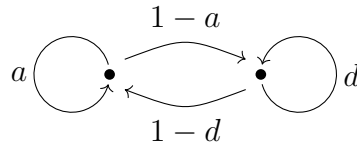


1. Chaîne de Markov à deux états.

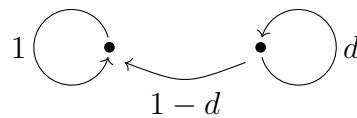
- (a) Pour avoir une matrice stochastique, il faut  $a, b, c, d \geq 0$ ,  $a + b = c + d = 1$ . On peut donc réécrire la matrice sous la forme

$$P = \begin{pmatrix} a & 1 - a \\ 1 - d & d \end{pmatrix}$$

avec  $0 \leq a \leq 1$  et  $0 \leq d \leq 1$ . Si  $\{a, d\} \cap \{0, 1\} = \emptyset$ , alors le graphe associé est :



Si l'une des deux valeurs  $a$  ou  $d$  vaut 0 ou 1, alors le graphe associé a moins d'arêtes. Par exemple, avec  $a = 1$  et  $0 < d < 1$ , on obtient :



- (b) Le polynôme caractéristique de  $P$  est  $X^2 - (a + d)X + (a + d - 1)$ , qui admet deux racines : 1 et  $a + d - 1$ . Sous les hypothèses de l'énoncé,  $-1 < a + d - 1 < 1$ . On vérifie aisément que

$$\pi = \left( \frac{1 - d}{2 - a - d}, \frac{1 - a}{2 - a - d} \right)$$

est vecteur propre pour la valeur propre 1, et que  $\eta = (1, -1)$  est vecteur propre pour la valeur propre  $a + d - 1$ .

- (c) Comme  $(\pi, \eta)$  est une base de  $\mathbb{R}^2$ , on peut décomposer le vecteur  $\pi_0$  sur cette base :  $\pi_0 = \alpha\pi + \beta\eta$  pour certains coefficients  $\alpha, \beta$ . En faisant la somme des coordonnées, on trouve :

$$1 = \pi_0(1) + \pi_0(2) = \alpha\pi(1) + \beta\eta(1) + \alpha\pi(2) + \beta\eta(2) = \alpha(\pi(1) + \pi(2)) = \alpha.$$

Ensuite,  $\beta = \beta\eta(1) = \pi_0(1) - \pi(1) = \pi_0(1) - \frac{1-d}{2-a-d}$ . Appliquons maintenant la matrice  $P$  à l'identité  $\pi_0 = \pi + \beta\eta$  :

$$\pi_n = \pi + \beta(a + d - 1)^n \eta.$$

Autrement dit :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X_n = 1] &= \frac{1 - d}{2 - a - d} + \left( \pi_0(1) - \frac{1 - d}{2 - a - d} \right) (a + d - 1)^n; \\ \mathbb{P}[X_n = 2] &= \frac{1 - a}{2 - a - d} - \left( \pi_0(1) - \frac{1 - d}{2 - a - d} \right) (a + d - 1)^n. \end{aligned}$$

- (d) Comme  $|a + d - 1| < 1$ , sa puissance  $n$ -ième tend vers 0, donc le vecteur  $\pi_n$  tend vers  $\pi$  lorsque  $n$  tend vers l'infini :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[X_n = 1] = \pi(1) = \frac{1 - d}{2 - a - d} \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[X_n = 2] = \pi(2) = \frac{1 - a}{2 - a - d}.$$

- (e) Si  $d = 1$ , alors une fois atteint l'état numéro 2, la chaîne de Markov ne peut plus en sortir. On a donc l'identité d'événements :

$$\left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} X_n = 2 \right\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \uparrow \{X_n = 2\}.$$

Par conséquent,

$$\mathbb{P} \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} X_n = 2 \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[X_n = 2] = \frac{1-a}{1-a} = 1.$$

