# Feuille d'exercices 1

Chaînes de Markov 2024-2025

*Objectifs : manipuler une matrice stochastique et les lois marginales d'une chaîne de Markov (1,4), manipuler les probabilités de transition d'une chaîne de Markov (5), utiliser la propriété de Markov simple (2), utiliser la représentation d'une chaîne de Markov en termes d'aléas indépendants (3,6), décomposer toute probabilité d'un événement en somme de probabilités trajectorielles (7,8).*

**1. Chaîne de Markov à deux états.** On considère l'espace $\mathfrak{X} = \{1, 2\}$, et une matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

(a) À quelles conditions sur $a, b, c, d$ la matrice $P$ est-elle une matrice stochastique ? On supposera dans tout ce qui suit que ces conditions sont réunies. Réécrire dans ce cas $P$ en fonction seulement des paramètres $a$ et $d$. Dessiner le graphe dirigé $\mathcal{G}_P$ associé à cette matrice (qui peut dépendre des valeurs de $a$ et $d$).

(b) On suppose pour les questions suivantes $(a, d) \notin \{(0, 0), (1, 1)\}$. Montrer que les deux vecteurs lignes

$$\pi = \left(\frac{1-d}{2-a-d}, \frac{1-a}{2-a-d}\right) \quad \text{et} \quad \eta = (1, -1)$$

sont des vecteurs propres pour l'action à droite de $P$ : $\pi P = \lambda_\pi \, \pi$ et $\eta P = \lambda_\eta \, \eta$, pour des valeurs propres réelles $\lambda_\pi$ et $\lambda_\eta$ que l'on calculera en fonction de $a$ et $d$.

(c) Soit $\pi_0$ une mesure de probabilité sur $\{1, 2\}$, et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la chaîne de Markov sur l'espace d'états $\{1, 2\}$ de matrice $P$ et de mesure initiale $\pi_0$. Montrer qu'il existe un coefficient $\beta \in \mathbb{R}$ qu'on calculera en fonction de $\pi_0$ et de $P$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

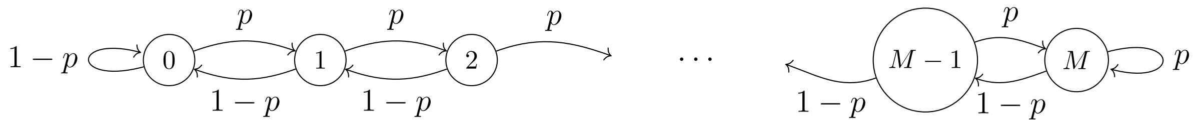
$$\mathbb{P}[X_n = 1] = \frac{1-d}{2-a-d} + \beta\,(a+d-1)^n;$$
$$\mathbb{P}[X_n = 2] = \frac{1-a}{2-a-d} - \beta\,(a+d-1)^n.$$

On pourra décomposer $\pi_0$ sur la base $(\pi, \eta)$ de $\mathbb{R}^2$.

(d) Que peut-on dire de $\mathbb{P}[X_n = i]$ ($i \in \{1, 2\}$) lorsque $n$ tend vers l'infini ?

(e) On suppose que $d = 1$ et $a < 1$. Montrer que $\mathbb{P}[\lim_{n\to\infty} X_n = 2] = 1$.

**2. Modèle de la ruine du joueur avec $p \neq \frac{1}{2}$.** Dans cet exercice, on reprend le modèle de la ruine du joueur : étant fixé un paramètre $p \in (0, 1)$ et un entier $M \geq 1$, on considère la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'espace d'états $\mathfrak{X} = [\![0, M]\!]$ et de matrice de transition $P$ dont le graphe $\mathcal{G}_P$ est :




On suppose dans tout ce qui suit $p \neq \frac{1}{2}$, le cas $p = \frac{1}{2}$ ayant été vu dans le cours. On note

$$\tau = \tau((X_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \inf\{n \in \mathbb{N} \mid X_n = 0 \text{ ou } X_n = M\} \in \mathbb{N} \sqcup \{+\infty\};$$

c'est un temps aléatoire qu'on peut voir comme une fonction de la trajectoire aléatoire $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(a) On suppose $X_0 \notin \{0, M\}$. Écrire une équation reliant

$$\tau((X_n)_{n\in\mathbb{N}}) \quad \text{et} \quad \tau((X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}),$$

et, si les temps $\tau((X_n)_{n\in\mathbb{N}})$ et $\tau((X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}})$ sont finis, une autre équation reliant

$$X_{\tau((X_n)_{n\in\mathbb{N}})} \quad \text{et} \quad X_{\tau((X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}})+1}.$$

