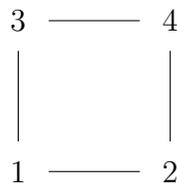


- Il y a deux choses à démontrer : il faut montrer que l'algorithme est bien défini à chaque étape, et que le  $N$ -coloriage qu'il fournit est bien un coloriage propre. Pour le premier point, à l'étape  $i + 1$ , comme  $\deg(i + 1) \leq \deg G < N$ , l'ensemble  $C_{i+1} = [1, N] \setminus \{c(j), j \leq i \text{ et } j \sim i + 1\}$  est non vide. On peut donc bien choisir  $c(i + 1)$  dans cet ensemble. Pour le second point, considérons une arête  $\{x, y\}$  du graphe  $G$ ; on peut supposer sans perte de généralité  $x < y$ . Alors,  $c(y) \in C_y$ , et par construction  $c(x) \notin C_y$ , donc  $c(x) \neq c(y)$ . Ainsi, l'algorithme fournit bien un  $N$ -coloriage propre avec probabilité 1.
- On a représenté ci-dessous les 18 coloriages propres du carré avec des couleurs dans  $[1, 3]$  :

2 1	3 1	2 3	3 2	3 1	2 1
1 2	1 3	1 2	1 3	1 2	1 3
$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
1 2	3 2	1 3	3 1	3 2	1 2
2 1	2 3	2 1	2 3	2 1	2 3
$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
2 3	1 3	2 1	1 2	1 3	2 3
3 2	3 1	3 2	3 1	3 2	3 1
$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

On a écrit en dessous de chaque coloriage propre sa probabilité pour l'algorithme de coloriage associé à la numérotation suivante des sommets du carré :



Chacun de ces coloriages a une probabilité strictement positive; c'est un fait général, car tout coloriage propre d'un graphe  $G = (V, E)$  peut être construit récursivement en suivant l'algorithme de la question précédente. En revanche, les coloriages tels que  $c(2) \neq c(3)$  ont probabilité  $\frac{1}{12} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ , car il y a deux choix possibles pour les couleurs  $c(2)$  et  $c(3)$  puis un seul choix possible pour  $c(4)$ , tandis que les coloriages avec  $c(2) = c(3)$  ont probabilité  $\frac{1}{24} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ , car après le choix des couleurs  $c(2)$  et  $c(3)$ , il reste deux choix possibles pour  $c(4)$ . La probabilité des coloriages  $N$ -propres n'est donc pas uniforme.

- Le programme suivant prend en argument un graphe  $G$  et un entier  $N \geq 1$ , et calcule un coloriage propre suivant l'algorithme des questions précédentes :

```

def ColoriagePropre(G, N):
    res = {}
    for v in G.vertices():
        Cv = range(1, N+1)
        for w in G.neighbors(v):

```

```

        if w in res.keys():
            if res[w] in Cv:
                Cv.remove(res[w])
    k = len(Cv)
    res[v] = Cv[floor(k*random())]
return res