## 2. Modèle de la ruine du joueur avec $p \neq \frac{1}{2}$ .

- (a) On voit  $\tau$  comme un fonction sur les trajectoires, à valeurs dans  $\mathbb{N} \sqcup \{+\infty\}$ . Alors, il faut un pas de moins à  $(X_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  pour atteindre l'un des bords de l'intervalle  $[0, M]$  par rapport à  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , donc

$$\tau((X_n)_{n \in \mathbb{N}}) = 1 + \tau((X_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}).$$

L'identité est encore valable si les deux membres valent  $+\infty$ . S'ils sont finis, alors

$$X_{\tau((X_n)_{n \in \mathbb{N}})} = X_{1+\tau((X_{n+1})_{n \in \mathbb{N}})} \quad (\text{et vaut } 0 \text{ ou } M).$$

- (b) On a  $f(0) = 1$ ,  $f(M) = 0$ ,  $g(0) = g(M) = 0$ . On écrit pour  $f$  la propriété de Markov comme suit : si  $0 < k < M$ , alors

$$\begin{aligned} f(k) &= \mathbb{P}_k[\tau((X_n)_{n \in \mathbb{N}}) < \infty \text{ et } X_{\tau((X_n)_{n \in \mathbb{N}})} = 0] \\ &= \mathbb{P}_k[\tau((X_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}) < \infty \text{ et } X_{\tau((X_{n+1})_{n \in \mathbb{N}})+1} = 0] \\ &= p \mathbb{P}_k[\tau((X_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}) < \infty \text{ et } X_{\tau((X_{n+1})_{n \in \mathbb{N}})+1} = 0 \mid X_1 = k+1] \\ &\quad + (1-p) \mathbb{P}_k[\tau((X_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}) < \infty \text{ et } X_{\tau((X_{n+1})_{n \in \mathbb{N}})+1} = 0 \mid X_1 = k-1] \\ &= p \mathbb{P}_{k+1}[\tau((Y_n)_{n \in \mathbb{N}}) < \infty \text{ et } Y_{\tau((Y_n)_{n \in \mathbb{N}})} = 0] \\ &\quad + (1-p) \mathbb{P}_{k-1}[\tau((Y_n)_{n \in \mathbb{N}}) < \infty \text{ et } Y_{\tau((Y_n)_{n \in \mathbb{N}})} = 0] \\ &= p f(k+1) + (1-p) f(k-1). \end{aligned}$$

Dans cette suite d'égalités, on a introduit la notation  $Y_n = X_{n+1}$  pour la chaîne décalée; conditionnellement à  $X_1 = k \pm 1$ ,  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  a la loi de la chaîne de même matrice  $P$  que  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , et de point de départ  $k \pm 1$ . On traite de même le cas de la fonction  $g$ , en utilisant par exemple la formule  $\mathbb{E}[T] = \sum_{j=0}^{\infty} j \mathbb{P}[T = j]$  (on pourrait aussi utiliser directement des espérances conditionnelles) :

$$\begin{aligned} g(k) &= \mathbb{E}_k[\tau((X_n)_{n \in \mathbb{N}})] = \sum_{j=0}^{\infty} j \mathbb{P}_k[\tau((X_n)_{n \in \mathbb{N}}) = j] \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} j \mathbb{P}_k[\tau((X_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}) + 1 = j] = \sum_{l=0}^{\infty} (l+1) \mathbb{P}_k[\tau((X_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}) = l] \\ &= 1 + \sum_{l=0}^{\infty} l \mathbb{P}_k[\tau((X_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}) = l] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 + p \sum_{l=0}^{\infty} l \mathbb{P}_k[\tau((X_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}) = l \mid X_1 = k + 1] \\
&\quad + (1 - p) \sum_{l=0}^{\infty} l \mathbb{P}_k[\tau((X_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}) = l \mid X_1 = k - 1] \\
&= 1 + p \sum_{l=0}^{\infty} l \mathbb{P}_{k+1}[\tau((Y_n)_{n \in \mathbb{N}}) = l] + (1 - p) \sum_{l=0}^{\infty} l \mathbb{P}_{k-1}[\tau((X_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}) = l] \\
&= 1 + p g(k + 1) + (1 - p) g(k - 1).
\end{aligned}$$