(b) Pour $k \in [\![0, M]\!]$, on pose

$$f(k) = \mathbb{P}_k[\tau < +\infty \text{ et } X_\tau = 0];$$
$$g(k) = \mathbb{E}_k[\tau].$$

Calculer $f(0)$, $g(0)$, $f(M)$ et $g(M)$. En utilisant la propriété de Markov, retrouver les relations de récurrence d'ordre 2 vérifiées par $f$ et $g$ :

$$\forall k \in [\![1, M-1]\!]\,,\ \ f(k) = p\, f(k+1) + (1-p)\, f(k-1);$$
$$\forall k \in [\![1, M-1]\!]\,,\ \ g(k) = p\, g(k+1) + (1-p)\, g(k-1) + 1.$$

(c) On pose $\delta_f(k) = f(k+1) - f(k)$, pour $k \in [\![0, M-1]\!]$. Que vaut $\sum_{k=0}^{M-1} \delta_f(k)$ ? Montrer que $(\delta_f(k))_{k\in[\![0,M-1]\!]}$ est une suite géométrique, et déterminer les valeurs de cette suite. En déduire que

$$f(k) = \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^k - \left(\frac{1-p}{p}\right)^M}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^M} \quad \text{pour tout } k \in [\![0, M]\!].$$

(d) On pose $\delta_g(k) = g(k+1) - g(k) - \frac{1}{1-2p}$, pour $k \in [\![0, M-1]\!]$. Déterminer les valeurs de cette suite, et en déduire que

$$g(k) = \frac{M}{2p-1}\,\frac{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^k}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^M} - \frac{k}{2p-1} \quad \text{pour tout } k \in [\![0, M]\!].$$

(e) On fait tendre $M$ vers l'infini. Commenter le comportement limite des formules obtenues pour $f(k)$ et $g(k)$, selon que $p < \frac{1}{2}$ ou $p > \frac{1}{2}$.

**3. Modèle de file d'attente, I.** On considère la matrice de transition sur l'espace $\mathfrak{X} = \mathbb{N}$ donnée par

$$P(0,1) = 1 \quad ; \quad \forall k \geq 1,\ \ P(k, k+1) = p \quad ; \quad \forall k \geq 1,\ \ P(k, k-1) = 1-p,$$

$p$ étant un paramètre réel dans $(0, 1)$.

(a) Soit $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables i.i.d. de loi $\mathbb{P}[\xi_n = 1] = 1 - \mathbb{P}[\xi_n = -1] = p$. On considère la suite aléatoire $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$X_n = X_0 + \sum_{k=1}^{n} (\xi_k\, 1_{(X_{k-1}>0)} + 1_{(X_{k-1}=0)}),$$

$X_0$ étant indépendant de $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de loi notée $\pi$. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov de loi $\mathbb{P}_{(P,\pi)}$ sur l'espace $\mathbb{N}$.

(b) On suppose $p > \frac{1}{2}$. Comparer $X_n$ et $\sum_{k=1}^{n} \xi_k$, et montrer que $\mathbb{P}_\pi[\lim_{n\to\infty} X_n = +\infty] = 1$ quelque soit la loi initiale $\pi$.

(c) On suppose $p < \frac{1}{2}$. Montrer que

$$0 \leq X_n \leq X_0 + \sum_{k=1}^{n} \xi_k + 2 \sum_{k=1}^{n} 1_{(X_{k-1}=0)}.$$

En déduire à l'aide de la loi des grands nombres que $\mathrm{card}(\{n \in \mathbb{N} \,|\, X_n = 0\}) = +\infty$ a probabilité 1 sour $\mathbb{P}_\pi$. Que vaut alors $\mathbb{P}_\pi\,[\lim_{n\to\infty} X_n = +\infty]$ ?

