Option Probabilités - Statistiques

2. Les chaînes de Markov

1. Matrices stochastiques et chaînes associées

On fixe dans ce qui suit un ensemble $\mathcal{X}$ fini ou dénombrable, appelé espace des états.

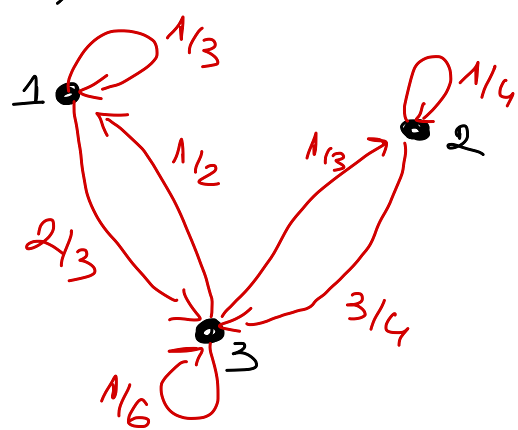
<u>Définition</u> Une matrice stochastique sur $\mathcal{X}$ est une collection $(P(x,y))_{x,y\in\mathcal{X}}$ de nombres positifs, telle que

$$\forall x \in \mathcal{X}, \quad \sum_{y\in\mathcal{X}} P(x,y) = 1.$$

Ainsi chaque ligne $P(x,\cdot)$ de la matrice P est une mesure de probabilité sur $\mathcal{X}$.

__Exemple__ $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$ est une matrice stochastique sur $\mathcal{X} = [\![1,3]\!]$.

On représente souvent une matrice stochastique P par son graphe G_P (dirigé, étiqueté) :



La somme des étiquettes des flèches partant de tout sommet $x \in \mathcal{X}$ vaut 1.

Conventions : • une mesure de probabilité π sur $\mathcal{X}$ sera représentée par un vecteur ligne $\pi = (\pi(x_1), \pi(x_2), \dots)$

• a contrario, une fonction $f : \mathcal{X} \to \mathbb{C}$ sera représentée par un vecteur colonne

$$f = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Avec ces conventions, si X est une variable aléatoire de loi π, alors $\mathbb{E}[f(X)] = \sum_{x \in \mathcal{X}} \pi(x) f(x) = \pi \times f$

produit matriciel.

Les matrices stochastiques agissent à droite des vecteurs de probabilité :

π probabilité, P stochastique $\Rightarrow \pi P$ probabilité.

<u>remarque</u> : on s'autorise des produits matriciels avec des vecteurs et matrices infinis. En général, il n'y a pas de problème car les quantités mises en jeu sont positives ou bornées.

<u>Définition</u>

$\mathcal{X}$ espace d'états

P matrice stochastique

π_0 loi sur $\mathcal{X}$.

Une chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de loi initiale π_0 et de matrice de transition P est un processus aléatoire dans $\mathcal{X}^{\mathbb{N}}$ tel que

$\forall n \geq 0$, $\forall x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathcal{X}^{n+1}$,

$$\mathbb{P}[X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n] = \pi_0(x_0) P(x_0, x_1) P(x_1, x_2) \dots P(x_{n-1}, x_n) \qquad (*)$$

Remarques / définitions équivalentes

1) L'espace $\mathcal{X}$ est muni de la tribu discrète $\mathcal{P}(\mathcal{X})$.
L'espace $\mathcal{X}^{\mathbb{N}}$ est muni de la tribu produit $\mathcal{P}(\mathcal{X})^{\otimes \mathbb{N}}$ engendrée par les cylindres

$$C(x_0, x_1, \dots, x_n) = \{x_0\} \times \{x_1\} \times \dots \times \{x_n\} \times \mathcal{X}^{[\![n+1, +\infty [\![}.$$

La formule $(*)$ détermine donc entièrement la loi d'une variable aléatoire $X_\cdot : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \longrightarrow (\mathcal{X}^{\mathbb{N}}, \mathcal{P}(\mathcal{X})^{\otimes \mathbb{N}})$.

2) Une définition équivalente à $(*)$ est : X_0 a pour loi π_0, et $\forall n$, la loi de X_{n+1} conditionnellement à $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots X_n)$ est $P(X_n, \cdot)$.

$$\mathbb{P}[X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_0 = x_0, \dots X_n = x_n] = P(x_n, x_{n+1}).$$

3) Puisque π_0 et P déterminent entièrement la loi d'une CM, on note traditionnellement $\mathbb{P}_{(\pi_0, P)}$ ou $\mathbb{P}_{\pi_0}$ la mesure de probabilité correspondante sur $\mathcal{X}^{\mathbb{N}}$.

4) Les notations matricielles permettent de calculer les lois marginales π_n des variables X_n :

$$\pi_n(y) = \mathbb{P}_{\pi_0}[X_n = y] = \sum_{x_0, x_1, \dots x_{n-1} \in \mathcal{X}} \pi_0(x_0) P(x_0, x_1) \dots P(x_{n-1}, y)$$

$$= (\pi_0 P^n)(y)$$

donc $\pi_n = \pi_0 P^n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

On en déduit : $\mathbb{E}_{\pi_0}[f(X_n)] = \pi_n f = \pi_0 \times P^n \times f$.

On a aussi : $\mathbb{E}_{\pi_0}[f(X_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n] = \sum_{y \in \mathcal{X}} P(X_n, y) f(y)$

$= (Pf)(X_n)$.

Questions :

- étant donnés $\mathcal{X}$, P, π_0, peut-on effectivement construire $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ CM de loi $\mathbb{P}_{(\pi_0, P)}$?
- y-a-t'il un moyen simple de montrer qu'un processus $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une CM (sans vérifier directement $(*)$) ?

__Théorème de représentation__ 1) Supposons donnés - X_0 de loi π_0 sur $\mathcal{X}$,

- une suite $(\xi_n)_{n\geq 1}$ de variables iid indépendantes de X_0 dans un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$

- une fonction mesurable $f : \mathcal{X} \times E \to \mathcal{X}$.

On définit par récurrence : $X_{n+1} = f(X_n, \xi_{n+1})$.

Alors, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une CM sur $\mathcal{X}$, de loi initiale π_0 et de matrice de transition $P(x,y) = \mathbb{P}[f(x, \xi_1) = y]$.

2) Réciproquement, étant donnés $\mathcal{X}$, P, π_0, on peut construire X_0, $(\xi_n)_{n\geq 1}$ et f donnant une chaîne $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de loi $\mathbb{P}_{(\pi_0, P)}$.

Preuve : 1) . On calcule les probabilités trajectorielles :

$$\mathbb{P}[X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n]$$

$$= \mathbb{P}[X_0 = x_0, f(X_0, \xi_1) = x_1, \dots, f(X_{n-1}, \xi_n) = x_n]$$

$$= \mathbb{P}[X_0 = x_0, f(x_0, \xi_1) = x_1, \dots, f(x_{n-1}, \xi_n) = x_n]$$

$$= \mathbb{P}[X_0 = x_0]\, \mathbb{P}[f(x_0, \xi_1) = x_1] \dots \mathbb{P}[f(x_{n-1}, \xi_n) = x_n]$$

indépendance

$$= \pi_0(x_0)\, P(x_0, x_1) \dots P(x_{n-1}, x_n).$$

2) Soit $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de variables iiD uniformes sur $[0, 1]$.

On énumère les éléments $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$ de $\mathcal{X}$.

- définition de X_0 : $X_0 = x_k$ avec k tel que $\sum_{j=1}^{k-1} \pi_0(x_j) \leq \xi_0 < \sum_{j=1}^{k} \pi_0(x_j)$.

- définition de f : $f(x,\xi) = x_k$ avec k tel que

$$\sum_{j=1}^{k-1} P(x,x_j) \leq \xi < \sum_{j=1}^{k} P(x,x_j).$$

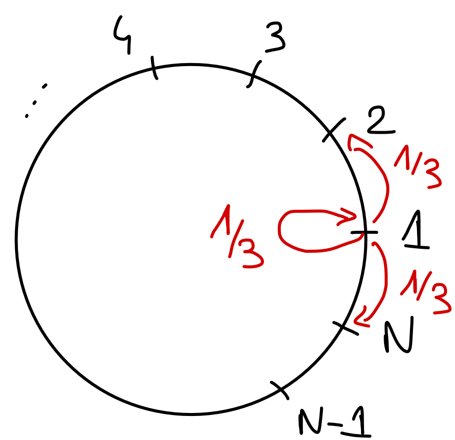
On a bien $X_0 \sim \pi_0$ et $\mathbb{P}[f(x,\xi) = y] = P(x,y)$. $\square$

2. Un exemple important : la marche aléatoire sur le cercle

$\mathcal{X} = [\![1, N]\!]$

On considère la marche aléatoire sur le cercle discrétisé :

$$P(k,k) = P(k,k-1) = P(k,k+1) = 1/3$$



avec les entiers considérés modulo N : $\mathcal{X} = \mathbb{Z}/_{N\mathbb{Z}}$.

On prendra par exemple $X_0 = 0 = N$ p.s.

<u>représentation</u> : $X_n = (\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n) \bmod N$

avec les ξ_i i.i.D, $\mathbb{P}[\xi_i = 1] = \mathbb{P}[\xi_i = 0] = \mathbb{P}[\xi_i = -1]$
$= 1/3$

<u>matrice de transition</u> :

$$P = P_N = \frac{1}{3}\begin{array}{c c} \overset{N}{\longleftrightarrow} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & & 1 \\ 1 & 1 & 1 & & 0 & \\ & 1 & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & & & & 1 & 1 \end{pmatrix} & \updownarrow N \end{array}$$

On a $\mathbb{P}_0[X_n = k] = (\delta_0 \, P_N^{\,n})(k)$ avec $\delta_0 = (0 \ldots 0, \overset{N}{1})$.

Peut-on calculer plus explicitement Π_n ? $\longrightarrow$ il faut diagonaliser P_N.

Si $v \in \mathbb{C}^N$, on définit sa transformée de Fourier discrète :
$= (v(1), v(2) \dots v(N))$

$$\hat{v}(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{N} v(j)\, e^{\frac{2ijk\pi}{N}}.$$

<u>Propriétés</u> : 1) $v \to \hat{v}$ est un isomorphisme d'inverse :

$$v(l) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^{N} \hat{v}(k)\, e^{-\frac{2ikl\pi}{N}}.$$

2) On a : $\widehat{vP_N}(k) = \lambda_k \hat{v}(k)$ avec $\lambda_k = \dfrac{1+2\cos\frac{2k\pi}{N}}{3}$.

