

## ARBRES DE GALTON-WATSON CRITIQUES

**mots-clés** : arbres de Galton-Watson, arbres biaisés, martingales, lois conditionnelles.

L'objectif de ce texte est de modéliser une population d'individus, dont les tailles des générations sont aléatoires, mais en moyenne de taille constante au fil des générations :

nombre moyen d'individus au temps 0 = nombre moyen d'individus au temps 1,  
 = nombre moyen d'individus au temps 2,  
 =  $\dots$ .

Plus précisément, on utilisera le classique *modèle de Galton-Watson*. Soit  $\xi$  une variable aléatoire à valeurs dans l'ensemble des entiers naturels  $\mathbb{N}$ , de loi notée  $\mu$ , intégrable et de moyenne  $\mathbb{E}[\xi] = \sum_{k=0}^{\infty} k \mu(k) = 1$ . On suppose que  $\xi$  n'est pas la variable aléatoire constante égale à 1 :  $\mu(1) < 1$ . On note alors  $(\xi_{n,k})_{n \geq 0, k \geq 1}$  une famille de copies indépendantes de la variable  $\xi$ , et on définit par récurrence

$$Y_0 = M \in \mathbb{N}^* \quad ; \quad Y_{n+1} = \sum_{k=1}^{Y_n} \xi_{n,k}.$$

La suite des variables aléatoires  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  décrit une population dont chaque individu  $k$  de la génération  $n$  a  $\xi_{n,k}$  enfants, indépendamment des autres individus de la même génération  $n$ , ou issus des générations précédentes  $n-1, n-2, \dots$ . Autrement dit,  $Y_n$  est le nombre d'individus au niveau  $n$  dans la forêt (union disjointe d'arbres enracinés) constituée de  $Y_0 = M$  arbres, et telle que chaque noeud ait un nombre aléatoire de fils, ce nombre suivant la loi  $\mu$  et étant indépendant des autres noeuds, voir la figure ci-dessous.

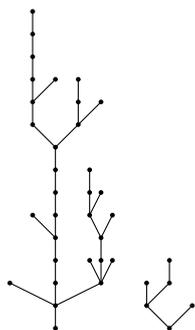


FIGURE 1. Arbre de Galton-Watson, avec  $\xi \sim \mathcal{P}(1)$ , et  $M = 2$ .

Comme  $\mathbb{E}[\xi] = 1$ , la suite  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une martingale positive, et en particulier,  $\mathbb{E}[Y_n] = \mathbb{E}[Y_0] = M$  pour tout  $n$ , donc le nombre moyen d'individus à chaque génération est bien une constante.

## 1. EXTINCTION DE LA POPULATION

La suite de variables aléatoires  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est aussi une chaîne de Markov d'espace d'états  $\mathbb{N}$ , avec pour unique état absorbant 0. Comme c'est une martingale positive, elle converge presque sûrement, et sa limite presque sûre est 0 :

**Proposition 1.** *On a*

$$\mathbb{P}\left[\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = 0\right] = 1.$$

Ainsi, pour une population avec nombre moyen constant d'individus, on a extinction presque sûre, sauf dans le cas trivial où  $\xi$  est la constante 1. L'objectif de ce texte est de comprendre à quel moment a lieu cette extinction, et si l'extinction n'a pas encore eu lieu, de comprendre le comportement de  $Y_n$  sous cette hypothèse. Dans tout ce qui suit, on supposera  $\xi$  de carré intégrable, et on notera  $\sigma^2 = \text{var}(\xi)$  sa variance.

La première question peut être traitée par des moyens élémentaires, en introduisant la fonction génératrice de  $\xi$

$$G(s) = \mathbb{E}[s^\xi] = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(k) s^k.$$

On montre par récurrence que  $\mathbb{E}[s^{Y_n}] = (G^{on}(s))^M$ , où  $G^{on} = G \circ G \circ \dots \circ G$  est la composée de  $G$  avec elle-même  $n$  fois. En particulier,  $\mathbb{P}[Y_n = 0] = (G^{on}(0))^M$ . Or, la suite  $(x_n = G^{on}(0))_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers 1, et comme  $G(1 - \varepsilon) = 1 - \varepsilon + \frac{\sigma^2 \varepsilon^2}{2} + o(\varepsilon^2)$ , en étudiant la suite auxiliaire  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par

$$y_n = \frac{1}{1 - x_{n+1}} - \frac{1}{1 - x_n} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma^2}{2},$$

on montre que :