```

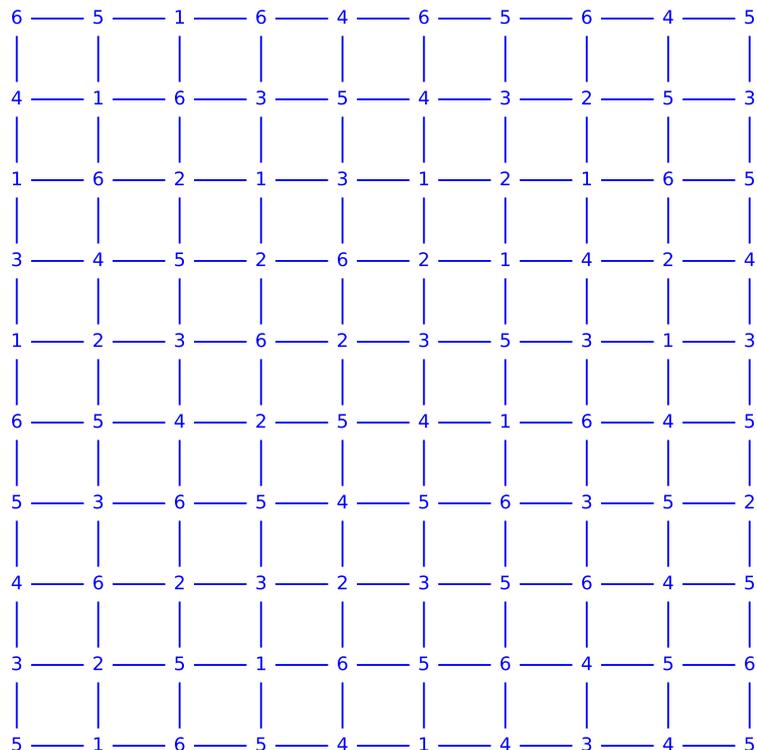
Le résultat de l'algorithme est un dictionnaire  $c$  dont la valeur  $c[v]$  est la couleur du coloriage propre. Le programme suivant utilise `ColoriagePropre` pour dessiner un  $N$ -coloriage propre de la grille 2-dimensionnelle de taille  $m \times m$  :

```

def ColoriageGrille(m, N):
    res = ColoriagePropre(graphs.GridGraph([m,m]), N)
    G = Graphics()
    for x in range(0,m):
        G += line([(x,0),(x,m-1)])
        G += line([(0,x),(m-1,x)])
    for x in range(0,m):
        for y in range(0,m):
            G += text(str(res[(x,y)]), (x,y), background_color="white")
    G.set_aspect_ratio(1)
    G.axes(False)
    return G

```

En voici un pour  $m = 10$  et  $N = 6$  :



4. Un 2-coloriage propre de la grille de taille  $m \times m$  est donné par  $c(x, y) = 1$  si  $x - y$  est pair, et  $c(x, y) = 2$  si  $x - y$  est impair. Or, cette grille a pour degré maximal 4, qui est strictement plus grand que  $N = 2$ .
5. La suite de variables aléatoires  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à valeurs dans  $\text{CP}(G, N)$  est définie par une équation de récurrence

$$C_{n+1} = f(C_n, \xi_n),$$

avec les  $\xi_n = (V_n, U_n)$  qui sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées dans  $V \times [0, 1]$ . Par le théorème de représentation des chaînes de Markov,  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est donc bien une chaîne de Markov; calculons ses probabilités de transition. Si  $c = C_0$  est fixée, les valeurs possibles pour  $d = C_1$  sont les coloriage qui diffèrent au plus en un site  $v \in V$ , à savoir, le site  $v = V_0$  choisi uniformément dans  $V$ . Ceci montre déjà que  $P(c, d) = 0$  si  $c$  et  $d$  diffèrent en plus d'un site. Supposons maintenant que  $c$  et  $d$  diffèrent uniquement en  $v$ , avec  $c(v) \neq d(v)$ . La probabilité pour que  $v = V_0$  est  $\frac{1}{\text{card } V}$ , puis, il y a une probabilité  $\frac{1}{\text{card } E_{c,v}} = \frac{1}{\text{card } E_{d,v}}$  pour que la couleur  $d(v)$  soit choisie, ce choix étant déterminé par la variable uniforme  $U_0$ . Ainsi,

$$P(c, d) = \frac{1}{\text{card } V \times \text{card } E_{c,v}}.$$

Supposons finalement  $c = d$ . Ceci veut dire que l'on a choisi l'un des sommets  $V_0 = v$  dans  $V$ , puis que lors du choix de la couleur  $d(v)$ , on a de nouveau choisi  $c(v)$ . Conditionnellement à  $V_0 = v$ , ce second choix a lieu avec probabilité  $\frac{1}{\text{card } E_{c,v}}$ . Par conséquent,

$$P(c, c) = \sum_{v \in V} \mathbb{P}[V_0 = v] \frac{1}{\text{card } E_{c,v}} = \frac{1}{\text{card } V} \sum_{v \in V} \frac{1}{\text{card } E_{c,v}}.$$

La matrice de transition de la chaîne  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est donc bien la matrice  $P$ .