Preuve : 1) On calcule :

$$S = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^{N} \hat{v}(k)\, e^{-\frac{2ik\ell\pi}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{j,k=1}^{N} v(j)\, e^{\frac{2ik(j-\ell)\pi}{N}}$$

À j fixé, $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} e^{\frac{2ik(j-\ell)\pi}{N}} = \begin{cases} N & \text{si } j = \ell \\ 0 & \text{sinon (somme géométrique)} \end{cases}$

Donc $S = \frac{1}{N} \times v(\ell) \times N = v(\ell)$.

2) Remarquons que $P_N = \frac{1}{3}\left(I_N + C_N + C_N^{-1}\right)$ avec

$$C_N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}$$

(matrice circulante de taille $N \times N$).

Or, $\widehat{vC_N}(k) = \dfrac{1}{\sqrt{N}} \displaystyle\sum_{j\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} (vC_N)(j)\, e^{\frac{2ijk\pi}{N}}$.

$$= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} v(j-1)\, e^{\frac{2ijk\pi}{N}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} v(j)\, e^{\frac{2i(j+1)k\pi}{N}} = \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} v(j)\, e^{\frac{2ijk\pi}{N}}\right) e^{\frac{2ik\pi}{N}}$$

$$= \hat{v}(k)\, e^{\frac{2ik\pi}{N}}.$$

De même, $\widehat{vC_N^{-1}}(k) = \hat{v}(k)\, e^{-\frac{2ik\pi}{N}}$

Donc $\widehat{vP_N}(k) = \hat{v}(k)\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}e^{\frac{2ik\pi}{N}} + \frac{1}{3}e^{-\frac{2ik\pi}{N}}\right) = \lambda_k \hat{v}(k)$

$\square$.

Calculons maintenant $\Pi_n(\ell)$.

$$\Pi_n(\ell) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} \widehat{\Pi_n}(k)\, e^{-\frac{2ik\ell\pi}{N}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} \widehat{\Pi_0 P_N^n}(k)\, e^{-\frac{2ik\ell\pi}{N}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} \widehat{\Pi_0}(k) \left(\lambda_k\right)^n e^{-\frac{2ik\ell\pi}{N}}$$

et si $\Pi_0 = \delta_0$, alors $\widehat{\Pi_0}(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{\frac{2ik0\pi}{N}} = \frac{1}{\sqrt{N}}$

d'où :

$$\boxed{\Pi_n(\ell) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{1 + 2\cos\frac{2k\pi}{N}}{3} \right)^n e^{-\frac{2ik\ell\pi}{N}}.}$$

Faits : 1) Les valeurs propres $\lambda_k = \frac{1 + 2\cos\frac{2k\pi}{N}}{3}$ appartiennent à l'intervalle $\left[\frac{1-2}{3}, \frac{1+2}{3}\right] = \left[-\frac{1}{3}, 1\right]$.

2) La seule v.p. égale à 1 est $\lambda_N = 1$. Les autres v.p. sont de module < 1.

Donc : $$\overline{\Pi_n}(\ell) = \frac{1}{N} + \underbrace{\sum_{k=1}^{N-1} (\lambda_k)^n e^{-\frac{2ik\ell\pi}{N}}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ exponentiellement vite}}$$

et $\lim_{n\to+\infty} \overline{\Pi_n} = \left(\frac{1}{N}, \frac{1}{N}, \dots \frac{1}{N}\right)$ loi uniforme sur $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$

(phénomène de convergence vers une loi stationnaire).

3. Propriété de Markov simple : la méthode d'un pas en avant.

De nombreux calculs peuvent être réalisés à partir de l'observation simple suivante :

<u>Propriété de Markov</u> $\mathcal{X}$, P, π_0

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CM de loi $\mathbb{P}_{(\pi_0, P)}$.

Conditionnellement à X_1, $(X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est une CM de loi $\mathbb{P}_{(\delta_{X_1}, P)}$.

Donc, pour toute fonction $f : \mathcal{X}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable bornée ou positive,

$$\mathbb{E}_{\pi_0}\left[f((X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}) \mid X_1 = x \right] = \mathbb{E}_x\left[f((X_n)_{n\in\mathbb{N}}) \right].$$

<u>Preuve</u> : c'est trivial :

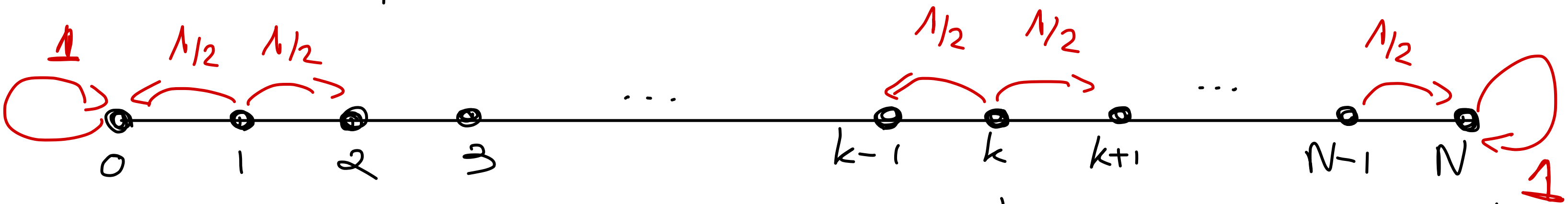
$$\mathbb{P}_{\pi_0}\left[X_1 = y_0, X_2 = y_1 \dots X_{n+1} = y_n \mid X_1 = x \right]$$

$$= \frac{\sum_{x_0\in\mathcal{X}} \mathbb{1}_{(x=y_0)} \pi_0(x_0) P(x_0, x) P(y_0, y_1) \dots P(y_{n-1}, y_n)}{\sum_{x_0\in\mathcal{X}} \pi_0(x_0) P(x_0, x)}$$

$$= \mathbb{1}_{(x=y_0)} P(y_0, y_1) \dots P(y_{n-1}, y_n) \qquad \square.$$

<u>Application</u> : modèle de la ruine du joueur

$\mathcal{X} = [\![0, N]\!]$



Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ chaîne de Markov issue de k avec ces probabilités de transition. On s'intéresse aux temps d'atteinte :

$$\tau_0 = \inf\{ n\in\mathbb{N} \mid X_n = 0 \} \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$$

$$\tau_N = \inf\{ n\in\mathbb{N} \mid X_n = N \}$$

$$\tau = \min(\tau_0, \tau_N).$$

1) Soit $f(k) = \mathbb{P}_k[\tau < +\infty \text{ et } \tau = \tau_0]$
(probabilité de ruine).

On a $f(0) = 1$ et $f(N) = 0$.

Remarquons maintenant que si $X_0 = k \notin \{0, N\}$, alors :

$$\{\tau((X_n)_{n\in\mathbb{N}}) < +\infty \text{ et } \tau((X_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \tau_0((X_n)_{n\in\mathbb{N}})\}$$

$$= \{1 + \tau((X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}) < +\infty \text{ et } 1 + \tau((X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}) = 1 + \tau_0((X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}})\}$$

$$= \{\tau((X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}) < +\infty \text{ et } \tau((X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}) = \tau_0((X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}})\}$$

(on voit τ_0, τ_N et τ comme des fonctions des trajectoires)

Par la propriété de Markov :

$$f(k) = \mathbb{P}_k\left[\tau((X_n)_n) < +\infty \text{ et } \tau((X_n)_n) = \tau_0((X_n)_n)\right]$$

$$= \mathbb{P}_k[X_1 = k+1]\, \mathbb{P}_k\left[\tau((X_n)_n) < +\infty \text{ et } \tau((X_n)_n) = \tau_0((X_n)_n) \mid X_1 = k+1\right]$$

$$+ \mathbb{P}_k[X_1 = k-1]\, \mathbb{P}_k\left[\tau((X_n)_n) < +\infty \text{ et } \tau((X_n)_n) = \tau_0((X_n)_n) \mid X_1 = k-1\right]$$

$$= \frac{1}{2}\mathbb{P}_k\left[\tau((X_{n+1})_n) < +\infty \text{ et } \tau((X_{n+1})_n) = \tau_0((X_{n+1})_n) \mid X_1 = k+1\right]$$

$$+ \frac{1}{2}\mathbb{P}_k\left[\tau((X_{n+1})_n) < +\infty \text{ et } \tau((X_{n+1})_n) = \tau_0((X_{n+1})_n) \mid X_1 = k-1\right]$$

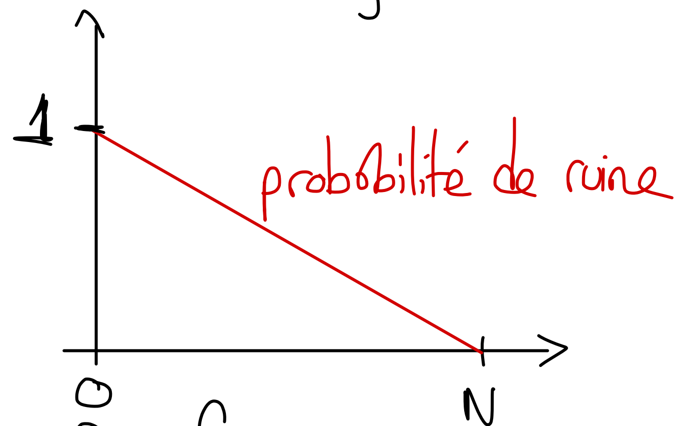
$$= \boxed{\frac{1}{2}f(k+1) + \frac{1}{2}f(k-1) = f(k)}$$

On résoud facilement l'équation :

$$f(k+1) - f(k) = f(k) - f(k-1) \implies f \text{ est de pente constante}$$

Donc f est la fonction affine telle que $f(0)=1$, $f(N)=0$

$$f(k) = 1 - \frac{k}{N}.$$



(remarque : on calcule de la même façon
$g(k) = \mathbb{P}_k[\tau < +\infty \text{ et } \tau = \tau_N] = \frac{k}{N}$.
En particulier, $1 = f(k) + g(k) = \mathbb{P}_k[\tau < +\infty]$.)