**Théorème 2** (Kolmogorov). *Si  $\xi$  est de carré intégrable, alors*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \mathbb{P}[Y_n > 0] = \frac{2M}{\sigma^2}.$$

Dans les paragraphes suivants, on va tenter d'étudier la loi de  $Y_n$  conditionnellement à l'événement  $A_n = \{Y_n > 0\}$ .

## 2. CONSTRUCTION CANONIQUE DE L'ESPACE DE PROBABILITÉ

Dans ce paragraphe, on précise la construction d'un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  qui permet de manipuler proprement les variables  $Y_n$  et  $\xi_{n,k}$  précédemment introduites, ainsi que les événements définis à partir de ces variables. Il suffit de traiter le cas où  $M = 1$  : en effet, les générations dans des arbres disjoints sont des variables indépendantes, donc on a

$$(\text{loi de } Y_n \text{ sachant } Y_0 = M) = (\text{loi de } Y_n \text{ sachant } Y_0 = 1)^{*M},$$

où  $*M$  désigne la convolée  $M$ -ième (loi de la somme de  $M$  copies indépendantes). Ainsi, dans tout ce qui suit, on supposera  $Y_0 = 1$  presque sûrement.

Un *arbre planaire (ordonné)*  $\mathcal{A}$  est un arbre éventuellement infini, avec une racine distinguée au niveau 0, et tel que chaque noeud de profondeur (distance à la racine)  $n$  ait un nombre fini de fils, qui sont ordonnés de gauche à droite ; voir Figure 2.

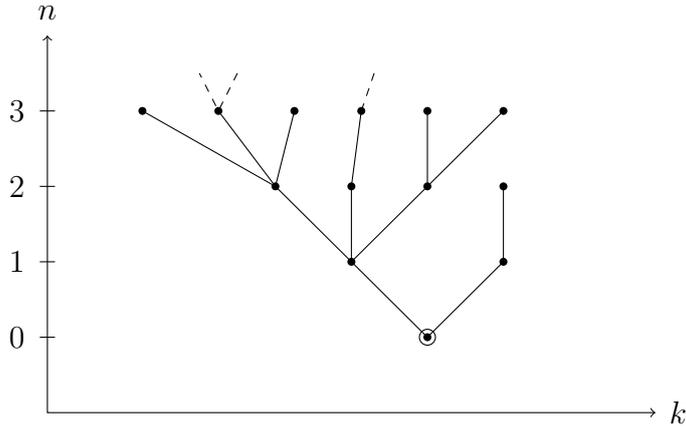


FIGURE 2. Un arbre planaire ordonné  $\mathcal{A}$ .

Si  $\xi_{n,k}$  est le nombre de fils du  $k$ -ième noeud de profondeur  $n$  en lisant les noeuds de même profondeur de gauche à droite, alors l'arbre  $\mathcal{A}$  est entièrement décrit par la donnée de la famille d'entiers  $(\xi_{n,k})_{n \geq 0, k \geq 1}$ , qui doivent vérifier la condition

$$\text{si } Y_n = \sum_{k=1}^{Y_{n-1}} \xi_{n-1,k}, \quad \text{alors } \xi_{n,k} = 0 \text{ pour tout } k > Y_n,$$

avec  $Y_0 = 1$ . Compte tenu de cette description, l'ensemble  $\Omega$  de tous les arbres planaires ordonnés n'est pas dénombrable, car son sous-ensemble constitué des arbres infinis se surjecte sur  $(\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}}$ . Il n'est donc pas raisonnable de prendre pour tribu  $\mathcal{F}$  l'ensemble de toutes les parties  $\mathfrak{P}(\Omega)$ .