(d) (Question bonus). On se donne deux suites de variables aléatoires indépendantes $(A_k)_{k\geq 1}$ et $(B_k)_{k\geq 1}$ suivant des lois exponentielles $\mathcal{E}(\lambda)$ (pour les $A_k$) et $\mathcal{E}(\mu)$ (pour les $B_k$), avec $\lambda, \mu > 0$ ; on rappelle que la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ est la loi à densité $\lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda x}\, 1_{(x>0)}\, dx$. On considère une file d'attente où les clients arrivent aux temps $A_1$, $A_1 + A_2$, $A_1 + A_2 + A_3$, *etc.*, et où leurs demandes sont traitées comme suit : le $k$-ième client voit sa demande traitée en un temps $B_k$, après que toutes les demandes des clients $1, 2, \ldots, k-1$ aient été traitées. Notons $X_0$ le nombre de clients dans la file au temps 0, et $X_n$ le nombre de clients dans la file après $n$ étapes, une étape étant :

— soit le départ d'un client $k$ si sa demande a été traitée ($X_n = X_{n-1} - 1$) ;

— soit l'arrivée d'un nouveau client $k'$ si cela se produit avant que la demande du client $k$ en tête de file soit traitée ($X_n = X_{n-1} + 1$).

Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov de matrice de transition $P$, pour un certain paramètre $p \in (0, 1)$ qu'on exprimera en fonction de $\lambda$ et $\mu$.

4. **Chaînes de Markov et fonctions harmoniques, I.** Soit $P$ une matrice stochastique sur un espace d'états $\mathfrak{X}$, et $f : \mathfrak{X} \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que $f$ est harmonique sur $\mathfrak{X}$ (par rapport à $P$) si elle vérifie :

$$\forall x \in \mathfrak{X},\;\; f(x) = \sum_{y\in\mathfrak{X}} P(x, y)\, f(y).$$

On suppose donnée une fonction $f$ harmonique et bornée sur $\mathfrak{X}$. Montrer que si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov sur $\mathfrak{X}$ de matrice de transition $P$, alors la suite $(\mathbb{E}[f(X_n)])_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

5. **Image d'une chaîne de Markov.** Soit $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ deux espaces dénombrables, $P = (P(x, y))_{x,y\in\mathfrak{X}}$ une matrice stochastique sur $\mathfrak{X}$, et $f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$. On fixe une loi initiale $\pi_0$ sur $\mathfrak{X}$ et on note $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov sur $\mathfrak{X}$ de loi $\mathbb{P}_{(P,\pi_0)}$.

(a) Montrer par un contre-exemple simple que $(Y_n = f(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas forcément une chaîne de Markov sur $\mathfrak{Y}$ (indication : prendre $\mathfrak{X} = \{1, 2, 3\}$, $\mathfrak{Y} = \{1, 2\}$, $P$ la matrice circulante de taille $3 \times 3$, et $f$ une fonction surjective).

(b) Dans la suite de l'exercice, on suppose que la fonction $f$ est surjective, ce qui ne coûte rien quitte à remplacer $\mathfrak{Y}$ par $f(\mathfrak{X})$. On suppose également que la condition suivante est vérifiée : pour tout couple $(y_1, y_2) \in \mathfrak{Y}$, si $f(x) = f(x') = y_1$, alors

$$P(x, f^{-1}(\{y_2\})) = P(x', f^{-1}(\{y_2\})),$$

les deux termes de la formule étant les sommes $\sum_{w\,|\,f(w)=y_2} P(x, w)$ et $\sum_{w\,|\,f(w)=y_2} P(x', w)$. On note alors cette quantité $Q(y_1, y_2)$. Montrer que, pour toute suite $(y_0, \ldots, y_n, y_{n+1})$ d'éléments de $\mathfrak{Y}$, on a

$$\mathbb{P}[Y_0 = y_0, Y_1 = y_1, \cdots, Y_{n+1} = y_{n+1}] = \mathbb{P}[Y_0 = y_0, Y_1 = y_1, \cdots, Y_n = y_n]\, Q(y_n, y_{n+1}).$$