2) La méthode d'un pas en avant permet aussi de calculer $h(k) = \mathbb{E}_k[\tau]$

$$h(0) = h(N) = 0.$$

Si $k \notin \{0, N\}$:

$$h(k) = \mathbb{E}_k[\tau] = P(k, k+1)\, \mathbb{E}_k[\tau((X_n)_n) \mid X_1 = k+1] + P(k, k-1)\, \mathbb{E}_k[\tau((X_n)_n) \mid X_1 = k-1]$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\mathbb{E}_k[1 + \tau((X_{n+1})_n) \mid X_1 = k+1] + \mathbb{E}_k[1 + \tau((X_{n+1})_n) \mid X_1 = k-1]\Big)$$

$$= \frac{1}{2}\big(1 + h(k+1) + 1 + h(k-1)\big)$$

Donc $\boxed{h(k) = 1 + \frac{1}{2}\big(h(k+1) + h(k-1)\big)}$.

Posons $(\delta h)(k) = h(k) - h(k-1)$. On a $\sum_{k=1}^{N} (\delta h)(k) = 0$

et $(\delta h)(k+1) = (\delta h)(k) - 2$.

Ainsi, $(\delta h)(k) = (\delta h)(1) - 2(k-1)$

et $0 = N(\delta h)(1) - 2\sum_{k=1}^{N} k-1 = N(\delta h)(1) - N(N-1)$

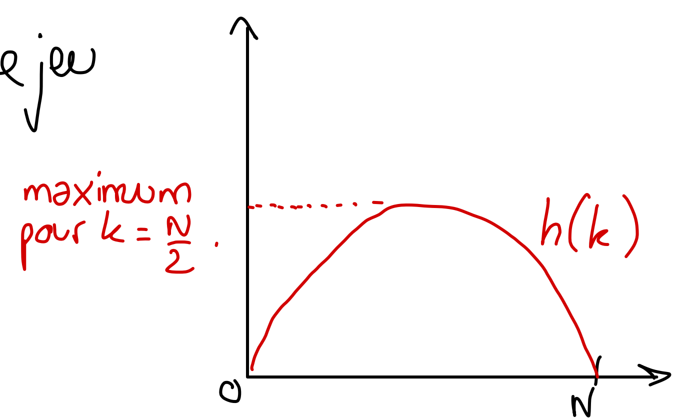
$(\delta h)(1) = N-1$; $\delta h(k) = N+1-2k$.

Finalement, $h(k) = \sum_{j=1}^{k} \delta h(j) = k(N+1) - k(k+1)$

$= k(N-k)$.

Conclusion : le temps moyen de jeu est la fonction quadratique

$h(k) = k(N-k)$



4. Propriété de Markov forte

La propriété de Markov simple dit que la chaîne décalée en temps $(X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ conditionnellement à la valeur de X_1 est encore une CM, de loi $\mathbb{P}_{\delta_{X_1}}$.

On peut plus généralement décaler d'un temps fini m :
Conditionnellement à $\mathcal{F}_m = \sigma(X_0 \dots X_m)$, $(X_{n+m})_{n\in\mathbb{N}}$ est une CM de loi $\mathbb{P}_{\delta_{X_m}}$.

Markov fort : un énoncé semblable mais avec m remplacé par un temps <u>aléatoire</u> T.

⤳ notion de temps d'arrêt.

Définition Soit $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une filtration d'un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c'est-à-dire une suite croissante de sous-tribus

$$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \dots \subset \mathcal{F}_n \subset \dots \subset \mathcal{F}.$$

Un temps d'arrêt vis-à-vis de cette filtration est une variable aléatoire $T : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, telle que :

$\forall n \in \mathbb{N}$, l'événement $\{T = n\}$ est dans $\mathcal{F}_n$.

Un temps d'arrêt pour une chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un temps d'arrêt vis-à-vis de la filtration canonique

$$\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n).$$

<u>exemple</u> : $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to \mathcal{X}$ CM

$A \subset \mathcal{X}$ partie non vide

$\tau_A = \inf\{n \in \mathbb{N} \mid X_n \in A\}$ temps d'atteinte de A

est un temps d'arrêt.

En effet, $$\{\tau_A = n\} = \bigsqcup_{\substack{x_0, x_1 \dots x_{n-1} \\ \in \mathcal{X}\setminus A \\ x_n \in A}} \underbrace{\{X_0 = x_0, X_1 = x_1 \dots X_n = x_n\}}_{\in \mathcal{F}_n}.$$

Un temps d'arrêt T / filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définit une sous-tribu

$$\mathcal{F}_T = \{E \subset \mathcal{F} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ E \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}_n\}.$$

= " événements dépendant de ce qui se passe avant le temps T "

Théorème : Supposons $T < +\infty$ p.s. temps d'arrêt pour une chaîne $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de matrice P, loi initiale π_0.

La loi de $(X_{n+T})_{n\in\mathbb{N}}$ conditionnellement à $\mathcal{F}_T$ est $\mathbb{P}_{(\delta_{X_T}, P)}$.

Autrement dit, pour toute fonction mesurable bornée $f : \mathcal{X}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}_{\pi_0}\left[f\left((X_{n+T})_{n\in\mathbb{N}} \right) \middle| \mathcal{F}_T \right] = \mathbb{E}_{\underbrace{X_T}_{\text{variable } \mathcal{F}_T\text{-mesurable}}}\left[f\left(\underbrace{(\tilde{X}_n)}_{\text{chaîne de matrice } P}{}_{n\in\mathbb{N}} \right) \right].$$

Preuve : similaire à la preuve de Markov simple, en décomposant en fonction des valeurs de T.

Et si $T = +\infty$ est possible ?

$\to$ on rajoute des indicatrices $\mathbb{1}_{(T<+\infty)}$.

<u>Théorème</u> (Markov fort) Dans le cas général,

$$\mathbb{E}_{\pi_0}\left[\mathbb{1}_{(T<+\infty)} f((X_{n+T})_{n\in\mathbb{N}}) \mid \mathcal{F}_T\right]$$

$$= \underbrace{\mathbb{1}_{(T<+\infty)}}_{} \mathbb{E}_{X_T}\left[f((\tilde{X}_n)_{n\in\mathbb{N}})\right].$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{(T=n)}$$

variable $\mathcal{F}_T$-mesurable

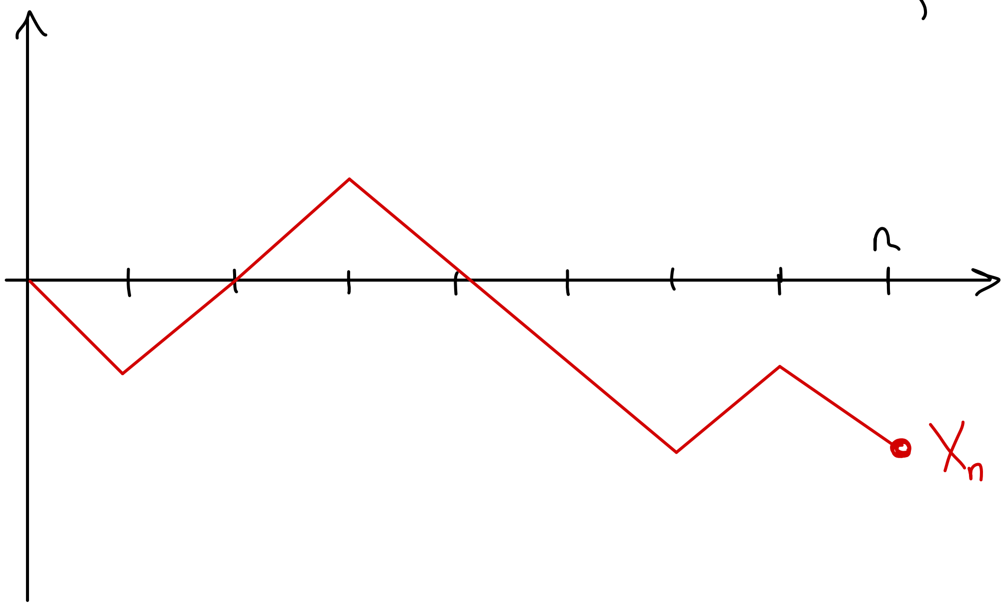
<u>Application</u> : étude du maximum d'une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

$\mathcal{X} = \mathbb{Z}$; $\pi_0 = \delta_0$; $P(k, k+1) = p$, $P(k, k-1) = 1-p$

avec $p \in (0, 1)$

<u>représentation</u> : $X_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$ avec les ξ_n iiD

$\mathbb{P}[\xi_n = +1] = p$; $\mathbb{P}[\xi_n = -1] = 1-p$.



On s'intéresse à la variable $M = \sup \{X_n,\ n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ sous $\mathbb{P}_0$.

Notons que : $\{M \geq k\} \Longleftrightarrow \{T_k < +\infty\}$

__Proposition__ : $\mathbb{P}_0[T_k < +\infty] = (\mathbb{P}_0[T_1 < +\infty])^k \quad \forall k \geq 1.$

En effet, appliquons la propriété de Markov au temps d'arrêt T_{k-1} :

$$\mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{T_k((X_n)_n) < +\infty} \mid \mathcal{F}_{T_{k-1}}]$$

$$= \mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{T_{k-1} < +\infty} \mathbb{1}_{T_k((X_{n+T_{k-1}})_n) < +\infty} \mid \mathcal{F}_{T_{k-1}}]$$

$$= \mathbb{1}_{T_{k-1} < +\infty} \mathbb{E}_{k-1}[\mathbb{1}_{T_k((X_n)_n) < +\infty}]$$

$$= \mathbb{1}_{T_{k-1}<+\infty} \underbrace{\mathbb{P}_{k-1}[T_k<+\infty]}_{=\mathbb{P}_0[T_1<+\infty]}$$

car si $(X_n)_n \sim \mathbb{P}_{k-1}$, alors $(X_n - k+1)_n \sim \mathbb{P}_0$).

En prenant l'espérance de l'espérance conditionnelle :

$$\mathbb{P}_0[T_k<+\infty] = \mathbb{P}_0[T_{k-1}<+\infty]\,\mathbb{P}_0[T_1<+\infty]$$

d'où le résultat par récurrence.