On note  $\Omega_n$  le sous-ensemble de  $\Omega$  constitué des arbres qui n'ont pas de noeud de profondeur strictement supérieure à  $n$ . Chaque ensemble  $\Omega_n$  est dénombrable, et muni de la tribu  $\mathfrak{P}(\Omega_n)$ . Pour tout  $n$ , on a une application naturelle  $\pi_n : \Omega \rightarrow \Omega_n$ , la troncation au niveau  $n$ , qui coupe un arbre en retirant tous ses noeuds de profondeur strictement plus grande que  $n$ . Par exemple, si  $\mathcal{A}$  est l'arbre planaire de la Figure 2, alors  $\pi_2(\mathcal{A})$  est l'arbre tronqué de la Figure 3.

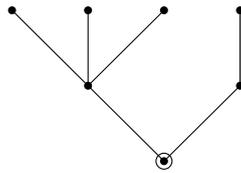


FIGURE 3. Troncation d'un arbre, ici au niveau  $n = 2$ .

On note  $\mathcal{F}_n = (\pi_n)^{-1}(\mathfrak{P}(\Omega_n))$ , et  $\mathcal{F} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n$ . Alors,  $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une filtration (suite croissante de sous-tribus) de l'espace mesurable  $(\Omega, \mathcal{F})$ , et d'autre part,  $\mathcal{F}$  est la plus petite tribu sur  $\Omega$  qui rende mesurable les applications  $\xi_{n,k}$ .

**Théorème 3.** *Il existe une unique mesure de probabilité  $\mathbb{G}\mathbb{W}$  sur l'espace mesurable  $(\Omega, \mathcal{F})$ , telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la loi du vecteur  $(\xi_{n,k})_{k \geq 1}$  conditionnellement à la tribu  $\mathcal{F}_n$  est la loi d'un vecteur de  $Y_n$  copies indépendantes de  $\xi$ , les coordonnées  $k > Y_n$  du*

vecteur étant nulles. Sous cette mesure de probabilité, la suite  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une martingale par rapport à la filtration  $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

### 3. ARBRES DE GALTON-WATSON MARQUÉS ET BIAISÉS

On souhaite maintenant modifier la mesure  $\mathbb{GW}$ , pour s'assurer que l'on reste dans l'événement de non-extinction à tout temps  $n$ . Pour ce faire, il est utile d'élargir l'espace de probabilité  $\Omega$ . On appelle *arbre planaire marqué* un arbre planaire orienté  $\mathcal{A}$  qui est infini, et sur lequel on distingue un chemin  $\mathcal{P} = (p_0, p_1, p_2, \dots)$  allant de la racine  $p_0$  à l'infini ; chaque  $p_i$  est l'un des fils de  $p_{i-1}$ , cf. Figure 4.

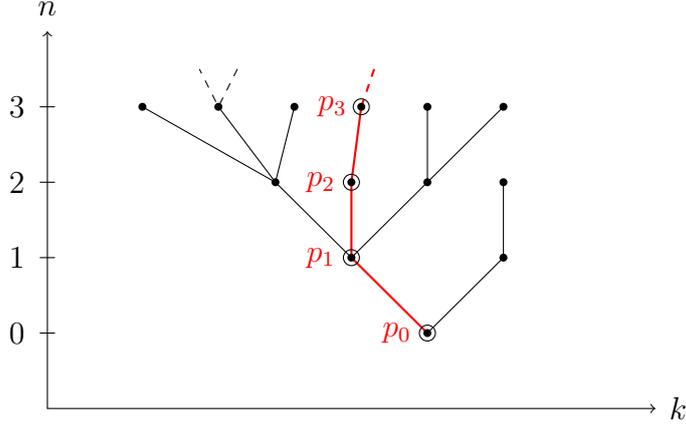


FIGURE 4. Un arbre planaire marqué  $(\mathcal{A}, \mathcal{P})$ .