En déduire que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov de matrice $Q$ sur $\mathfrak{Y}$, et de loi initiale $f_*\pi_0$ :

$$(f_*\pi_0)(y) = \pi_0(f^{-1}(\{y\})) = \sum_{w\,|\,f(w)=y} \pi_0(w).$$

(c) Application : on considère la marche aléatoire sur l'hypercube $\mathfrak{X} = \{0,1\}^N$, qui est la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont les probabilités de transition sont

$$P((x_1,\ldots,x_N),(y_1,\ldots,y_N)) = \begin{cases} \frac{1}{N} & \text{si } x \text{ et } y \text{ diffèrent en une seule coordonnée } x_i = 1 - y_i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $f : \mathfrak{X} \to [\![0,N]\!]$ la fonction qui à un vecteur $x = (x_1,\ldots,x_N)$ associe $f(x) = \sum_{i=1}^N x_i$, qui est le nombre de coordonnées égales à 1 dans $x$. Si $Y_n = f(X_n)$, montrer que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov sur $[\![0,N]\!]$, et calculer sa matrice de transition. La chaîne $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est celle du modèle des urnes d'Ehrenfest ; elle modélise le nombre de particules dans une moitié d'une boîte contenant un gaz avec $N$ particules qui sont libres de s'y déplacer.

6. **Marche aléatoire sur la droite et transformation $M - X$.** On considère la marche aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{Z}$ : c'est la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de matrice de transition $P(x,y) = \frac{1}{2}\,1_{|x-y|=1}$.

   (a) On suppose que la mesure initiale est $\delta_0$. Donner une représentation de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en termes d'aléas i.i.d. $(\xi_n)_{n\geq 1}$ avec $\mathbb{P}[\xi_n = 1] = \mathbb{P}[\xi_n = -1] = \frac{1}{2}$.

   (b) On pose $M_n = \max\{X_k,\, 0 \leq k \leq n\}$. Montrer que $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas une chaîne de Markov (indication : rendre tangible le fait que l'évolution de $M_n$ dépend du moment où le précédent maximum a été atteint).

   (c) On s'intéresse au vecteur $(X_n, M_n - X_n) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}$. Montrer que

$$(X_{n+1}, M_{n+1} - X_{n+1}) - (X_n, M_n - X_n) = \begin{cases} (\xi_{n+1}, -\xi_{n+1}) & \text{si } M_n - X_n > 0, \\ (1,0) & \text{si } M_n - X_n = 0 \text{ et } \xi_{n+1} = 1, \\ (-1,+1) & \text{si } M_n - X_n = 0 \text{ et } \xi_{n+1} = -1. \end{cases}$$

   (d) Montrer que $(X_n, M_n - X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov sur l'espace $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$.

   (e) Montrer que $(M_n - X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov sur l'espace $\mathbb{N}$, et préciser sa matrice de transition.

7. **Marche aléatoire sur le cercle et dernier site occupé.** Soit $N$ un entier plus grand que 2. On considère la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'espace d'états $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z} = \{0,1,\ldots,N-1\}$ et de matrice de transition

$$P(k,k+1) = P(k,k-1) = \frac{1}{2},$$

étant entendu que $0 = N$ dans $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. C'est la marche aléatoire sur le graphe qui est un cercle avec $N$ points. Pour tout état $x \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, on note $\tau_x = \inf\{n \in \mathbb{N} \,|\, X_n = x\}$ le temps d'atteinte de l'état $x$ par la chaîne. On admettra que tous ces temps sont finis presque sûrement (l'explication de ce fait sera donnée dans le chapitre suivant).

   (a) On note $Y$ le dernier état visité par $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ : $\{Y = y\}$ si et seulement si $\tau_y = \max_{1\leq x\leq N}\tau_x$. Expliquer pourquoi

$$\{Y = y\} = \{\tau_{y+1} < \tau_{y-1} < \tau_y\} \sqcup \{\tau_{y-1} < \tau_{y+1} < \tau_y\}.$$

   (b) Fixons $y \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, et notons $f(k) = \mathbb{P}_k[\tau_{y+1} < \tau_y]$. En utilisant la méthode d'un pas en avant (propriété de Markov), écrire une équation de récurrence vérifiée par $f$. Que valent $f(y)$ et $f(y+1)$ ? Montrer que

$$f(y-1) = \mathbb{P}_{y-1}[\tau_{y+1} < \tau_y] = \frac{1}{N-1}.$$

(c) Jusqu'à la fin de l'exercice, on fixe deux états $x \neq y \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. Pour $t \geq 0$, montrer que

$$\mathbb{P}_x[\tau_{y-1} = t,\ \tau_{y-1} < \tau_{y+1} < \tau_y] = \mathbb{P}_x[\tau_{y-1} = t,\ \tau_{y-1} < \tau_{y+1}]\, \mathbb{P}_{y-1}[\tau_{y+1} < \tau_y].$$