<u>Corollaire</u> : - soit $\Pi = +\infty$ p.s.

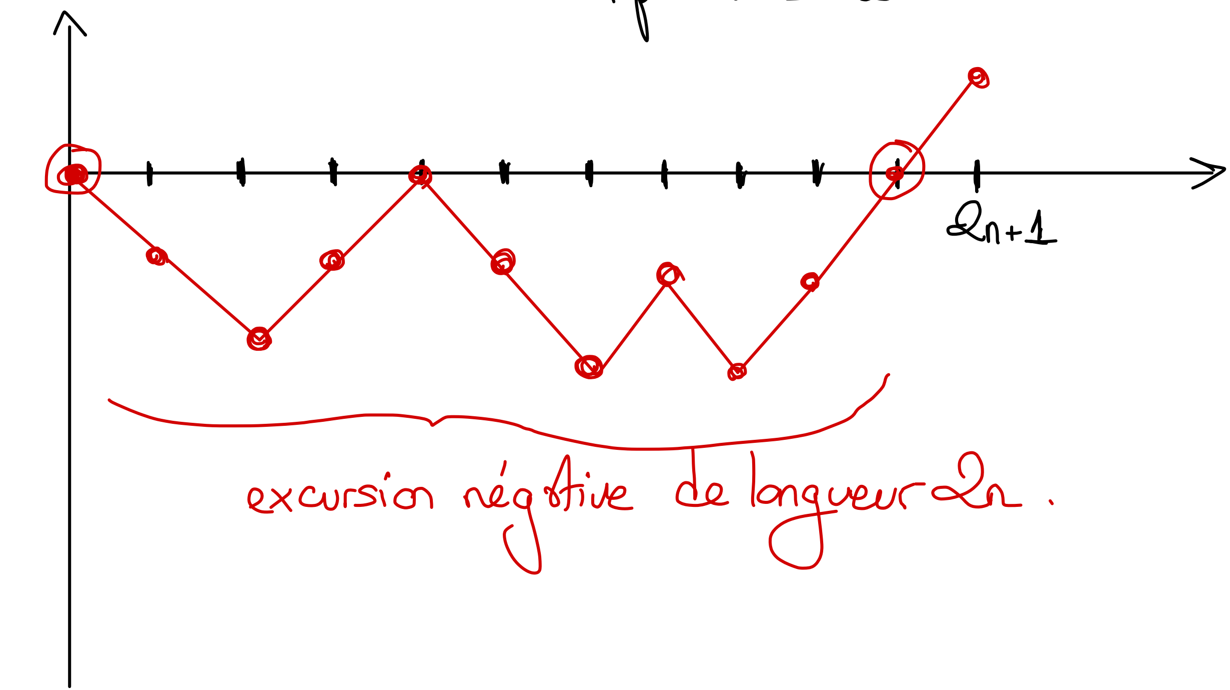
- soit Π est une variable géométrique de paramètre

$$p = \mathbb{P}_0[T_1=+\infty] > 0.$$

Que vaut cette probabilité ?

On va calculer en fonction de p et n $\mathbb{P}_0[T_1 = 2n+1]$.

$\{T_1 = 2n+1\} \Longleftrightarrow$ la trajectoire jusqu'au temps $2n+1$ est une excursion négative de longueur $2n$ suivie d'un pas vers le haut.



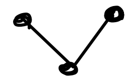
La probabilité d'une telle trajectoire fixée est toujours $p^{n+1}(1-p)^n$ (n+1 pas vers le haut et n pas vers le bas).

Donc : $\mathbb{P}_0[T_1 = 2n+1] = C_n \, p^{n+1}(1-p)^n$

avec C_n = nbre d'excursions négatives de longueur 2n $0 \rightsquigarrow 0$.

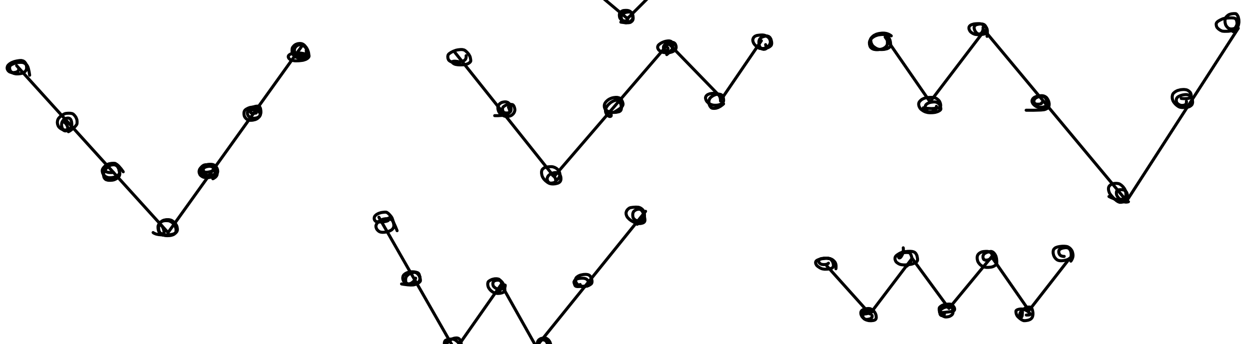
$C_n = ?$

$C_1 = 1$



$C_2 = 2$

$C_3 = 5$



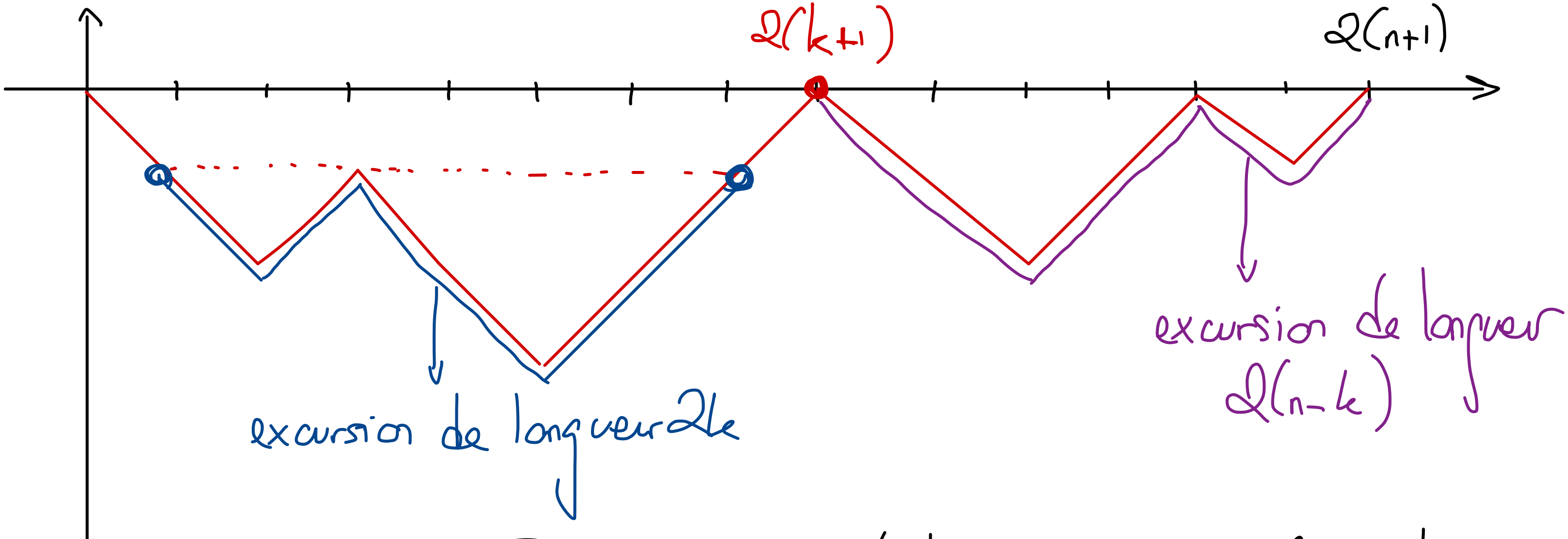
$C_4 = 14$, $C_5 = 42$, $C_6 = 132$ ...

<u>Formule de récurrence</u> : $C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$.

<u>Preuve</u> : une excursion de longueur $2(n+1)$ est entièrement déterminée par : $- \, k \in [\![0, n]\!]$ | le chemin repasse pour la première fois en 0 au temps $2(k+1)$

- deux excursions négatives de longueur $2k$ et $2(n-k)$.

$\longrightarrow$ preuve bijective de la formule.



Notons $C(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n z^n$. C'est une série génératrice de rayon de convergence au moins $\frac{1}{4}$, car $C_n \leq 2^{2n}$.

$$z\,C(z)^2 = z\left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n \left(\sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}\right)\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} z^{n+1} C_{n+1} = C(z) - 1 .$$

Ainsi, $C(z)$ vérifie l'équation quadratique :

$$\boxed{z\, C(z)^2 - C(z) + 1 = 0} \implies C(z) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4z}}{2z}$$

Or, C n'a pas de singularité en 0

$$\implies C(z) = \frac{1 - \sqrt{1-4z}}{2z} .$$

En redéveloppant en série entière, on trouve

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \quad \text{(nombres de Catalan)} .$$

$$\mathbb{P}_0[T_1 < +\infty] = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}_0[T_1 = 2n+1]$$

$$= p \sum_{n=0}^{+\infty} C_n \left(p(1-p)\right)^n = p\, C(p(1-p))$$

$$= \frac{1-\sqrt{1-4p(1-p)}}{2(1-p)} = \frac{1-|1-2p|}{2(1-p)} = \begin{cases} 1 \text{ si } p \geq 1/2 \\ \frac{p}{1-p} \text{ si } p < \frac{1}{2} \end{cases}.$$