On note  $\Omega^+$  l'ensemble des arbres planaires marqués, et  $\Omega_n^+$  l'ensemble des arbres planaires de profondeur maximale exactement égale à  $n$ , et muni d'un chemin  $(p_0, p_1, \dots, p_n)$  reliant la racine à un noeud de profondeur  $n$ . Notons qu'un tel chemin est en fait entièrement déterminé par le dernier sommet  $p_n$  (feuille de l'arbre), qui peut être encodé par un entier  $k \geq 1$  (le numéro de l'individu de  $n$ -ième génération par lequel passe le chemin, les individus étant numérotés de gauche à droite). Comme précédemment, on a une application de troncation  $\pi_n^+ : \Omega^+ \rightarrow \Omega_n^+$ , qui permet de définir une filtration  $\mathcal{F}_n^+ = (\pi_n^+)^{-1}(\mathfrak{P}(\Omega_n^+))$  de  $\Omega^+$ , et une tribu  $\mathcal{F}^+ = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n^+$  sur  $\Omega^+$ . C'est la plus petite tribu qui rende mesurable sur  $\Omega^+$  les applications  $\xi_{n,k}$  et  $p_n$ .

Si  $T_n$  est un arbre dans  $\Omega_n$ , on note  $[T_n]$  la partie  $\mathcal{F}_n$ -mesurable de  $\Omega$  donnée par  $[T_n] = (\pi_n)^{-1}(T_n)$ . De même, si  $(T_n, p_n)$  est un arbre avec une feuille marquée dans  $\Omega_n^+$ , on note  $[T_n, p_n]$  la partie  $\mathcal{F}_n^+$ -mesurable de  $\Omega^+$  définie par  $[T_n, p_n] = (\pi_n^+)^{-1}(T_n, p_n)$ .

**Théorème 4.** *Il existe une unique mesure de probabilité  $\mathbb{GW}^+$  sur  $(\Omega^+, \mathcal{F}^+)$  telle que, pour tout arbre avec une feuille marquée  $(T_n, p_n) \in \Omega_n^+$ ,*

$$\mathbb{GW}^+([T_n, p_n]) = \mathbb{GW}([T_n]).$$

*Esquisse de preuve.* Soit  $\mu^+$  la loi sur  $\mathbb{N}$  donnée par

$$\mu^+(k) = k \mu(k),$$

qui ne charge que les entiers  $k \geq 1$ . Un *arbre de Galton-Watson marqué et biaisé* de loi  $\mathbb{GW}^+$  est construit comme suit. À la génération 0, la racine  $p_0$  a un nombre aléatoire

d'enfants  $\xi_0^+ \geq 1$  suivant la loi  $\mu^+$ , et l'un de ces enfants est marqué aléatoirement comme  $p_1$ , avec un choix uniforme pour  $p_1$  parmi les  $\xi_0^+$  descendants de  $p_0$ . Les sommets de profondeur 1 différents de  $p_1$  ont ensuite pour descendance des arbres de Galton-Watson indépendants de loi de génération  $\mu$ , tandis qu'on recommence le même processus avec  $p_1$  :  $p_1$  a un nombre aléatoire d'enfants  $\xi_1^+ \geq 1$  suivant la loi  $\mu^+$ , parmi lesquels est marqué un sommet  $p_2$ ; *etc.* À chaque niveau  $n$ , le sommet marqué  $p_n$  a  $\xi_n^+ \sim \mu^+$  enfants, et l'un d'eux est marqué aléatoirement  $p_{n+1}$  et a pour descendance un arbre marqué de loi  $\mathbb{GW}^+$ , tandis que les autres enfants de  $p_n$  différents de  $p_{n+1}$  ont pour descendance respectives des arbres non marqués de loi  $\mathbb{GW}$ , indépendants les uns des autres.

On peut alors mener le raisonnement suivant. Soit  $(T_n, p_n) \in \Omega_n^+$ , qui a  $k \geq 1$  individus de génération 1. On note

- $(T_{n-1}, q_{n-1}) \in \Omega_{n-1}^+$  l'arbre avec feuille marquée obtenu en regardant la descendance de  $p_1$  dans  $(T_n, p_n)$ ,
- et  $U_{n-1}^{(2)}, \dots, U_{n-1}^{(k)} \in \Omega_{n-1}$  les  $k - 1$  arbres issus des autres sommets de génération 1 dans  $T_n$ .

