexe.

Démonstration: Nous allons montrer que si θ possède la propriété d'approximation convexe, alors la restriction de θ à D, U_T la possède également, ce qui nous met en contradiction avec le Théorème II.2.

Soient $f_1,\ldots,f_k$ des états normaux sur D, on peut relever $f_1,\ldots f_k$ en des états sur R. En effet, d'après le Théorème 8 [5], nous avons le résultat suivant dans ce cas particulier :

Soit $D^{\perp}=\{A \in M \mid \varphi(AB)=0\ ,\ B \in D\}$

1) La somme $D\dot{+}D^{\perp}$ est directe et égale à R. Soit $A \to P(A)$ le projecteur de R sur D correspondant.
2) Pour $A \in M$ $\|P(A)\| \leqslant \|A\|$
3) Pour $A \in M$ $P(A^*)=P(A)^*$
4) Si $A \geqslant 0$, $P(A) \geqslant 0$.
5) L'application P est ultra-faiblement continue.

Il suffit de poser $g_j=f_j\circ P$ $\forall\, j=1,\ldots,k$

g_j est une forme linéaire (1) positive (4) ultra-faiblement continue (5) définie sur R et telle que $g_j(1)=1$ (1), g_j est un état normal de R. Aussi soit $\varepsilon > 0$, il existe g un état normal de R tel que $\forall\, j=1,\ldots,k$

$$g_j \overset{\varepsilon}{\in} \text{Conv}\,(g,\theta)$$

si f est la restriction de g à D , alors

$$\forall\ j=1,\ldots,k \qquad f_j \overset{\varepsilon}{\in} \text{Conv}\,(f,\theta)$$

et U_T possède la propriété d'approximation convexe.

Or, comme U_T a pour entropie Log n , U_T ne possède pas la propriété d'approximation convexe (Théorème II.2), donc θ non plus.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A.CONNES-E.STØRMER Entropy for automorphisms of II_1 Von Neumann Algebras (Acta Mathematica Vol. 134, 1975).

[2] A.CONNES-E.J.WOODS Existence de facteurs infinis asymptotiquement abéliens (Note présentée par M. L.Schwartz). C.R. Acad. Sc. t. 279-A (1974) p.189.

[3] A.CONNES-E.J.WOODS A paraître.

[4] J.DIXMIER Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien (Cahiers Scientifiques XXV).

[5] J.DIXMIER Formes linéaires sur un anneau d'opérateurs (Bulletin de la SMF 81 (1953) p. 9-39).

[6] H.FURSTENBERG Ergodic behavior of diagonal measures and a theorem of Szemeredi on arithmetic progressions (J analyse Math 31 (1977) p.204-256).

[7] E.C.LANCE Ergodic theorems for convex sets and operator algebras (Inventiones math. 37 (1976) p.201-214).

[8] MURRAY et VON NEUMANN On rings of operators IV (Annals of mathematics 2e serie T. 44 (1943).

[9] P.C.SHIELDS The theory of Bernoulli shifts (University of Chicago Press).

[10] E.STØRMER Automorphisms and invariant states of operator algebras (Acta mathematica Vol. 127 (1971).

[11] J.P.THOUVENOT La démonstration de Furstengerg du théorème de Szemeredi sur les progressions arithmétiques (Séminaire Bourbaki n° 5/8 (1977/78).

[12] P.WALTERS Ergodic theory. Introductory Lectures (Lectures notes n° 458).