Sans document ni calculatrice. Durée : 1 heure. Les questions sont la plupart du temps indépendantes, et elles peuvent être traitées séparément, quitte à admettre les résultats de questions précédentes.

EXERCICE 1

Un mathématicien ivre descend des escaliers. À chaque pas, il descend aléatoirement 1 marche ou 2 marches. On suppose que chaque pas est indépendant, et que la personne descend lors d'un pas

- une marche avec probabilité $\frac{2}{3}$,
- et deux marches avec probabilité $\frac{1}{3}$.

On note M_n le nombre total de marches descendues après n pas.

1. Donner la loi de M_1, son espérance et sa variance.
2. Montrer que les valeurs possibles pour le nombre aléatoire M_n sont tous les entiers compris entre n et $2n$.
3. Si $M_n = n + k$ avec $0 \leq k \leq n$, c'est-à-dire que la personne a descendu $n + k$ marches en n pas, combien de pas de 2 marches la personne a-t-elle faits lors de ces n pas ? et combien de pas de 1 marche ? (on pourra commencer par traiter les cas $k = 0$ et $k = 1$).
4. Calculer $\mathbb{P}[M_n = n + k]$ pour tout k compris entre 0 et n.
5. Calculer l'espérance de M_n.

EXERCICE 2

Un test pour le dépistage d'une maladie étant en phase de mise au point, on dispose des précisions suivantes :

- lorsqu'une personne est atteinte de la maladie, le test s'avère positif avec une probabilité de 0,95.
- lorsqu'une personne n'est pas malade, le test s'avère quand même positif avec une probabilité de 0,02.

1. On sait que, dans une région donnée, le pourcentage de malades est de 4%. Sachant qu'une personne a un résultat positif au test, calculer la probabilité conditionnelle pour qu'elle soit saine.
2. Cent personnes de cette région (les choix de ces personnes sont supposés indépendants), montent dans un avion. Soit X le nombre de personnes parmi elles qui sont malades. Donner la loi de X, son espérance, et sa variance. Donner la probabilité qu'il y ait au moins une personne malade parmi elles.
3. Sachant qu'il y a au moins une personne malade parmi elles, quelle est la probabilité qu'il y en ait au plus deux ?

EXERCICE 1 — CORRIGÉ

1. La loi de M_1 est

$$\mathbb{P}[M_1 = 1] = \frac{2}{3} \quad ; \quad \mathbb{P}[M_1 = 2] = \frac{1}{3} \quad ; \quad \mathbb{P}[M_1 = k \notin \{1,2\}] = 0.$$

   Son espérance est $\mathbb{E}[M_1] = \frac{2}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 2 = \frac{4}{3}$. Comme $\mathbb{E}[(M_1)^2] = \frac{2}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 4 = 2$, on obtient pour variance

$$\mathrm{var}(M_1) = 2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}.$$

2. Si l'on considère n pas, la personne fait un certain nombre $k \in [\![0, n]\!]$ de pas de deux marches, et les autres $n-k$ pas sont forcément des pas d'une marche. Alors, le nombre total de marches descendues est

$$M_n = 2 \times k + 1 \times (n-k) = n + k.$$

   Comme k est un nombre arbitraire entre 0 et n, M_n prend pour valeurs possibles tout entier entre n et $2n$.
3. D'après la discussion précédente, si $M_n = n+k$, alors la personne a fait k pas de 2 marches, et $n-k$ pas d'une marche.
4. Pour faire k pas de 2 marches et $n-k$ pas d'une marche, il faut choisir les k pas parmi n qui seront des pas de 2 marches ($\binom{n}{k}$ choix), qui auront chacun probabilité $\frac{1}{3}$; les $n-k$ autres pas auront chacun probabilité $\frac{2}{3}$. Donc,

$$\mathbb{P}[M_n = n+k] = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}.$$

5. On reconnaît pour $M_n - n$ une loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{1}{3})$:

$$\mathbb{P}[M_n - n = k] = \mathbb{P}[M_n = n+k] = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}.$$

   Donc,

$$\mathbb{E}[M_n - n] = \frac{n}{3} \quad ; \quad \mathbb{E}[M_n] = \frac{4n}{3}.$$

EXERCICE 2 — CORRIGÉ

1. On note S l'événement "la personne est saine", M l'événement "la personne est malade", $+$ et $-$ les événements "test positif" et "test négatif". On veut calculer

$$\mathbb{P}[S|+] = \frac{\mathbb{P}[S \cap +]}{\mathbb{P}[+]}.$$

   Par la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}[+] = \mathbb{P}[+|S]\,\mathbb{P}[S] + \mathbb{P}[+|M]\,\mathbb{P}[M] = \frac{2}{100} \times \frac{96}{100} + \frac{95}{100} \times \frac{4}{100} = \frac{572}{10000} = \frac{143}{2500}.$$

   D'autre part,

$$\mathbb{P}[S \cap +] = \mathbb{P}[+|S]\,\mathbb{P}[S] = \frac{2}{100} \times \frac{96}{100} = \frac{48}{2500}.$$

   Donc, $\mathbb{P}[S|+] = \frac{48}{143}$ (ce qui est un taux relativement élevé de "faux positifs").
2. La variable X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(100, 1/25)$. Son espérance est $\mathbb{E}[X] = np = 100 \times \frac{1}{25} = 4$, et sa variance est $\mathrm{var}(X) = np(1-p) = 100 \times \frac{1}{25} \times \frac{24}{25} = \frac{96}{25}$. La probabilité pour que $X \geq 1$ est

$$\mathbb{P}[X \geq 1] = 1 - \mathbb{P}[X = 0] = 1 - \left(\frac{24}{25}\right)^{100}.$$

3. La probabilité pour que X soit égale à 1 ou 2 est

$$\mathbb{P}[X = 1] + \mathbb{P}[X = 2] = \binom{100}{1} \frac{1}{25} \left(\frac{24}{25}\right)^{99} + \binom{100}{2} \left(\frac{1}{25}\right)^2 \left(\frac{24}{25}\right)^{98} = \frac{294}{25} \left(\frac{24}{25}\right)^{98}.$$

   On conclut que $\mathbb{P}[1 \leq X \leq 2 | 1 \leq X] = \frac{294}{25} \frac{\left(\frac{24}{25}\right)^{98}}{1 - \left(\frac{24}{25}\right)^{100}}$.