On a par construction

$$\begin{aligned} \mathbb{GW}^+([T_n, p_n]) &= \mu^+(k) \frac{1}{k} \mathbb{GW}^+([T_{n-1}, q_{n-1}]) \prod_{j=2}^k \mathbb{GW}([U_{n-1}^{(j)}]) \\ &= \mu(k) \mathbb{GW}^+([T_{n-1}, q_{n-1}]) \prod_{j=2}^k \mathbb{GW}([U_{n-1}^{(j)}]) \end{aligned} \quad (1)$$

et il suffit alors de faire une récurrence sur  $n$ . □

Si  $T_n \in \Omega_n$ , on note  $[T_n]^+ \in \mathcal{F}_n^+$  la réunion des parties  $\mathcal{F}_n^+$ -mesurables  $[T_n, p_n]$ , où  $p_n$  est un individu de génération  $n$  dans  $T_n$ . L'intérêt de la nouvelle loi  $\mathbb{GW}^+$  d'arbres biaisés marqués provient de :

**Proposition 5.** *Soit  $A_n \in \mathcal{F}_n$  l'événement  $\{Y_n > 0\}$ , et  $B_n \in \mathcal{F}_n^+$  l'événement "le sommet marqué  $p_n$  est le plus à gauche parmi les sommets de l'arbre de génération  $n$ ". On a l'égalité de lois conditionnelles*

$$\mathbb{GW}^+([T_n]^+ | B_n) = \mathbb{GW}([T_n] | A_n)$$

pour tout  $T_n \in \Omega_n$ .

*Démonstration.* Le résultat est clair si  $T_n$  est de profondeur strictement inférieure à  $n$  (dans ce cas les deux probabilités sont nulles), donc on peut supposer  $T_n$  exactement de profondeur  $n$ . En utilisant le Théorème 4, on voit que pour tout  $k \geq 1$  :

$$\mathbb{GW}^+(Y_n = k) = k \mathbb{GW}^+(Y_n = k \text{ et } B_n) = k \mathbb{GW}(Y_n = k).$$

Par conséquent,  $\mathbb{GW}^+(B_n) = \mathbb{GW}(A_n)$ , et si  $p_n$  est le sommet de  $T_n$  de génération  $n$  qui est le plus à gauche, alors

$$\mathbb{GW}^+([T_n]^+ | B_n) = \frac{\mathbb{GW}^+([T_n, p_n])}{\mathbb{GW}^+(B_n)} = \frac{\mathbb{GW}([T_n])}{\mathbb{GW}(A_n)} = \mathbb{GW}([T_n] | A_n).$$

□

En particulier, la loi de  $Y_n$  pour un arbre de Galton-Watson conditionné à la non-extinction au temps  $n$ , est aussi la loi de  $Y_n$  sous  $\mathbb{GW}^+(\cdot | p_n$  est le sommet le plus à gauche).

#### 4. LOI LIMITE DE $Y_n$ CONDITIONNELLEMENT À $\{Y_n > 0\}$

On étudie maintenant le comportement asymptotique de  $Y_n$  sous la loi d'arbres biaisés marqués  $\mathbb{GW}^+(\cdot | B_n)$ ; d'après la discussion précédente, c'est aussi la loi de  $Y_n$  sous  $\mathbb{GW}$  prise conditionnellement à la non-extinction  $A_n$ . On a :

**Théorème 6** (Yaglom). *On a la convergence en loi vers une variable exponentielle*

$$\frac{Y_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1_{(x>0)} \frac{2}{\sigma^2} e^{-\frac{2x}{\sigma^2}} dx$$

sous  $\mathbb{GW}^+(\cdot | B_n)$ , ou sous  $\mathbb{GW}(\cdot | A_n)$ .

*Preuve partielle.* On se contentera de montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{GW}}[Y_n | Y_n > 0]}{n} = \frac{\sigma^2}{2},$$

qui est bien l'espérance de la loi limite donnée par le Théorème 6. Les arguments qui suivent peuvent être améliorés pour obtenir la convergence en loi; cf. Lyons, Pemantle et Peres, *When does a branching process grow like its mean? Conceptual proofs of  $L \log L$  criteria.*