6. Pour construire  $c'$ , on part de  $c$  et on garde les mêmes couleurs  $c'(j) = c(j)$  pour tout  $j \neq k$ . On recolorie ensuite les sommets  $l \in I$  un à un, de la façon suivante. Notons  $l_1, l_2, \dots, l_{|I|}$  les éléments de  $I$ , et  $c_0 = c$ . On va construire des  $N$ -coloriages propres  $c_1, \dots, c_{|I|}$  tels que  $c$  et  $c_b$  correspondent pour tout sommet qui n'est pas dans  $\{l_1, \dots, l_b\}$ , et tels que  $c_b(l_a) \neq d(k)$  pour tout  $a \in [1, b]$ . Supposons la construction effectuée jusqu'au rang  $b - 1$ . Au rang  $b$ , comme  $N \geq \deg G + 2$ , l'ensemble

$$[1, N] \setminus \{c_{b-1}(w), w \text{ voisin de } l_b \text{ dans } G\}$$

contient au moins deux éléments, donc au moins un qui est différent de  $d(k)$ . Si l'on modifie  $c_{b-1}$  en changeant uniquement la couleur du sommet  $l_b$  et en choisissant l'une de ces couleurs différente de  $d(k)$ , alors le nouveau coloriage  $c_b$  est encore propre, et il vérifie bien les hypothèses requises pour les sommets  $l_1, \dots, l_b$ .

On a donc trouvé des  $N$ -coloriages propres  $c_1, \dots, c_{|I|}$  qui sont obtenus par des transitions de la chaîne de Markov, et tel que le dernier  $N$ -coloriage  $c_{|I|}$  :

- correspond à  $c$  sur tout  $V \setminus I$ , et en particulier sur  $[1, k - 1]$ .
- a une couleur différente de  $d(k)$  sur tout  $I$ .

On définit maintenant  $c'$  en changeant uniquement la couleur de  $c_{|I|}$  en  $k$ , et en la posant égale à  $d(k)$ . Expliquons pourquoi  $c'$  est encore un coloriage propre. Il s'agit de montrer que  $d(k) \in E_{c_{|I|}, k}$  est une couleur possible pour  $k$  relativement à  $c_{|I|}$ . Si  $j$  est un voisin de  $k$  dans  $G$ , alors :

- soit  $j < k$  : dans ce cas,  $c_{|I|}(j) = d(j) \neq d(k)$  car  $d$  est propre.
- soit  $j > k$  : dans ce cas, si  $j \notin I$ , alors  $c_{|I|}(j) = c(j) \neq d(k)$  par définition de  $I$ , et si  $j \in I$ , alors par construction  $c_{|I|}(j) \neq d(k)$ .

On a donc obtenu un coloriage  $c'$  par  $|I| + 1$  transitions depuis  $c$ , et qui vérifie les hypothèses voulues. Notons que  $c'$  et  $d$  correspondent sur tous les sommets d'indice inférieur à  $k$ , au lieu de  $k - 1$  pour  $c$  et  $d$ . Par induction sur  $k$ , il existe donc des transitions de  $c$  à  $d$ , et la chaîne de Markov  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est irréductible. Par ailleurs,  $P(c, c) \neq 0$  pour tout  $c \in \text{CP}(G, N)$ , donc la chaîne est apériodique.

7. Pour montrer que la mesure uniforme est réversible, il suffit de montrer que si  $c$  et  $d$  diffèrent en exactement un site  $v$ , alors  $P(c, d) = P(d, c)$ . Or, on a dans ce cas  $E_{c,v} = E_{d,v}$ , donc c'est évident. Par le théorème ergodique pour les chaînes de Markov, on en déduit que pour tout coloriage  $N$ -propre  $c$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[C_n = c] = \frac{1}{\text{card CP}(G, N)}.$$

Les coloriations aléatoires  $C_n$  avec  $n$  grand sont donc quasiment uniformes.

8. On va traiter un peu plus que la question en écrivant un programme qui montre carrément la chaîne de Markov tout entière, sous forme d'une animation. Le programme suivant renvoie soit la  $n$ -ième étape de la chaîne de Markov sur un graphe  $G$ , soit toute la liste  $(C_0, C_1, \dots, C_n)$  :

```
def ColoriageMarkov(G, N, n, liste=False):
    C = ColoriagePropre(G,N)
    if liste:
        res = [copy(C)]
    for k in range(0,n):
        v = G.random_vertex()
        Cv = range(1,N+1)
        for w in G.neighbors(v):
            if C[w] in Cv:
                Cv.remove(C[w])
        k = len(Cv)
        C[v] = Cv[floor(k*random())]
        if liste:
            res.append(copy(C))
    if liste:
        return res
    else:
        return C
```