(c) La somme télescopique  $\sum_{k=0}^{M-1} \delta_f(k)$  vaut  $f(M) - f(0) = -1$ . Par ailleurs, la relation de récurrence pour  $f$  se réécrit :

$$\delta_f(k) = \frac{1-p}{p} \delta_f(k-1).$$

On a donc une suite géométrique de rapport  $r = \frac{1-p}{p}$ , et  $-1 = \delta_f(0) \sum_{k=0}^{M-1} r^k = \delta_f(0) \frac{1-r^M}{1-r}$ , d'où

$$\delta_f(k) = -r^k \frac{1-r}{1-r^M}.$$

Alors, pour tout  $k$ ,

$$f(k) = f(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \delta_f(j) = 1 - \frac{1-r^k}{1-r^M} = \frac{r^k - r^M}{1-r^M}.$$

(d) On garde la même notation  $r = \frac{1-p}{p}$  que précédemment. Si  $\delta_g(k) = g(k+1) - g(k) - \frac{1}{1-2p}$ , alors la relation de récurrence pour  $g$  se réécrit :

$$\delta_g(k) = r \delta_g(k-1).$$

Comme  $\sum_{k=0}^{M-1} \delta_g(k) = -\frac{M}{1-2p}$ , on en déduit que  $-\frac{M}{1-2p} = \delta_g(0) \frac{1-r^M}{1-r}$ , puis que

$$\delta_g(k) = -\frac{M}{1-2p} r^k \frac{1-r}{1-r^M}.$$

Alors,  $g(k) - g(0) - \frac{k}{1-2p} = \sum_{j=0}^{k-1} \delta_g(j) = -\frac{M}{1-2p} \frac{1-r^k}{1-r^M}$ , donc

$$g(k) = \frac{k}{1-2p} - \frac{M}{1-2p} \frac{1-r^k}{1-r^M}.$$

(e) Supposons d'abord  $p < \frac{1}{2}$ , et donc  $r > 1$ . Alors, lorsque  $M$  tend vers l'infini,  $f(k)$  tend vers 1 pour tout  $k$ , et  $g(k)$  tend vers  $\frac{k}{1-2p}$  pour tout  $k$ . Ceci laisse penser que la marche aléatoire sur  $\mathbb{N} = \llbracket 0, +\infty \rrbracket$  avec pas  $\pm 1$  de probabilités  $p$  et  $1-p$  retourne toujours vers 0 lorsqu'elle part d'un entier  $k$ , et qu'elle met un temps aléatoire d'espérance  $\frac{k}{1-2p}$ ; on verra que ce résultat est juste.

Supposons maintenant  $p > \frac{1}{2}$ , et donc  $r < 1$ . Lorsque  $M$  tend vers l'infini,  $f(k)$  tend vers  $r^k$ , et  $g(k)$  tend vers l'infini. Ainsi, dans ce cas, la marche aléatoire "limite" sur  $\mathbb{N}$  devrait atteindre le point 0 partant de  $k$  seulement avec probabilité  $r^k$ ; on peut de nouveau montrer que c'est effectivement le cas.

### 3. Modèle de file d'attente, I.

(a) On a une représentation du type  $X_{n+1} = f(X_n, \xi_{n+1})$  avec des variables  $\xi_n$  i.i.d. et indépendantes de  $X_0$ , donc par le théorème de représentation des chaînes de Markov,  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une chaîne de Markov. Calculons sa matrice de transition :

- si  $X_n = 0$ , alors  $X_{n+1} = 1$  automatiquement, donc  $P(0, 1) = 1$ ;
- si  $X_n \geq 1$ , alors  $X_{n+1} - X_n = \xi_{n+1}$ , donc  $P(k, k+1) = p$  et  $P(k, k-1) = 1-p$  pour  $k \geq 1$ .

La matrice de transition de  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est donc  $P$ , et la loi de cette chaîne est  $\mathbb{P}_{(P, \pi)}$ .