Sous  $\mathbb{GW}^+$ , soit  $Y_{n,j}$  le nombre de descendants de génération  $n$  qui sont au-dessus du sommet  $p_j$ , mais pas au-dessus du sommet  $p_{j+1}$ ; autrement dit, ce sont les descendants des  $\xi_j^+ - 1$  enfants de  $p_j$  qui ne sont pas marqués. On a  $Y_n = 1 + \sum_{j=0}^{n-1} Y_{n,j}$ , et sous  $\mathbb{GW}^+$ ,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{GW}^+}[Y_{n,j}] = \mathbb{E}[\xi_j^+] - 1 = \sigma^2.$$

On sépare maintenant les sommets comptés par  $Y_{n,j}$  en ceux tombant à gauche de  $p_n$ , et ceux tombant à droite de  $p_n$ , qu'on compte respectivement par des variables aléatoires  $G_{n,j}$  et  $D_{n,j}$ . On a donc  $Y_{n,j} = G_{n,j} + D_{n,j}$ , et d'autre part, par symétrie,  $G_{n,j}$  et  $D_{n,j}$  ont la même loi sous  $\mathbb{GW}^+$ . En particulier,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{GW}^+}[G_{n,j}] = \mathbb{E}_{\mathbb{GW}^+}[D_{n,j}] = \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{GW}^+}[Y_{n,j}]}{2} = \frac{\sigma^2}{2}.$$

Soit  $B_{n,j}$  l'événement  $B_{n,j} = \{G_{n,j} = 0\} = \{Y_{n,j} = D_{n,j}\}$ . Notons que  $B_n = \bigcap_{j=0}^{n-1} B_{n,j}$ . Alors,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{GW}^+}[Y_n | B_n] = 1 + \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{E}_{\mathbb{GW}^+}[Y_{n,j} | B_{n,j}]. \quad (2)$$

Or, en conditionnant suivant le nombre  $\xi_j^+$  d'enfants de  $p_j$  et la position  $i$  de  $p_{j+1}$  parmi ceux-ci, on calcule :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{GW}^+}[Y_{n,j} 1_{B_{n,j}}] = \frac{\mathbb{GW}(Y_{n-j} = 0) - \mathbb{GW}(Y_{n-j-1} = 0)}{\mathbb{GW}(Y_{n-j-1} > 0)^2} \quad (3)$$

$$\mathbb{E}_{\mathbb{GW}^+}[1_{B_{n,j}}] = \frac{\mathbb{GW}(Y_{n-j} > 0)}{\mathbb{GW}(Y_{n-j-1} > 0)}. \quad (4)$$

On en déduit l'identité remarquable  $\mathbb{E}_{\mathbb{GW}^+}[Y_n | B_n] = \frac{1}{\mathbb{GW}(Y_n > 0)}$ . Le résultat est alors une conséquence immédiate du Théorème 2. Finalement,  $\mathbb{E}_{\mathbb{GW}^+}[Y_n | B_n] = \mathbb{E}_{\mathbb{GW}}[Y_n | A_n]$ .  $\square$

## QUESTIONS

Pour la rédaction des programmes, on pourra soit écrire le code en un langage de programmation (n'importe lequel), soit donner une description détaillée de l'algorithme (pseudo-code).

(1.1) Écrire un programme `GaltonWatson(n)` qui dessine les  $n$  premiers niveaux d'un arbre de Galton-Watson critique, c'est-à-dire associé à une loi de reproduction de moyenne  $\mathbb{E}[\xi] = 1$ . Indications :

— pour la programmation des arbres de Galton-Watson : un arbre planaire est une liste ordonnée des arbres planaires descendants de la racine, donc on peut tout encoder avec des listes de listes de listes de... Par exemple,  $[[], [], [[]]]$  est l'arbre planaire  $\swarrow \downarrow \nearrow$ .

— pour le dessin des arbres : un dessin d'un arbre peut être vu comme une suite de segments  $((v, w), (x, y))$  à coordonnées entières, plus une certaine largeur pour le dessin, et la position de la racine (plus petite que la largeur). Utiliser alors la structure récursive des arbres pour faire des dessins qui contiennent toujours tout l'arbre.

Quelle loi  $\mu$  est-il raisonnable de prendre pour  $\xi$ ? On pourra utiliser dans la suite une telle variable pour tous les programmes. Produire un exemple en taille  $n = 10$  qui n'est pas encore éteint à cette génération.