<u>Corollaire</u> : si $p < \frac{1}{2}$, Γ suit une loi géométrique de paramètre

$$t = 1 - \frac{p}{1-p} = \frac{1-2p}{1-p}.$$

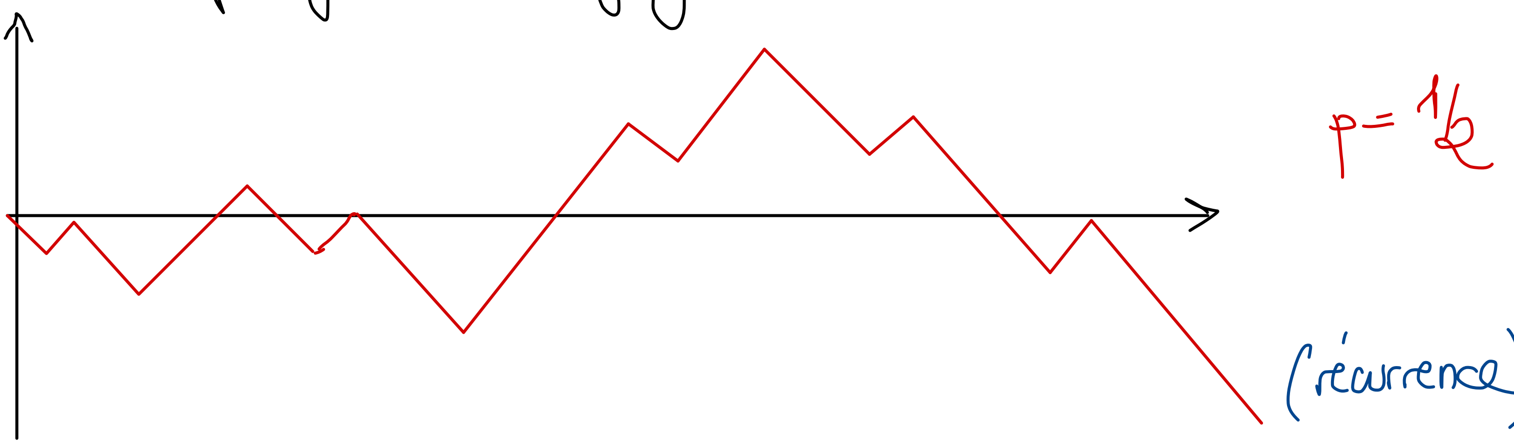
$$\mathbb{P}[\Gamma \geq k] = t^k.$$

Ceci implique :

- si $p = \frac{1}{2}$, alors tous les états $k \in \mathbb{Z}$ sont visités p.s. infiniment

En effet, $\mathbb{P}_0 [T_k < +\infty] = 1 \quad \forall k \geq 0$, et par symétrie $\forall k \leq 0$.

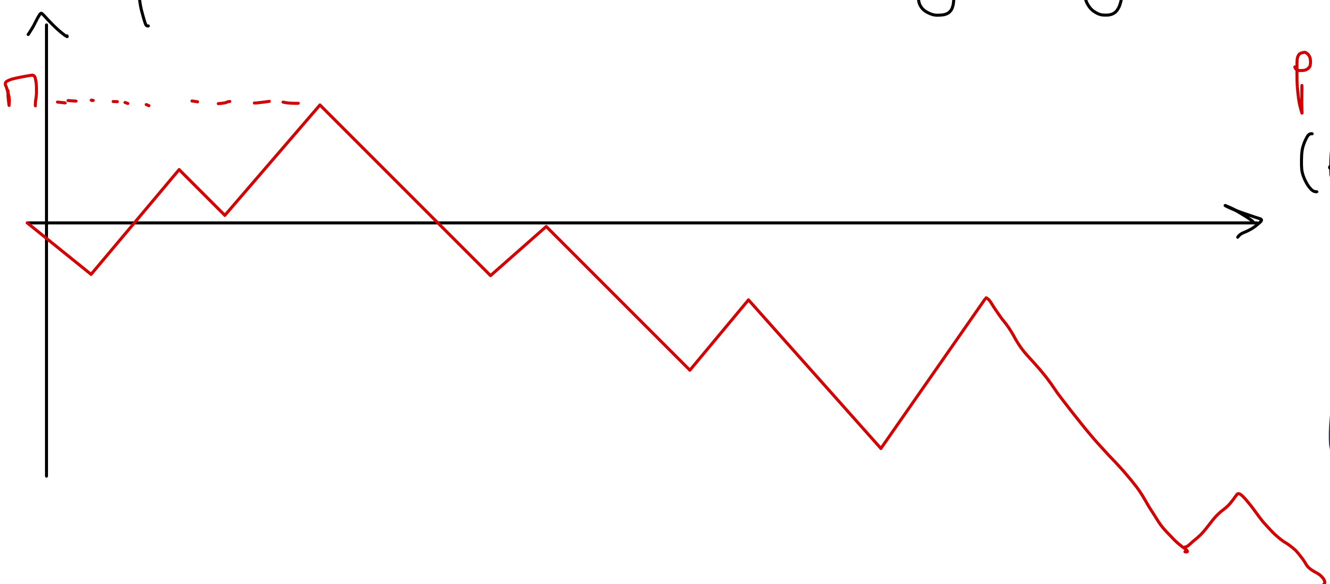
Alors, la marche est forcée à faire des aller-retour de plus en plus loin dans les positifs et les négatifs :



• si $p < \frac{1}{2}$, alors $M < +\infty$ p.s., et par la loi des grands nombres,

$$\left(\frac{X_n}{n} \xrightarrow[p.s.]{} 2p-1 < 0\right) \Longrightarrow \left(X_n \xrightarrow[p.s.]{} -\infty\right)$$

donc l'ensemble des états visités est de la forme $[\![-\infty, M]\!]$, et chaque état est visité p.s. un nombre fini de fois



(le cas $p > \frac{1}{2}$ est symétrique)

(transience)

5. États récurrents et états transients

$\mathcal{X}$, P, π_0 ; $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CM de loi $\mathbb{P}_{(\pi_0, P)} = \mathbb{P}_{\pi_0}$.

<u>Définition</u> Soit $x \in \mathcal{X}$, $\tau_x^+ = \inf\{n \geq 1 \mid X_n = x\}$
temps de retour en x.

* Si $\mathbb{P}_x[\tau_x^+ < +\infty] < 1$, on dit que x est un état transient. Dans ce cas, $V_x = \mathrm{card}(\{n \geq 1 \mid X_n = x\}) < +\infty$ $\mathbb{P}_{\pi_0}$ p.s. $\forall \pi_0$.

* Si $\mathbb{P}_x[\tau_x^+ < +\infty] = 1$, on dit que x est un état récurrent.

Dans ce cas, $V_x = +\infty$ $\mathbb{P}_x$ p.s.

<u>Preuve</u> La propriété de Markov appliquée avec le temps d'arrêt τ_x^+ donne :

$$\mathbb{P}_{\pi_0}[V_x \geq k+1] = \mathbb{P}_{\pi_0}[\tau_x^+((X_n)_n) < +\infty \text{ et } V_x((X_n)_n) \geq k+1]$$

$(k \geq 1)$

$$= \mathbb{P}_{\pi_0}[\tau_x^+((X_n)_n) < +\infty \text{ et } V_x((X_{n+\tau_x^+})_n) \geq k]$$

$$\underset{(\text{Markov})}{=} \mathbb{P}_{\pi_0}[\tau_x^+ < +\infty]\, \mathbb{P}_x[V_x \geq k].$$

Par récurrence, et puisque $\{\tau_x^+ < +\infty\} = \{V_x \geq 1\}$

$$\mathbb{P}_{\pi_0}[V_x \geq k] = (\mathbb{P}_x[\tau_x^+ < +\infty])^{k-1} \, \mathbb{P}_{\pi_0}[\tau_x^+ < +\infty]$$

$$\mathbb{P}_x[V_x \geq k] = (\mathbb{P}_x[\tau_x^+ < +\infty])^k .$$

1) Si $\mathbb{P}_x[\tau_x^+ < +\infty] < 1$, alors

$$\mathbb{P}_{\pi_0}[V_x = +\infty] = \lim_{k \to +\infty} \mathbb{P}_{\pi_0}[V_x \geq k] = 0$$

De plus, sous $\mathbb{P}_x$, V_x suit une loi géométrique de paramètre

$$p = 1 - \mathbb{P}_x[\tau_x^+ < +\infty] = \mathbb{P}_x[\tau_x^+ = +\infty] .$$

$$\mathbb{E}_x[V_x] = \sum_{k=0}^{\infty} p(1-p)^k k = \frac{1}{p} - 1 .$$

2) Si $\mathbb{P}_x[\tau_x^+ < +\infty] = 1$, alors

$$\mathbb{P}_x[V_x = +\infty] = \lim_{k \to +\infty} \mathbb{P}_x[V_x \geq k] = 1 . \quad \square .$$

Comment savoir si un état est récurrent ou transient ?

- → critère numérique $(*)$
- → calcul de $\mathbb{P}_x[\tau_y^+ < +\infty]$ en utilisant la propriété de Markov (équations de récurrence...)
- → plus tard, utilisation des mesures invariantes.

$*$: x état transient

$\iff V_x < +\infty$ p.s. sous $\mathbb{P}_x$ (et donc géométrique)

$\iff \mathbb{E}_x[V_x] < +\infty$

$\iff \sum_{n=0}^{\infty} P^n(x,x) < +\infty.$

<u>Application - exercice</u> : on considère la marche aléatoire symétrique ($p = 1/2$) sur $\mathbb{Z}$.

1. Calculer $P^n(0,0)$ (distinguer les cas n pair, n impair).
2. Montrer que 0 est un état récurrent.
3. ——— tous les états de $\mathbb{Z}$ sont récurrents.
4. Et sur $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 2$, avec la marche aux $2d$-plus proches voisins du réseau ?

Comme la m.a. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ change de parité à chaque pas,

$P^n(0,0) = 0$ si n est impair.

Si n est pair $= 2k$:

- chaque chemin de longueur $2k$ reliant 0 à 0 a probabilité $\frac{1}{2^{2k}}$, et consiste en k pas positifs et k pas négatifs.
- le nombre de tels chemins est $\binom{2k}{k}$.