- (b) Supposons  $p > \frac{1}{2}$ . Remarquons que pour tout  $n$ ,  $\xi_n 1_{(X_{n-1} > 0)} + 1_{(X_{n-1} = 0)} \geq \xi_n$ , donc  $X_n \geq X_0 + \sum_{k=1}^n \xi_k$ . Or, par la loi des grands nombres,  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k \rightarrow_{n \rightarrow \infty, \text{p.s.}} 2p - 1 > 0$ , donc  $X_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty, \text{p.s.}} +\infty$  dans ce cas. Autrement dit,

$$\mathbb{P}_\pi \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} X_n = +\infty \right] = 1.$$

- (c) Supposons  $p < \frac{1}{2}$ . On a

$$\begin{aligned} 0 \leq X_n &= X_0 + \sum_{k=1}^n (\xi_k 1_{(X_{k-1} > 0)} + 1_{(X_{k-1} = 0)}) = X_0 + \sum_{k=1}^n (\xi_k + 1_{(X_{k-1} = 0)}(1 - \xi_k)) \\ &\leq X_0 + \sum_{k=1}^n \xi_k + 2 \sum_{k=1}^n 1_{(X_{k-1} = 0)}. \end{aligned}$$

Par la loi des grands nombres, la somme des  $\xi_k$  tend vers  $-\infty$ , donc pour compenser et rester positif, il faut que  $\sum_{k=1}^n 1_{(X_{k-1} = 0)}$  tende vers  $+\infty$  presque sûrement. Ainsi, une infinité de fois,  $X_{k-1} = 0$ . Le nombre de visites de 0 est donc presque sûrement  $+\infty$ , et on ne peut pas avoir  $X_n \rightarrow +\infty$  :

$$\mathbb{P}_\pi \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} X_n = +\infty \right] = 0.$$

#### 4. Chaînes de Markov et fonctions harmoniques, I. Pour toute chaîne de Markov de matrice $P$ , on a

$$\mathbb{E}[f(X_{n+1}) | X_n = x] = \sum_{y \in \mathfrak{X}} P(x, y) f(y) = (Pf)(x).$$

Par conséquent,

$$\mathbb{E}[f(X_{n+1})] = \sum_{x \in \mathfrak{X}} \mathbb{P}[X_n = x] \mathbb{E}[f(X_{n+1}) | X_n = x] = \sum_{x \in \mathfrak{X}} \mathbb{P}[X_n = x] (Pf)(x) = \mathbb{E}[(Pf)(X_n)].$$

Si  $f$  est harmonique,  $Pf = f$ , donc  $\mathbb{E}[f(X_{n+1})] = \mathbb{E}[f(X_n)]$ , et la suite  $(\mathbb{E}[f(X_n)])_{n \in \mathbb{N}}$  est constante.

#### 5. Image d'une chaîne de Markov.

- (a) Prenons la matrice de transition sur trois états  $\{0, 1, 2\}$  :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si  $X_0 = 0$ , alors  $X_n = n \bmod 3$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $f$  la fonction de  $\{0, 1, 2\}$  vers  $\{0, 1\}$  définie par  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = f(2) = 1$ . Si  $Y_n = f(X_n)$ , alors

$$Y_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \equiv 0 \pmod{3}, \\ 1 & \text{si } n \equiv 1 \text{ ou } 2 \pmod{3}. \end{cases}$$

Raisonnons par l'absurde et supposons donnée une matrice  $Q$  de taille  $2 \times 2$  telle que  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  soit une chaîne de Markov de matrice  $Q$ . Alors,

$$Q(0, 1) = \mathbb{P}[Y_1 = 1 | Y_0 = 0] = \mathbb{P}[X_1 \in \{1, 2\} | X_0 = 0] = 1$$

et donc  $Q(0, 0) = 0$ . Puis,

$$Q^3(0, 0) = \mathbb{P}[Y_3 = 0 \mid Y_0 = 0] = \mathbb{P}[X_3 = 0 \mid X_0 = 0] = 1.$$

Or, on peut développer  $Q^3(0, 0) = \sum_{i,j} Q(0, i)Q(i, j)Q(j, 0)$ , et comme  $Q(0, 0) = 0$ , ceci implique

$$1 = Q(0, 1)Q(1, 1)Q(1, 0) = Q(1, 1)Q(1, 0).$$

Alors,  $Q(1, 1)$  et  $Q(1, 0)$  sont des nombres dans  $[0, 1]$  dont le produit vaut 1, donc ils valent tous les deux 1. Mais  $Q(1, 1) + Q(1, 0) = 1 \neq 2$ , d'où une contradiction. L'image  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de la chaîne de Markov  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'est donc pas une chaîne de Markov.