(1.2) Écrire un autre programme `Generations(n)` qui calcule les variables aléatoires  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  (on pourra supposer dans tout ce qui suit  $Y_0 = M = 1$  pour simplifier).

(1.3) Démontrer proprement la Proposition 1 et le Théorème 2. On justifiera en particulier les équations

$$\mathbb{E}[s^{Y_n}] = (G^{on}(s))^M \quad ; \quad \mathbb{P}[Y_n = 0] = (G^{on}(0))^M$$

ainsi que l'asymptotique des suites  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(\mathbb{P}[Y_n > 0])_{n \in \mathbb{N}}$ .

(1.4) Mettre en évidence le Théorème 2 en calculant des probabilités de survie empiriques à l'aide d'un programme `ProbaSurvie(n)`.

(2.1) Expliquer pourquoi l'ensemble des arbres planaires  $\Omega$  n'est pas dénombrable, et pourquoi les ensembles  $\Omega_n$  d'arbres tronqués sont eux dénombrables.

(2.2) Soit  $\tau$  la variable aléatoire sur  $(\Omega, \mathcal{F})$  définie par

$$\tau = \inf\{n \in \mathbb{N} \mid Y_n = 0\} \in \mathbb{N} \sqcup \{+\infty\}.$$

Montrer que  $\tau$  est un temps d'arrêt pour la filtration  $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . A-t-on le théorème d'arrêt  $\mathbb{E}[Y_\tau] = \mathbb{E}[Y_0]$ ? Expliquer pourquoi.

(3.1) Écrire un programme `GaltonWatsonPlus(n)` qui dessine les  $n$  premiers niveaux d'un arbre de Galton-Watson biaisé et marqué. On pourra prendre comme loi  $\mu$  la loi de Poisson  $\mathcal{P}(1)$  de paramètre 1. Dans ce cas, comment obtenir simplement une variable  $\xi^+$  de loi  $\mu^+$ ? Dessiner un arbre biaisé de profondeur au moins égale à 30. Écrire aussi un programme `GenerationsPlus(n)` qui calcule les variables aléatoires

$Y_{k \leq n}$  sous la loi  $\mathbb{GW}^+$ , ainsi que les positions  $P_{k \leq n} \in [1, Y_k]$  des sommets marqués à chaque génération.

(3.2) Détailler la suite d'égalités (1), et la récurrence suggérée à la fin de la preuve du Théorème 4.

(3.3) On suppose  $\mu = \mathcal{P}(1)$ . Que vaut  $G(s)$  dans ce cas ? Montrer que la fonction génératrice de  $Y_n$  sous  $\mathbb{GW}^+$  s'écrit :

$$\mathbb{GW}^+[s^{Y_n}] = \prod_{j=0}^n G^{\circ j}(s).$$

(3.4) Dans la preuve de la Proposition 5, justifier l'identité  $\mathbb{GW}^+(B_n) = \mathbb{GW}(A_n)$ .

(4.1) En utilisant la théorie des arbres biaisés marqués, expliquer comment simuler facilement à partir du programme `GenerationsPlus(n)` la variable aléatoire  $Y_n$  sous  $\mathbb{GW}(\cdot | A_n)$ . Illustrer la convergence en loi du Théorème 6 à l'aide d'un programme approprié.

(4.2) Démontrer les identités (2), (3) et (4).

(4.3) En utilisant le fait que  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une martingale sous  $\mathbb{GW}$ , et le Théorème 2, retrouver directement la formule asymptotique  $\mathbb{E}_{\mathbb{GW}}[Y_n | A_n] \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\sigma^2}$ .

(4.4) Le Théorème 6 donne la loi limite de  $\frac{Y_n}{n}$  sous  $\mathbb{GW}^+(\cdot | B_n)$ . Que peut-on imaginer comme loi limite pour  $\frac{Y_n}{n}$ , mais cette fois-ci sous  $\mathbb{GW}^+$  sans conditionnement ? On pourra remarquer que conditionner à l'événement  $B_n$  revient à ne considérer que la moitié de l'arbre de Galton-Watson biaisé qui se trouve à droite du chemin  $\mathcal{P}$ . Écrire un programme permettant de vérifier cette conjecture.