Donc, $$P^{2k}(0,0) = \frac{1}{2^{2k}}\binom{2k}{k}.$$

Par Stirling : $$k! = \left(\frac{k}{e}\right)^k \sqrt{2\pi k}\left(1+O\left(\frac{1}{k}\right)\right)$$

Donc : $P^{2k}(0,0) = \frac{1}{\sqrt{\pi k}}\left(1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right)$.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P^n(0,0) = +\infty \Longrightarrow 0 \text{ est un état récurrent.}$$

Comme $P^n(x,x) = P^n(0,0)$ (invariance par translation), tous les états $x \in \mathbb{Z}$ sont récurrents.

cas $d \geq 2$, marche sur $\mathbb{Z}^d$. On peut montrer que $P^{2n}(0,0) = O\left(\frac{1}{n^{d/2}}\right)$

$d = 2 \Longrightarrow$ marche récurrente

$d \geq 3 \Longrightarrow$ " transiente.

6. Communication et classification des états

On connaît maintenant le comportement de V_x sous $\mathbb{P}_x$; mais que dire de V_y, $y \neq x$?

<u>Définition</u> : On dit que x communique avec y si $\exists n \geq 1 \mid$ $p^n(x,y) > 0$.

$\iff$ il existe un chemin de x à y dans G_P.

Notons $\mathcal{X} = T \sqcup R$ la partition de l'espace en états transients et états récurrents.

<u>Théorème</u> : si $x \in R$ et $x \rightsquigarrow y$, alors $y \in R$ et $y \rightsquigarrow x$.

Ainsi, la restriction de la relation de communication aux états récurrents est une relation d'équivalence.

<u>Lemme</u> (un peu technique mais qui donne la bonne explication)

Si $x \in R$ introduisons les temps de retour en x :

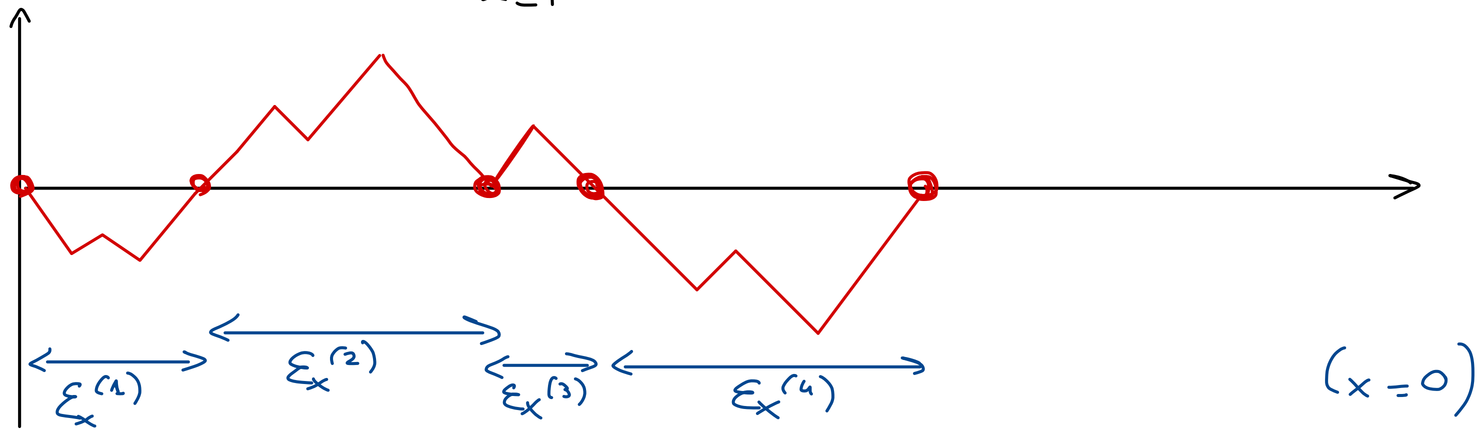
$$\left.\begin{array}{l} \tau_x^{(0)} = 0 \ ; \ \tau_x^{(1)} = \tau_x^{+} \\ \tau_x^{(k+1)} = \inf\left\{ n \geq \tau_x^{(k)} + 1 \mid X_n = x \right\} \end{array}\right) \text{ finis p.s. sous } \mathbb{P}_x$$

et les excursions issues de x :

$$\mathcal{E}_x^{(k \geq 1)} = \left(X_{\tau_x^{(k-1)}}, X_{\tau_x^{(k-1)}+1} \ldots X_{\tau_x^{(k)}-1} \right)$$

Chaque $\mathcal{E}_x^{(k)}$ est une v.a. à valeurs dans $\bigsqcup_{n \geq 1} \mathcal{X}^n$.

Les v.a. $(\mathcal{E}_x^{(k)})_{k\geq 1}$ sont iiD.



<u>Preuve du lemme</u> : Notons que :

$$\mathcal{E}_x^{(k)}\left((X_n)_n\right) = \mathcal{E}_x^{(1)}\left((X_{n+\tau_x^{(k-1)}})_n\right)$$

Par Markov fort, conditionnellement à $\mathcal{F}_{\tau_x^{(k-1)}}$, $\mathcal{E}_x^{(k)}$ suit la loi de $\mathcal{E}_x^{(1)}$ sous $\mathbb{P}_x$, donc est indépendante de $\mathcal{F}_{\tau_x^{(k-1)}}$, tribu pour laquelle $\mathcal{E}_x^{(1)} \dots \mathcal{E}_x^{(k-1)}$ sont mesurables. $\square$

Preuve du théorème :

Si $x \rightsquigarrow y$ et $x \in \mathcal{R}$, alors sous $\mathbb{P}_x$,

$$V_y \geq \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{y \in \mathcal{E}_x^{(k)}}$$

et les variables $\mathbb{1}_{y \in \mathcal{E}_x^{(k)}}$ sont iiD.

nbre de visites

nbre d'excursions contenant des visites

Par Borel-Cantelli, si $\mathbb{P}_x[y \in \mathcal{E}_x^{(1)}] > 0$, alors p.s. la somme est infinie, donc $V_y = +\infty$ sous $\mathbb{P}_x$.

Or, si $x \to x_1 \to x_2 \to \dots \to x_n = y$ est un chemin de longueur minimale reliant x à y, alors :

$$\mathbb{P}_x\left[y \in \mathcal{E}_x^{(1)}\right] \geq \mathbb{P}_x\Big[X_1 = x_1 \text{ et } \dots \text{ et } X_n = y \text{ et } \underbrace{X_m = x \text{ pour un } m \geq 1}_{\text{événement de proba } 1}\Big]$$

$$\geq \mathbb{P}_x\left[X_1 = x_1 \text{ et} \dots \text{ et } X_n = y\right] > 0 .$$

Ainsi : $x \in \mathcal{R}$ et $x \rightsquigarrow y \Rightarrow V_y = +\infty$ $\mathbb{P}_x$ p.s.

$\Rightarrow y \rightsquigarrow x$ (on passe avec proba 1 par y, et il faut pouvoir revenir)

Finalement, $\mathbb{P}_x[\underbrace{V_y = +\infty}_{=1}] = \mathbb{P}_x[T_y < +\infty]\, \mathbb{P}_y[V_y = +\infty]$,

donc $V_y = +\infty$ $\mathbb{P}_y$ p.s. et y est récurrent.

$\square$.

Le résultat précédent implique la description suivante des trajectoires d'une CM :

Théorème (classification des états)

$\mathcal{X}$, P

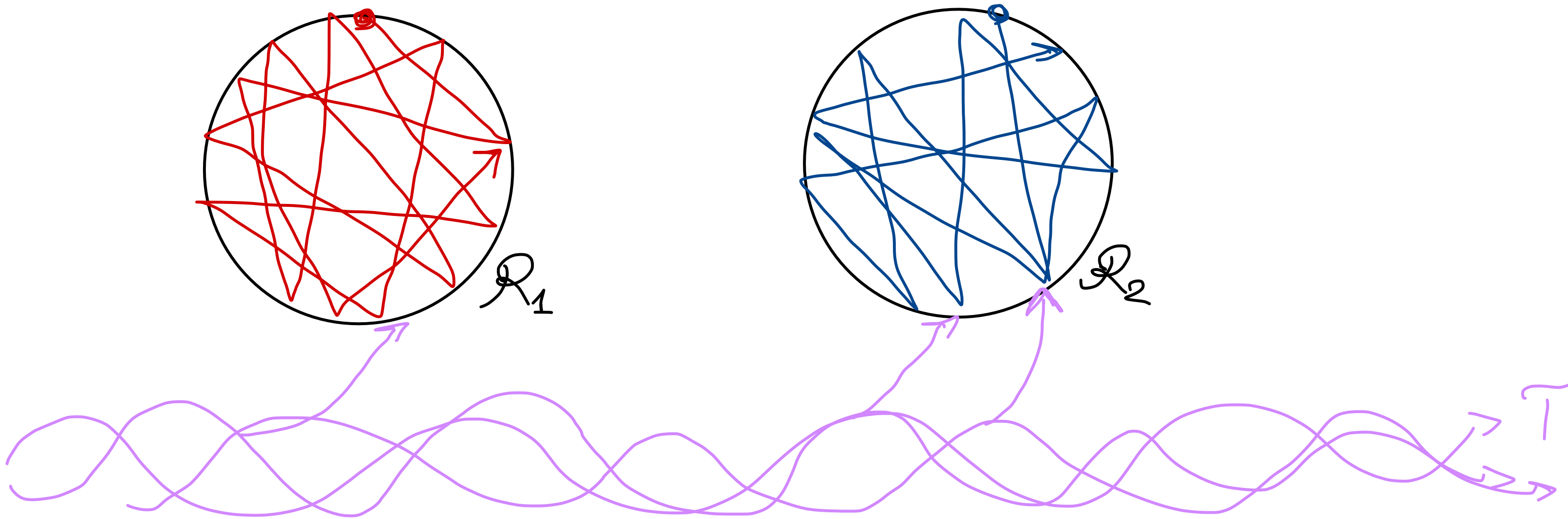
$$\mathcal{X} \longrightarrow \underbrace{T}_{\text{états transients}} \sqcup \bigsqcup_{i \in I} R_i$$

R_i : classe d'états récurrents pour la relation de communication.

1) Si $x \in R_i$, sous $\mathbb{P}_x$, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ visite tous les états de R_i infiniment souvent, et uniquement ceux-ci.

2) Si $x \in T$, sous $\mathbb{P}_x$: $\longrightarrow$ soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reste dans T, et visite ces états un nbre fini de fois

→ soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ atteint un état récurrent dans une classe R_i, et à partir de ce temps (aléatoire), visite cette classe récurrente comme dans 1.