(b) On décompose la probabilité en fonction des valeurs de  $X_0, \dots, X_{n+1}$  :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}[Y_0 = y_0, \dots, Y_n = y_n, Y_{n+1} = y_{n+1}] \\ &= \sum_{\substack{x_0 \in f^{-1}(\{y_0\}), \dots, x_n \in f^{-1}(\{y_n\}) \\ x_{n+1} \in f^{-1}(\{y_{n+1}\})}} \mathbb{P}[X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n, X_{n+1} = x_{n+1}] \\ &= \sum_{\substack{x_0 \in f^{-1}(\{y_0\}), \dots, x_n \in f^{-1}(\{y_n\}) \\ x_{n+1} \in f^{-1}(\{y_{n+1}\})}} \mathbb{P}[X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n] \mathbb{P}[X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n] \\ &= \sum_{\substack{x_0 \in f^{-1}(\{y_0\}), \dots, x_n \in f^{-1}(\{y_n\}) \\ x_{n+1} \in f^{-1}(\{y_{n+1}\})}} \mathbb{P}[X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n] P(x_n, x_{n+1}) \\ &= \sum_{x_0 \in f^{-1}(\{y_0\}), \dots, x_n \in f^{-1}(\{y_n\})} \mathbb{P}[X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n] P(x_n, f^{-1}(\{y_{n+1}\})) \\ &= \mathbb{P}[Y_0 = y_0, \dots, Y_n = y_n] Q(y_n, y_{n+1}) \end{aligned}$$

Ainsi,  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une chaîne de Markov de matrice  $Q$ . Sa loi initiale est

$$\mathbb{P}[Y_0 = y_0] = \sum_{x_0 \in f^{-1}(\{y_0\})} \pi_0(x_0) = \pi_0(f^{-1}(\{y_0\})).$$

Autrement dit, c'est la mesure image  $f_*\pi_0$  de la loi initiale  $\pi_0$  de  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par  $f$ .

(c) Fixons des nombres  $y_1$  et  $y_2$  dans  $N$ . Soit  $x$  et  $x'$  deux vecteurs avec le même nombre  $y_1$  de coordonnées égales à 1. On a

$$P(x, f^{-1}(\{y_2\})) = \begin{cases} \frac{N-y_1}{N} & \text{si } y_2 = y_1 + 1, \\ \frac{y_1}{N} & \text{si } y_2 = y_1 - 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En effet, pour le premier cas par exemple, il y a  $N - y_1$  vecteurs qui diffèrent de  $x$  en exactement une coordonnée, changée de 0 en 1 ; et tous ces vecteurs ont pour probabilité de transition  $\frac{1}{N}$ .

Le résultat ne dépend que de  $y_1$  et  $y_2$ , donc on obtient la même formule pour  $P(x', f^{-1}(\{y_2\}))$ . Ainsi,  $Y_n = f(X_n)$  est une chaîne de Markov, de matrice de transition :

$$Q(k, k+1) = \frac{N-k}{N} \quad ; \quad Q(k, k-1) = \frac{k}{N}.$$

## 6. Marche aléatoire sur la droite et transformation $M - X$ .

(a) La formule  $X_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$  avec des variables i.i.d.  $\xi_n$  de loi  $\mathcal{B}_{\pm 1}(\frac{1}{2})$  définit une chaîne de Markov sur  $\mathbb{Z}$  de matrice de transition  $P(k, k+1) = P(k, k-1) = \frac{1}{2}$ .