Avec la liste, on peut créer des animations, par exemple lorsque le graphe est la grille  $m \times m$ , avec  $N = 6$  :

```
def AnimationGrille(m,n):
    res = ColoriageMarkov(graphs.GridGraph([m,m]), 6, n, liste=True)
    resG = []
    for c in res:
        G = Graphics()
```

```

for x in range(0,m):
    G += line([(x,0),(x,m-1)], color="black")
    G += line([(0,x),(m-1,x)], color="black")
for x in range(0,m):
    for y in range(0,m):
        if c[(x,y)] == 1:
            G += circle((x,y), 0.1, rgbcolor = (0,0,1), fill=True)
        if c[(x,y)] == 2:
            G += circle((x,y), 0.1, rgbcolor = (0,0.5,0.5), fill=True)
        if c[(x,y)] == 3:
            G += circle((x,y), 0.1, rgbcolor = (0,1,0), fill=True)
        if c[(x,y)] == 4:
            G += circle((x,y), 0.1, rgbcolor = (0.5,0.5,0), fill=True)
        if c[(x,y)] == 5:
            G += circle((x,y), 0.1, rgbcolor = (1,0,0), fill=True)
        if c[(x,y)] == 6:
            G += circle((x,y), 0.1, rgbcolor = (0.5,0,0.5), fill=True)
G.set_aspect_ratio(1)
G.axes(False)
resG.append(G)
return sage.plot.animate.Animation(resG)

```

Voici le résultat avec  $m = 5$ ,  $N = 6$  et  $n = 100$  (cliquer sur l'image pour avoir l'animation ; ne marche pas avec tous les lecteurs pdf).

9. L'ensemble des couplages entre deux mesures de probabilités  $\mu$  et  $\nu$  sur un ensemble fini  $E = [1, A]$  est une partie fermée de  $[0, 1]^{E^2}$ . En effet, c'est l'ensemble des fonctions  $M \in [0, 1]^{E^2}$  qui vérifient  $\sum_{x \in E} M(x, y) = \nu(y)$  et  $\sum_{y \in E} M(x, y) = \mu(x)$  pour tous  $x, y \in E$ ; clairement, ces conditions sont stables par passage à la limite. Donc, on a un fermé borné dans un espace de dimension fini, c'est-à-dire un compact. Avec  $E = \text{CP}(G, N)$ , la fonction qui à  $M \in [0, 1]^{E^2}$  associe  $\sum_{c, d \in E} M(c, d) \rho(c, d)$  est continue, donc elle atteint son minimum sur l'ensemble compact des couplages entre  $\mu$  et  $\nu$ . Il en va de même pour la fonction qui à  $M$  associe  $\sum_{c, d \in E} M(c, d) 1_{c \neq d}$ .

Pour tous coloriage  $c$  et  $d$ , on a bien sûr  $1_{c \neq d} \leq \rho(c, d)$ . Par conséquent, pour tout couplage  $M$ ,

$$\sum_{c,d \in E} M(c, d) 1_{c \neq d} \leq \sum_{c,d \in E} M(c, d) \rho(c, d),$$

et c'est en particulier vrai pour un couplage  $M_0$  entre  $\mu$  et  $\nu$  tel que le terme de droite de l'inégalité ci-dessus réalise la borne inférieure, c'est-à-dire soit égal à  $R(\mu, \nu)$ . On a alors

$$d_{\text{TV}}(\mu, \nu) \leq \sum_{c,d \in E} M_0(c, d) 1_{c \neq d} \leq \sum_{c,d \in E} M_0(c, d) \rho(c, d) = R(\mu, \nu).$$

10. La construction de la fonction  $a$  est la suivante. Il suffit de définir  $a(x, k)$  et  $a(x, k+1)$ , puisque pour les autres valeurs on peut prendre  $a(x, l) = \lceil xl \rceil$ . On définit aussi  $a(x, k+1)$  par  $\lceil x(k+1) \rceil$ ; on a bien  $a(U, k+1)$  uniforme dans  $[1, k+1]$  si  $U$  est uniforme sur  $[0, 1]$ . On pose ensuite

$$a(x, k) = \begin{cases} a(x, k+1) & \text{si } a(x, k+1) \leq k, \\ \lceil k(x(k+1) - k) \rceil & \text{si } a(x, k+1) = k+1. \end{cases}$$

