Couples assortis de groupes localement compacts, exemples.
(travail en commun avec S. Baaj)

Georges Skandalis

Université Paris-Diderot
Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche

Journée Marie-Claude David
Orsay, 4 février 2019

Sommaire

1. Groupes quantiques localement compacts
1.1 Objet dual d'un groupe

Dualité de Pontrjagyn

Soit G un groupe localement compact *commutatif*.
L'algèbre de convolution sur G est l'algèbre de fonctions sur le groupe dual $\widehat{G}$.

Le groupe dual $\widehat{G}$:
groupe des caractères, *i.e.* morphismes $G \to \mathbb{U}(1)$. C'est un groupe localement compact.

1.1 Objet dual d'un groupe non commutatif

Si G n'est pas commutatif, son espace dual va être un espace localement compact non commutatif : une C^*-algèbre.

Théorème (Gel'fand)

Toute C^*-algèbre commutative est *égale à* un $C_0(X)$ où X est un espace topologique localement compact.

Si G n'est pas commutatif, $\widehat{G}$ n'est pas un espace ordinaire...
Les ≪ fonctions continues ≫ sur $\widehat{G}$ forment une C^*-algèbre non commutative : $C^*(G)$.

Definition

L'objet dual d'un groupe non commutatif G est (une bonne complétion de) l'algèbre de convolution des fonctions sur G : sa C^*-algèbre $C^*(G)$.

Remarque. En fait, plusieurs choix : $C^*(G)$, $C_r^*(G)$, algèbre de von Neumann LG de G.

1.2 Groupe *quantique* localement compact ?

Objets généralisant à la fois les groupes et les duaux de groupes.

Deux réponses équivalentes :

Jones, . . . , MCD : Inclusions irréductibles de profondeur 2 !

Kac, Vainerman, Enock-Schwarz, Kustermans-Vaes.

- C^*-algèbre A (espace localement compact).
- Le produit est donné par une structure de « cogèbre » : application - coassociative $\delta : A \to A \otimes A$. Si G groupe localement compact et $A = C_0(G)$, $\delta(f)(x, y) = f(xy)$.
- Compatibilité $\delta : A \to A \otimes A$ morphisme d'algèbres. compatible.
- Élément neutre, inverse, mesure de Haar...

Unitaire fondamental.

Positivité de la mesure de Haar h : A « devient » un espace de Hilbert $H = L^2(A, h)$.

Invariance de h : L'opérateur $V(x \otimes y) = \delta(x)(1 \otimes y)$ est unitaire.

Co-associativité de δ : $V_{12}V_{13}V_{23} = V_{23}V_{12}$ (agissant sur $H \otimes H \otimes H$).

1.3 Unitaires multiplicatifs (Baaj-S)

Remarque

L'unitaire fondamental V permet de retrouver (A, δ).

A est l'adhérence de $\{(\omega \otimes \mathrm{id})(V);\ \omega \in \mathcal{L}(H)_*\}$ et $\delta(x) = V(x \otimes 1)V^*$.

Définition

Un *unitaire multiplicatif* est un unitaire $V \in \mathcal{L}(H \otimes H)$ tel que $V_{12}V_{13}V_{23} = V_{23}V_{12}$.

Si V est un unitaire multiplicatif, on a deux algèbres
$A =$ adhérence de $\{(\omega \otimes \mathrm{id})(V);\ \omega \in \mathcal{L}(H)_*\}$ et
$\widehat{A} =$ adhérence de $\{(\mathrm{id} \otimes \omega)(V);\ \omega \in \mathcal{L}(H)_*\}$.

Co-produit $\delta(x) = V(x \otimes 1)V^*$ et $\hat{\delta}(\hat{x}) = V^*(1 \otimes \hat{x})V$.

Unitaires multiplicatifs $\leftrightarrow$ groupes quantiques ?

Soit $V \in \mathcal{L}(H \otimes H)$ est un unitaire multiplicatif : $V_{12}V_{13}V_{23} = V_{23}V_{12}$.

Questions.

1. $A, \widehat{A}$ C^*-algèbres ?
2. Peut-on les qualifier de « groupes quantiques » ?

Théorème

Si A est commutative ($V_{13}V_{23} = V_{23}V_{13}$), alors V est l'unitaire multiplicatif d'un groupe.