2 cas particuliers importants :

- La chaîne est dite irréductible si $x \rightsquigarrow y$ $\forall x, y \in \mathcal{X}$.

Alors : – soit tous les états sont transients

$$\Longrightarrow \forall \pi_0, \forall x, \quad \mathbb{P}_{\pi_0}[V_x < +\infty] = 1$$

– soit il existe un état récurrent, et alors, tous les états sont récurrents

$$\Longrightarrow \forall \pi_0, \forall x, \quad \mathbb{P}_{\pi_0}[V_x = +\infty] = 1$$

- La chaîne est dite finie si $\operatorname{card} \mathcal{X} < +\infty$.

Alors, $R \neq \emptyset$: il y a au moins un état récurrent.

En effet, fixons $x \in \mathcal{X}$. On a sous $\mathbb{P}_x$:

$$\sum_{y \in \mathcal{X}} V_y = \sum_{y,\, n \geq 1} \mathbb{1}_{(X_n = y)} = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = +\infty$$

donc il existe un $y \in \mathcal{X} \mid \mathbb{P}_x[V_y = +\infty] > 0$.

Or, $\mathbb{P}_x[V_y = +\infty] = \mathbb{P}_x[\tau_y < +\infty]\, \mathbb{P}_y[V_y = +\infty]$

$\Rightarrow \mathbb{P}_y[V_y = +\infty] > 0$ et vaut donc forcément 1.

$\Rightarrow$ y est récurrent.

<u>Corollaire</u> Une chaîne finie et irréductible est récurrente.

7. Mesures invariantes

$\mathcal{X}$, P

<u>Définition</u> Une mesure invariante pour la matrice stochastique P est une mesure positive $\pi = (\pi(x))_{x \in \mathcal{X}}$ telle que $\pi P = \pi$.

On parle de loi invariante ou stationnaire si de plus π est une mesure de probabilité : $\sum_{x \in \mathcal{X}} \pi(x) = 1$

<u>Exemples</u> : 1) la marche aléatoire de paramètre p sur $\mathbb{Z}$ admet la mesure de comptage $\pi = \sum_{x \in \mathbb{Z}} \delta_x$ comme mesure invariante.

En effet, $(\pi P)(x) = \pi(x-1)\, p + \pi(x+1)(1-p) = p + 1 - p = 1 \underset{}{=} \pi(x)$.

2) Les mesures invariantes sont bien sûr stables par combinaison linéaire positive. Si $p \neq \frac{1}{2}$, une mesure invariante pour la m.a. sur $\mathbb{Z}$ qui n'est pas proportionnelle à la mesure de comptage est :

$$\pi(x) = \left(\frac{p}{1-p}\right)^x$$

En effet, $(\pi P)(x) = \left(\frac{p}{1-p}\right)^{x-1} p + \left(\frac{p}{1-p}\right)^{x+1}(1-p)$

$$= \left(\frac{p}{1-p}\right)^x [1-p+p] = \left(\frac{p}{1-p}\right)^x = \pi(x).$$

3) mesures réversibles :

si $\pi(x)P(x,y) = \pi(y)P(y,x) \quad \forall (x,y) \in \mathcal{X}^2$,

alors π est en particulier invariante.

En effet, $(\pi P)(x) = \sum_{y \in \mathcal{X}} \pi(y) P(y,x) = \sum_{y \in \mathcal{X}} \pi(x) P(x,y) = \pi(x)$.

<u>Théorème</u> : Si P est la matrice d'une chaîne récurrente irréductible, alors P admet à un coefficient multiplicatif près une unique mesure invariante non nulle. On peut prendre :

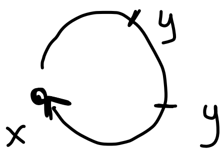
$$\pi(y) = \mathbb{E}_x \left[\sum_{n=1}^{\tau_x^+} \mathbb{1}_{(X_n = y)} \right].$$

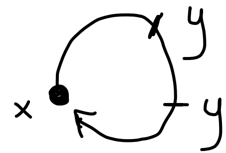
x étant un état arbitraire de $\mathcal{X}$ (qui influe π via un scalaire).

<u>Preuve de l'existence</u> :

On va montrer que la formule donne bien une mesure invariante. Sous $\mathbb{P}_x$,

$$\sum_{n=1}^{\tau_x^+} \mathbb{1}(X_n = y) = \sum_{n=0}^{\tau_x^+ - 1} \mathbb{1}(X_n = y) \quad \text{p.s.}$$





$$(\pi P)(y) = \sum_{z \in \mathcal{X}} \mathbb{E}_x\left[\sum_{n=0}^{\tau_x^+ - 1} \mathbb{1}(X_n = z)\right] P(z, y)$$

$$= \sum_{z \in \mathcal{X}} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_x\left[X_n = z \text{ et } n < \tau_x^+\right] P(z, y)$$

$$= \sum_{z \in \mathcal{X}} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_x\left[X_n = z \text{ et } X_{n+1} = y \text{ et } n+1 \leq \tau_x^+\right].$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_x[X_n = y \text{ et } n \leq \tau_x^+] = \mathbb{E}_x\left[\sum_{n=1}^{\tau_x^+} \mathbb{1}_{(X_n = y)}\right]$$

$$= \pi(y)$$

$\square$.

Le théorème implique l'alternative suivante pour une chaîne récurrente irréductible

* si toutes les mesures invariantes sont de masse infinie, on dit que la chaîne est récurrente nulle.

Alors, $\forall x \in \mathcal{X}$, $\mathbb{E}_x[\tau_x^+] = \pi_x(\mathcal{X}) = +\infty$

$\longrightarrow$ τ_x^+ est $\mathbb{P}_x$ p.s. fini, mais d'espérance infinie.

* si toutes les mesures invariantes sont de masse finie, on dit que la chaîne est récurrente positive.

Il existe dans ce cas une unique mesure de probabilité invariante π.

Si $\pi_x(y) = \mathbb{E}_x\left[\sum_{n=1}^{\tau_x^+} \mathbb{1}_{(X_n = y)}\right]$, $\pi_x \propto \pi$ et

$$\pi_x(x) = 1 = \pi_x(\mathcal{X})\,\pi(x).$$

Donc $\pi(x) = \dfrac{1}{\pi_x(\mathcal{X})} = \dfrac{1}{\mathbb{E}_x[\tau_x^+]}$.

$\Longrightarrow \forall x \in \mathcal{X}$, τ_x^+ est fini p.s. sous $\mathbb{P}_x$ et d'espérance finie.

(c'est tjs le cas pour une chaîne finie irr.)

On a une réciproque partielle à l'implication

(irréductible récurrente) $\Longrightarrow$ (existence d'une mesure invariante unique à un scalaire près)

<u>Théorème</u> : Si $\mathcal{X}$, P chaîne irréductible admet une mesure invariante <u>de masse finie</u>, alors la chaîne est récurrente positive.

(remarque : si P est irréductible et π est invariante non nulle, alors elle est strictement positive partout, car

$$\pi(y) = (\pi P^n)(y) = \sum_{x \in \mathcal{X}} \underbrace{\pi(x) P^n(x,y)}_{>0 \text{ pour un } x \in \mathcal{X} \text{ et un } n \geq 1} .)$$

8. Convergence vers la loi stationnaire

Definition La période d'un état $x \in \mathcal{X}$ / matrice de transition P récurrente est $h(x) = \text{pgcd} \underbrace{\{ n \geq 1 \mid P^n(x,x) > 0 \}}$.

$\hookrightarrow$ $R(x)$ ensemble des temps de retour possibles.

Définition alternative (+ claire)

$R(x)$ est une partie de $\mathbb{N}^*$ stable par addition (si $P^n(x,x)>0$, $P^m(x,x)>0$, alors $P^{n+m}(x,x)>0$.

Toute partie de ce type s'écrit sous la forme

$$R(x) = h(x)\,\mathbb{N}^* \setminus \{\text{ensemble fini d'entiers}\}$$

exemple : si $R = 3\mathbb{N}^* + 5\mathbb{N}^* = \{3, 5, 6, 8, 9, 10, \dots\}$,

R est presque égal à $\mathbb{N}^*$ ($\mathrm{pgcd}(3,5) = 1$).

Proposition : Si P est irréductible, alors $h(x)$ ne dépend pas de $x \in \mathcal{X}$.

$\longrightarrow$ période $h(P)$ d'une chaîne de Markov irréductible.

On parle de chaîne apériodique si $h(P) = 1$ (et P irréductible).

$$\iff \forall x, \exists n_x : \forall n \geq n_x, \; P^n(x,x) > 0.$$

$$\iff \forall x,y \in \mathcal{X} : \exists n_{x,y} : \forall n \geq n_{x,y}, \; P^n(x,y) > 0.$$

<u>Théorème</u> (convergence vers la loi stationnaire)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CM irréductible sur un espace d'états $\mathcal{X}$.

1) Si la chaîne est apériodique et récurrente positive, alors

$$\mathbb{P}_{\pi_0}[X_n = x] = \pi_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pi(x) \quad \text{loi stationnaire.}$$

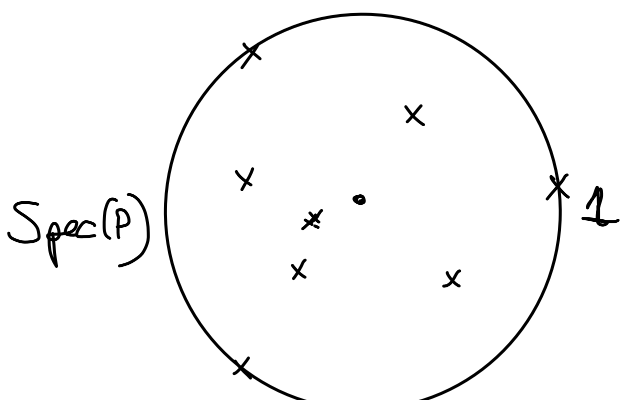
2) Si la chaîne est récurrente nulle ou transiente, alors

$$\pi_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \forall x \in \mathcal{X}.$$

La preuve générale n'est pas facile. Dans le cas d'une chaîne finie (récurrente positive), on peut relier le théorème à un résultat purement algébrique.