(b) Raisonnons par l'absurde et supposons que  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  soit une chaîne de Markov de matrice  $Q$  sur  $\mathbb{N}$ . On a

$$Q(0, 1) = \mathbb{P}[M_1 = 1 \mid M_0 = 0] = \mathbb{P}[X_1 = 1 \mid X_0 = 0] = P(0, 1) = \frac{1}{2};$$

$$Q(0, 0) = \mathbb{P}[M_1 = 0 \mid M_0 = 0] = \mathbb{P}[X_1 = -1 \mid X_0 = 0] = P(0, -1) = \frac{1}{2}.$$

Alors,  $\mathbb{P}[M_2 = 0 \mid M_0 = 0] = (Q(0, 0))^2 = \frac{1}{4}$ . Mais il y a deux chemins possibles tels que  $M_2 = 0$  :

$$\mathbb{P}[M_2 = 0 \mid M_0 = 0] = \mathbb{P}[(X_1 = -1, X_2 = 0) \text{ ou } (X_1 = -1, X_2 = -2) \mid X_0 = 0] = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

d'où une contradiction.

(c) Si  $M_n - X_n = 0$ , alors  $X_n$  est égal à sa valeur maximale jusqu'au temps  $n$ , et au temps suivant :

— avec probabilité  $\frac{1}{2}$ ,  $\xi_{n+1} = 1$ , donc  $X_{n+1} = X_n + 1$  et  $M_{n+1} = X_{n+1}$ . On a alors :

$$(X_{n+1}, M_{n+1} - X_{n+1}) - (X_n, M_n - X_n) = (1, 0 - 0) = (1, 0).$$

— avec probabilité  $\frac{1}{2}$ ,  $\xi_{n+1} = -1$ , donc  $X_{n+1} = X_n - 1$  et  $M_{n+1} = X_n = X_{n+1} + 1$ . On a alors :

$$(X_{n+1}, M_{n+1} - X_{n+1}) - (X_n, M_n - X_n) = (-1, 1 - 0) = (-1, 1).$$

Si  $M_n - X_n > 0$ , alors  $X_n$  n'est pas égal à sa valeur maximale jusqu'au temps  $n$ , donc  $M_{n+1} = M_n$  et

$$(X_{n+1}, M_{n+1} - X_{n+1}) - (X_n, M_n - X_n) = (X_{n+1} - X_n, X_n - X_{n+1}) = (\xi_{n+1}, -\xi_{n+1}).$$

(d) On peut donc écrire  $(X_{n+1}, M_{n+1} - X_{n+1}) = f((X_n, M_n - X_n), \xi_{n+1})$  pour une certaine fonction  $f$  et une suite de variables i.i.d.  $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , donc par le théorème de représentation des chaînes de Markov,  $(X_n, M_n - X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une chaîne d'espace d'états  $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ .

(e) La question (c) permet d'écrire :

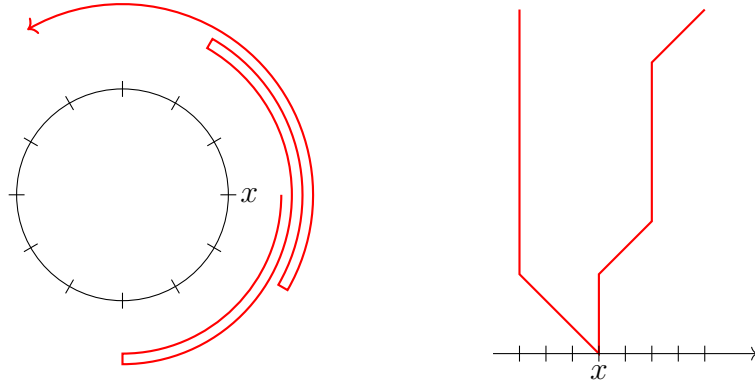
$$M_{n+1} - X_{n+1} = M_n - X_n - 1_{(M_n - X_n > 0)} \xi_{n+1} + 1_{(M_n - X_n = 0)} \frac{1 - \xi_{n+1}}{2}.$$