On pourra décomposer l'événement de la probabilité à gauche en l'union des trajectoires

$$\{X_0 = x, X_1 = x_1, \ldots, X_t = x_t = y-1, \ldots, X_u = x_u = y+1, \ldots, X_v = x_v = y\}$$

avec $t < u < v$, $x_i \notin \{y-1, y+1\}$ pour $i \in [\![1, t-1]\!]$, $x_i \notin \{y+1, y\}$ pour $i \in [\![t+1, u-1]\!]$ et $x_i \neq y$ pour $i \in [\![u+1, v-1]\!]$. En déduire que

$$\mathbb{P}_x[\tau_{y-1} < \tau_{y+1} < \tau_y] = \frac{1}{N-1}\, \mathbb{P}_x[\tau_{y-1} < \tau_{y+1}].$$

(d) Montrer que sous $\mathbb{P}_x$, la variable aléatoire $Y$ suit une loi uniforme sur $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \setminus \{x\}$. Commenter ce résultat.

**8. Décomposition selon la première visite et applications.** Étant donnée une chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de matrice $P$ sur un espace d'états $\mathfrak{X}$, on rappelle qu'une probabilité trajectorielle est la probabilité d'un événement $\{X_k = x_k, X_{k+1} = x_{k+1}, \ldots, X_{k+l} = x_l\}$ ; elle est donnée par la formule

$$\mathbb{P}[\{X_k = x_k, X_{k+1} = x_{k+1}, \ldots, X_{k+l} = x_{k+l}\}] = \mathbb{P}[X_k = x_k]\, P(x_k, x_{k+1}) \cdots P(x_{k+l-1}, x_{k+l}).$$

L'objectif de cet exercice est de manipuler ces probabilités trajectorielles pour démontrer une inégalité sur l'espérance du nombre de visites d'un état par la chaîne $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le long d'un intervalle de temps $[\![k, k+l]\!]$. Dans ce qui suit, on fixe la matrice $P$ et un état $x \in \mathfrak{X}$, et on considère la chaîne de loi $\mathbb{P}_x$ issue de $x$.

(a) On note $\tau_x^+ = \inf\{m \geq 1 \mid X_m = x\}$, avec par convention $\tau_x^+ = +\infty$ si $X_m \neq x$ pour tout $m \geq 1$. L'entier $\tau_x^+$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^* \sqcup \{+\infty\}$ ; c'est le temps de premier passage de la chaîne en $x$ à partir du temps 1. Pour $m \geq 1$, exprimer $\mathbb{P}_x[\tau_x^+ = m]$ comme somme de probabilités trajectorielles.

(b) De même, pour $n \geq m \geq 1$, exprimer $\mathbb{P}_x[\tau_x^+ = m \text{ et } X_n = x]$ comme somme de probabilités trajectorielles. En déduire l'identité suivante, appelée formule de decomposition selon la première visite :

$$P^n(x,x) = \sum_{m=1}^{n} \mathbb{P}_x[\tau_x^+ = m]\, P^{n-m}(x,x).$$

(c) Plus généralement, on pose $\tau_x^{\geq m_0} = \inf\{m \geq m_0 \mid X_m = x\}$ ; ainsi, $\tau_x^+ = \tau_x^{\geq 1}$. En décomposant les probabilités en sommes de probabilités trajectorielles, montrer que pour $n \geq m_0$, on a

$$P^n(x,x) = \sum_{m=m_0}^{n} \mathbb{P}_x[\tau_x^{\geq m_0} = m]\, P^{n-m}(x,x).$$

(d) Si $[\![k, k+l]\!]$ est un intervalle d'entiers, on note

$$V_x([\![k, k+l]\!]) = \mathrm{card}(\{n \mid k \leq n \leq k+l \text{ et } X_n = x\}).$$

C'est le nombre de visites de $x$ par la chaîne de Markov le long de l'intervalle de temps $[\![k, k+l]\!]$. Montrer que $\mathbb{E}_x[V_x([\![k, k+l]\!])] = \sum_{n=k}^{k+l} P^n(x,x)$.

(e) En utilisant la décomposition selon la première visite, montrer que

$$\mathbb{E}_x[V_x([\![k, k+l]\!])] = \sum_{m=k}^{k+l} \mathbb{P}_x[\tau_x^{\geq k} = m] \left(\sum_{t=0}^{k+l-m} P^t(x,x)\right) \leq \mathbb{E}_x[V_x([\![0, l]\!])].$$