L'idée est que si  $\lceil x(k+1) \rceil$  donne un entier plus petit que  $k$ , alors on le choisit, et sinon, le nombre réel  $x(k+1) - k$  est entre 0 et 1 et on prend l'entier approchant  $k$  fois cette valeur par excès pour retrouver de nouveau un entier plus petit que  $k$ . Par construction,

$$\mathbb{P}[a(U, k) \neq a(U, k+1)] = \mathbb{P}[a(U, k+1) = k+1] = \frac{1}{k+1}.$$

Soit  $c$  et  $d$  avec  $\rho(c, d) = 1$ , et  $v$  le sommet en lequel  $c$  et  $d$  diffèrent. On construit  $c'$  et  $d'$  en effectuant une transition de la chaîne de Markov issue de  $c$  ou de  $d$ , à l'aide des mêmes variables uniformes  $U_0 \in [0, 1]$  et  $V_0 \in V$ . On notera  $m_v$  le nombre de voisins de  $v$

- Si  $V_0 = v$ , ce qui arrive avec probabilité  $\frac{1}{m}$ , alors  $c' = c = d = d'$  partout en dehors de  $v$ , et on a aussi  $c'(v) = d'(v) = e_{c,v,a(U_0, |E_{c,v}|)}$  puisque les ensembles  $E_{c,v}$  et  $E_{d,v}$  sont les mêmes. Donc, avec probabilité  $\frac{1}{m}$ ,  $c' = d'$  et  $\rho(c', d') = 0$ .
- Si  $V_0 = w$  n'est pas voisin de  $v$ , ce qui arrive avec probabilité  $\frac{m-m_v-1}{m}$ , alors  $c' = c = d = d'$  partout en dehors de  $\{v, w\}$ , et on a aussi  $c'(w) = d'(w) = e_{c,w,a(U_0, |E_{c,w}|)}$ , puisque de nouveau les ensembles  $E_{c,w}$  et  $E_{d,w}$  sont les mêmes. On a en revanche  $c'(v) = c(v) \neq d(v) = d'(v)$ , donc  $\rho(c', d') = 1$ .
- Supposons finalement que  $V_0 = w$  soit un voisin de  $v$ , ce qui arrive avec probabilité  $\frac{m_v}{m}$ . Les ensembles de couleurs possibles  $E_{c,w}$  et  $E_{d,w}$  peuvent différer, car ils ne contiennent pas  $c(v)$  ou  $d(v)$ , ce qui impose des restrictions différentes sur ces ensembles. S'il s'agit des mêmes ensembles, alors le même raisonnement que précédemment montre que  $c'(w) = d'(w)$  et donc que  $\rho(c', d') = 1$ . Si ce ne sont pas les mêmes ensembles, alors la différence de cardinaux  $|E_{c,w} - E_{d,w}|$  est au plus égale à 1. Sans perte de généralités, on peut donc supposer  $k = |E_{c,w}| = |E_{d,w}| - 1$ , et on a par ailleurs  $k+1 \geq N - \deg G$ . Notons

$$\begin{aligned} E_{c,w} &= \{e_1, \dots, e_k\} \\ E_{d,w} &= \{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}\}. \end{aligned}$$

Avec la fonction  $a$  construite précédemment, on a  $c'(w) = d'(w) = e_{a(U_0, k)}$  avec probabilité plus grande que  $\frac{k}{k+1}$ , auquel cas  $\rho(c', d') = 1$ . L'autre cas donne  $\rho(c', d') = 2$ , avec probabilité plus petite que  $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{N - \deg G}$  (conditionnellement au fait que  $w$  ne soit pas un voisin de  $v$ ).

On conclut en réunissant les contributions que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\rho(c', d')] &\leq \frac{m - m_v - 1}{m} + \frac{m_v}{m} \left( 1 + \frac{1}{N - \deg G} \right) = 1 - \frac{1}{m} + \frac{m_v}{m} \frac{1}{N - \deg G} \\ &\leq 1 - \frac{1}{m} + \frac{\deg G}{m} \frac{1}{N - \deg G} = 1 - \frac{1}{m} \left( \frac{N - 2 \deg G}{N - \deg G} \right).\end{aligned}$$

On a construit conjointement  $c'$  et  $d'$  sous les lois  $P(c, \cdot)$  et  $P(d, \cdot)$ , donc l'espérance à gauche est celle sous un couplage de ces lois. La quantité est donc plus grande que  $R(P(c, \cdot), P(d, \cdot))$ . Notons que le terme bornant l'espérance est strictement plus petit que 1, puisque l'on suppose  $N > 2 \deg G$ .