<u>Théorème</u> (Perron-Frobenius) :

Soit P une matrice stochastique de taille finie irréductible. Le spectre de P est inclus dans le disque unité $D = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1 \}$



De plus, les v.p. de module 1 sont exactement les racines h-ièmes de l'unité, h = période (P)

Celles-ci sont de multiplicité 1.

On va démontrer le cas particulier où la mesure invariante de P est réversible.

<u>Lemme</u> : Si P est irréductible finie et π est la loi invariante, alors (π réversible) $\Longleftrightarrow$ (P est un opérateur symétrique de l'espace $\ell^2(\pi)$)

En effet, si π est réversible, alors $\forall f, g \in \mathbb{C}^{\mathcal{X}}$:

$$\langle f \mid Pg \rangle_\pi = \sum_x \pi(x) f(x) (Pg)(x)$$

$$= \sum_{x,y} \pi(x) P(x,y) f(x) g(y)$$

$$= \sum_{x,y} \pi(y) P(y,x) f(x) g(y)$$

$$= \sum_y \pi(y)\,(Pf)(y)\,g(y) = \langle Pf \mid g \rangle_\pi .$$

En prenant $f = \delta_x$ et $g = \delta_y$, on montre la réciproque.

Montrons maintenant que le spectre réel d'une matrice stochastique irréductible réversible est inclus dans $[-1, 1]$. Si $Pf = \lambda f$, alors

$$|\lambda|\,\|f\|^2_{\ell^2(\pi)} = |\langle Pf \mid f \rangle_\pi|$$

$$= \Big|\sum_{x,y} \pi(x)\,P(x,y)\,f(y)\,f(x)\Big|$$

$$\leq \frac{1}{2}\sum_{x,y} \pi(y)\,P(y,x)\,f(y)^2 + \frac{1}{2}\sum_{x,y} \pi(x)P(x,y)f(x)^2$$

$$\leq \sum_x \pi(x) f(x)^2 = \|f\|^2_{\ell^2(\pi)}$$

donc $|\lambda| \leq 1$.

De plus, s'il y a égalité, alors $\varepsilon f(x)f(y) = \frac{1}{2} f(x)^2 + \frac{1}{2} f(y)^2$ $\forall x, y$ connectés

pour un signe ε constant.

$\longrightarrow$ unique solution $\longrightarrow$ $+1$ (et -1) sont valeurs propres simples.

Sous l'hypothèse d'apériodicité, -1 ne peut pas être valeur propre

En effet, supposons par l'absurde $Pf = -f$. $\forall n$,

$P^{2n+1} f = -f$. Soit $x \in \mathcal{X}$ | $|f(x)|$ soit maximal.

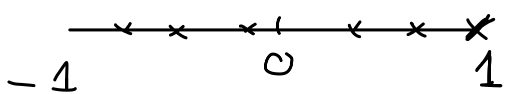
Quitte à remplacer f par $-f$, on peut supposer $f(x) = \max_{y \in \mathcal{X}} |f(y)|$

Alors,

$$-f(x) = \sum_{y\in\mathcal{X}} \underbrace{P^{2n+1}(x,y)}_{>0 \text{ pour tout } y \text{ si } n \text{ assez grand}} f(y)$$

$$> -\sum_{y\in\mathcal{X}} P^{2n+1}(x,y)\, f(x)$$ (il y a inégalité stricte pour $x=y$)

$$= -f(x)$$ Absurde. $\square$



Spec (P) dans le cas apériodique réversible.

Démontrons alors le théorème de convergence dans ce cas.

$P \to {}^t P$ est aussi diagonalisable, de spectre réel

$1 = \lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_N > -1$.

Un vecteur propre pour 1 et l'action de P à droite est la mesure de probabilité invariante π

Si $\pi_0 = c\pi + \sum_{i=2}^{N} c_i v_i$

v_i ↳ vecteur propre à droite pour λ_i,

alors $\pi_n = c\pi + \sum_{i=2}^{N} c_i \underbrace{(\lambda_i)^n}_{\text{puissance d'un réel de module} < 1} v_i$.

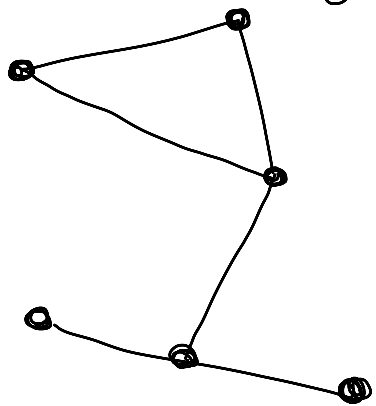
Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \pi_n = c\pi$.

Comme tous les vecteurs π_n sont des probabilités, $c = 1$

$\Rightarrow \pi_n \xrightarrow{n \to +\infty} \pi$.

Exemple : marche aléatoire sur un graphe fini.

On considère un graphe fini, connexe $G = (\mathcal{X}, E)$ avec $\operatorname{card} \mathcal{X} \geq 2$



On lui associe une matrice de transition $P = P_G$ sur l'ensemble de ses sommets :

$$P(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\deg x} & \text{si } x \sim y \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette matrice est irréductible. $\forall x$, $R(x) = \{ n \geq 1 \mid P^n(x,x) > 0 \}$ contient tous les entiers pairs.

($x \to$ un voisin $y \to x \to y \to x \dots \to y \to x$)

La matrice est donc apériodique ssi il existe un cycle impair.

Cherchons une mesure réversible. Il faut, pour toute paire de voisins x, y :

$$\frac{\pi(x)}{\deg x} = \frac{\pi(y)}{\deg y} \longrightarrow \text{par connexité, } \frac{\pi(x)}{\deg x} = \text{cste}$$

donc $\pi(x) = \dfrac{\deg x}{\sum_{y \in \mathcal{X}} \deg y} = \dfrac{\deg x}{2|E|}$ (pour un graphe sans boucle).

Si le graphe a un cycle impair, alors

$$\pi_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{\deg x}{2|E|} \qquad \forall x \in \mathcal{X}.$$

<u>remarque</u> (simulation)

Si l'on veut savoir grâce à une simulation l'aspect de π, il faut faire $N \gg 1$ calculs d'une chaîne de Markov jusqu'au temps $n \gg 1$, et prendre la mesure empirique $\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \delta_{X_n^{(j)}}$.

$\longrightarrow$ assez couteux en temps de calcul $O(Nn)$.

9. Théorèmes ergodiques

La loi stationnaire décrit également les fréquences de visite.

$\mathcal{X}$, P chaîne irréductible

$$V_{x,n} = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}(X_k = x) = \text{nbre de visites de l'état } x \text{ jusqu'au temps } n.$$

<u>Théorème</u> : 1) Si la chaîne est récurrente positive, $\frac{V_{x,n}}{n} \xrightarrow[p.s.]{} \pi(x)$.

2) Si la chaîne est récurrente nulle ou transiente, $\frac{V_{x,n}}{n} \xrightarrow[p.s.]{} 0$.

Ceci est valable – quelque soit la loi initiale π_0.

– sans hypothèse sur la période.

<u>Esquisse de preuve</u> : Le cas transient est trivial, car $V_{x,\infty} < +\infty$ p.s.

Dans le cas récurrent, on se ramène au cas où $\pi_0 = \delta_x$.

Alors, $V_{x,n} = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{1}_{(\tau_x^{(j)} \leq n)}$

et le théorème découle de la loi des grands nombres pour les longueurs des excursions $\tau_x^{(j)} - \tau_x^{(j-1)}$, qui sont i.i.D. $\square$

<u>remarque</u> : ainsi, dans le cas récurrent positif, on peut estimer $\pi(x)$ en faisant une seule simulation de trajectoire de CM.

$$\pi(x) \sim \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}(X_k = x) \; ; \; n \gg 1 .$$

<u>exemple</u> : marche aléatoire sur le cercle $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$.

On sait que la loi invariante est la loi uniforme $\pi(x) = \frac{1}{N} \; \forall x$.

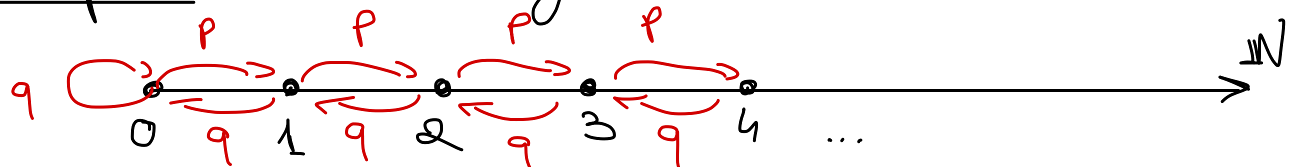
Donc, $\forall x \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$,

$$\frac{1}{N} = \lim_{\substack{n \to +\infty \\ p.s.}} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}(X_k = x) .$$

Plus généralement, si $f : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$:

$$\underbrace{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(k)}_{\text{moyenne spatiale}} = \lim_{\substack{n \to +\infty \\ p.s.}} \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_k)}_{\text{moyenne temporelle}}.$$

<u>exemple</u> : modèle de file d'attente.



$q = 1 - p$

La chaîne est irréductible apériodique ($\exists x \mid P(x,x) > 0$).

récurrence ? Si $p < q$, on trouve une mesure de probabilité réversible :

$\pi(k) \cdot p = \pi(k+1) \cdot q$; $\pi(k) = \left(\frac{p}{q}\right)^k \cdot \pi(0)$

$\pi(k) = \left(1-\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p}{q}\right)^k$ est la loi invariante.

$\Longrightarrow$ la chaîne est récurrente positive

nbre moyen de clients dans la file en temps long : $\frac{p}{q-p} = \frac{p}{1-2p}$.

Si $p > q$, on peut utiliser la représentation suivante de la chaîne :

$$X_n = X_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(\mathbb{1}_{X_{k-1} \geq 1} \xi_k + \mathbb{1}_{X_{k-1}=0} \left(\frac{\xi_k + 1}{2} \right) \right) \quad \text{avec } \xi_n \sim \mathcal{B}_{\pm 1}(p)$$

$$\geq \underbrace{X_0 + \sum_{k=1}^{n} \xi_k}_{\text{par la loi des gds nombres}} \longrightarrow +\infty \quad \text{car } \mathbb{E}[\xi_k] = 2p-1 > 0$$

donc la marche est transiente !