OK aussi si $\dim(H) < \infty$.

On doit ajouter des conditions plus « analytiques »...

Baaj-S : Régularité. Bonne dualité C^*.

Woronowicz : Manageable. A priori + général. Bonne dualité von Neumann. Retrouvé dans la théorie de Kustermans-Vaes.

2. Couples assortis. 2.1 Transformations pentagonales

Bijection bi-mesurable $v : X \times X \to X \times X$ où (X, μ) espace de Lebesgue avec $v_{23} \circ v_{13} \circ v_{12} = v_{12} \circ v_{23}$.

Alors $V : \xi \mapsto D^{1/2} \times \xi \circ v$ unitaire multiplicatif (D dérivée de Radon-Nikodym).

Exemple : Couple assorti : deux groupes (Magid).

Soit G un groupe localement compacts et G_0, G_1 deux sous-groupes fermés tels que l'application $G_0 \times G_1 \to G$ donnée par $(x_0, x_1) \mapsto x_0 x_1$ soit une transformation bimesurable.
On écrit $x = p_0(x)p_1(x)$.
On obtient une transformation pentagone en posant

$$v(x, y) = (x p_0(p_1(x)^{-1} y), p_1(x)^{-1} y).$$

Théorème (Baaj-S)

Avec suffisamment de régularité, c'est essentiellement le seul exemple.

2.2 Couples assortis d'unitaires multiplicatifs

Généralisation. Couples assortis d'unitaires multiplicatifs : X, Y et $\tau : A \otimes B \to B \otimes A$ qui les « tord ».

Cas des groupes $\tau(x_1, x_0) = (p_0(x_1x_0), p_1(x_1x_0))$.
Action à droite de G_0 sur $G_1 \simeq G_0 \backslash G$ et action à gauche de G_1 sur $G_0 \simeq G/G_1$.

M-C David : *Couple assorti de systèmes de Kac et inclusions de facteurs de type II_1* (JFA-1998).

Le point de vue : un groupe n'est compris que lorsqu'on le voit agir ! !

Inclusion irréductible de profondeur 2 de facteurs (von Neumann). $\leftrightarrow$ produit croisé $K \subset K \rtimes C$, C groupe quantique.
On suppose que C est un produit tordu de A et B.
On obtient des facteurs intermédiaires $M = K \rtimes A$ et $N = K \rtimes B$.
Alors le biproduit croisé correspond aux inclusions $K^A \in N$ et $K^B \subset M$.

Théorème

MCD Conditions sur K, A, B, L et construction du reste $(\tau, G \ldots)$.

2.3 Exemples de couples assortis de groupes

- G_0 groupe fini. $G = \mathfrak{S}(G_0)$ et $G_1 = \mathfrak{S}(G_0 \setminus \{e\})$.

- $G = GL_n(\mathbb{R})$ et $G_0 = O(n)$, (ou $G = GL_n(\mathbb{C})$ et $G_0 = U(n)$))
  $G_1 = AN$ (matrices triangulaires supérieures avec coefficients diagonaux réels positifs).

- $G_0 = L$ et $G_1 = U$. Alors $G_0 G_1$ est un ouvert dense co-négligeable

- $G = ax + b$. $G_0 = ax = \{g \in G;\ g(0) = 0\}$,
  $G_1 = a(x-1) + 1 = \{g \in G;\ g(1) = 1\}$.

- Baaj-S-Vaes A anneau localement compact ;
  $A^{-1} = \{(x, y) \in A \times A;\ xy = 1\}$ groupe localement compact.
  Posons $G = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; a \in A^{-1},\ b \in A\}$. Posons
  $G_1 = \{g \in G,\ g(1) = 1\}$. On a $G_1 \cap G_0 = \{e\}$.
  Pour A bien choisi, A^{-1} n'est pas ouvert, mais conégligeable dans A.

Transformation pentagonale très irrégulière

Issu de l'exemple $ax + b$:
$v(x,y) = (xy + x + y, \dfrac{x+1}{x} y)$ bi mesurable sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
Ici A et $\widehat{A}$ sont des C^*-algèbres - et on a un groupe quantique.

Difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$. Ici, rien ne va plus... (on peut aussi prendre $\mathbb{Q}_+^*$...).

Fin Merci !

Profite bien de ta retraite Marie-Claude !