11. Si  $c$  et  $d$  sont deux coloriage arbitraires, choisissant une suite de coloriage  $c_0, c_1, \dots, c_r$  avec  $r = \rho(c, d)$ ,  $c = c_0$ ,  $d = c_r$  et  $\rho(c_{i-1}, c_i) = 1$ , on obtient

$$R(P(c, \cdot), P(d, \cdot)) \leq \sum_{i=1}^r R(P(c_{i-1}, \cdot), P(c_i, \cdot)) \leq r \left( 1 - \frac{1}{m} \left( \frac{N - 2 \deg G}{N - \deg G} \right) \right)$$

en utilisant l'inégalité triangulaire pour  $R$ , et le résultat de la question précédente. C'est ce que l'on veut puisque  $r = \rho(c, d)$ .

12. Calculons la première marginale de la loi  $L$  définie par l'énoncé :

$$\begin{aligned}\sum_{d' \in \text{CP}(G, N)} L(c', d') &= \sum_{c, d, d'} M_{\mu, \nu}(c, d) M_{c, d}(c', d') \\ &= \sum_{c, d} M_{\mu, \nu}(c, d) P(c, c') \quad \text{puisque } M_{c, d} \text{ couple } P(c, \cdot) \text{ et } P(d, \cdot), \\ &= \sum_c \mu(c) P(c, c') \quad \text{puisque } M_{\mu, \mu} \text{ couple } \mu \text{ et } \nu, \\ &= (\mu P)(c').\end{aligned}$$

On montre de même que  $\sum_{c' \in \text{CP}(G, N)} L(c', d') = (\nu P)(d')$ , donc  $L$  est bien un couplage entre  $\mu P$  et  $\nu P$ . Estimons alors  $\sum_{c', d' \in \text{CP}(G, N)} L(c', d') \rho(c', d')$ , qui est plus grand que  $R(\mu P, \nu P)$  :

$$\begin{aligned}\sum_{c', d' \in \text{CP}(G, N)} L(c', d') \rho(c', d') &= \sum_{c, d, c', d'} M_{\mu, \nu}(c, d) M_{c, d}(c', d') \rho(c', d') \\ &= \sum_{c, d} M_{\mu, \nu}(c, d) R(P(c, \cdot), P(d, \cdot)) \quad \text{par définition de } M_{c, d} \\ &\leq \left( 1 - \frac{1}{m} \left( \frac{N - 2 \deg G}{N - \deg G} \right) \right) \sum_{c, d} M_{\mu, \nu}(c, d) \rho(c, d) \\ &\leq \left( 1 - \frac{1}{m} \left( \frac{N - 2 \deg G}{N - \deg G} \right) \right) R(\mu, \nu) \quad \text{par définition de } M_{\mu, \nu}.\end{aligned}$$

13. Si  $\mu_0$  est la loi de  $C_0$  coloriage propre obtenu par l'algorithme "naif", alors comme la mesure uniforme  $\mu_\infty$  est invariante, on peut écrire :

$$\begin{aligned}d_{\text{TV}}(\mu_n, \nu_\infty) &\leq R(\mu_n, \mu_\infty) = R(\mu_0 P^n, \mu_\infty P^n) \\ &\leq R(\mu_0, \mu_\infty) \left( 1 - \frac{1}{m} \left( \frac{N - 2 \deg G}{N - \deg G} \right) \right)^n,\end{aligned}$$

et la quantité  $R(\mu_0, \mu_\infty)$  peut être bornée par  $K = \max_{c,d \in \text{CP}(G,N)} \rho(c, d)$ . Cette distance maximale dans le graphe de la chaîne de Markov est plus petite que  $\sum_{i=1}^m 1 + m - i = \frac{m(m+1)}{2}$  d'après le raisonnement ayant montré l'irréductibilité de la chaîne. On a donc une estimée de la vitesse de convergence de  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vers la loi uniforme.