Il existe donc une fonction  $g$  telle que  $M_{n+1} - X_{n+1} = g(M_n - X_n, \xi_{n+1})$ , ce qui garantit comme précédemment que  $(M_n - X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une chaîne d'espace d'états  $\mathbb{N}$ . Sa matrice de transition est :

$$P(0, 0) = \frac{1}{2} \quad ; \quad P(0, 1) = \frac{1}{2} \quad ; \quad P(k, k-1) = P(k, k+1) = \frac{1}{2} \quad \text{pour } k \geq 1.$$

## 7. Marche aléatoire sur le cercle et dernier site occupé.

(a) Lorsqu'on se déplace sur le cercle en partant d'un état  $x$ , l'ensemble des états visités est un arc de cercle contenant  $x$  et croissant avec le temps, jusqu'à ce qu'il recouvre entièrement le cercle.



Si  $Y = y$  est le dernier état visité, alors juste avant, l'arc de cercle des états visités est  $y + 1 \rightarrow x \rightarrow y - 1$  (en écrivant tous les entiers modulo  $N$ ). On a donc  $\tau_y > \tau_{y+1}$  et  $\tau_y > \tau_{y-1}$ , ce qui caractérise l'état  $y$ . Par disjonction des cas,

$$\{Y = y\} = \{\tau_y > \tau_{y-1} > \tau_{y+1}\} \sqcup \{\tau_y > \tau_{y+1} > \tau_{y-1}\}.$$

(b) On a  $f(y + 1) = 1$  et  $f(y) = 0$ , et pour  $k \notin \{y, y + 1\}$ ,

$$\begin{aligned} f(k) &= \mathbb{P}_k[\tau_{y+1}((X_n)_{n \in \mathbb{N}}) < \tau_y((X_n)_{n \in \mathbb{N}})] \\ &= \mathbb{P}_k[\tau_{y+1}((X_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}) < \tau_y((X_{n+1})_{n \in \mathbb{N}})] \\ &= \frac{1}{2} \mathbb{P}_k[\tau_{y+1}((X_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}) < \tau_y((X_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}) \mid X_1 = k + 1] \\ &\quad + \frac{1}{2} \mathbb{P}_k[\tau_{y+1}((X_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}) < \tau_y((X_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}) \mid X_1 = k - 1] \\ &= \frac{1}{2} \mathbb{P}_{k+1}[\tau_{y+1}((Y_n)_{n \in \mathbb{N}}) < \tau_y((Y_n)_{n \in \mathbb{N}})] + \frac{1}{2} \mathbb{P}_{k-1}[\tau_{y+1}((Y_n)_{n \in \mathbb{N}}) < \tau_y((Y_n)_{n \in \mathbb{N}})] \\ &= \frac{1}{2} f(k + 1) + \frac{1}{2} f(k - 1). \end{aligned}$$

C'est essentiellement le même argument que pour la chaîne de la ruine du joueur (exercice 2). On peut réécrire ceci  $f(k + 1) - f(k) = f(k) - f(k - 1)$ , donc la fonction  $f$  est affine sur l'arc de cercle  $y + 1 \rightarrow x \rightarrow y$ . Comme il y a  $N - 1$  pas,  $f(y - 1) = \frac{1}{N-1}$ .

(c) On écrit :

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}_x[\tau_{y-1} = t < \tau_{y+1} < \tau_y] \\ &= \sum_{\substack{t < u < v \\ x_1, \dots, x_{t-1} \neq y-1, y, y+1 \\ x_{t+1}, \dots, x_{u-1} \neq y, y+1 \\ x_{u+1}, \dots, x_{v-1} \neq y}} \mathbb{P}_x[X_0 = x, X_1 = x_1, \dots, X_{t-1} = x_{t-1}, X_t = y - 1, \dots, X_u = y + 1, \dots, X_v = y] \\ &= \sum_{\substack{t < u < v \\ x_1, \dots, x_{t-1} \neq y-1, y, y+1 \\ x_{t+1}, \dots, x_{u-1} \neq y, y+1 \\ x_{u+1}, \dots, x_{v-1} \neq y}} \mathbb{P}_x[X_0 = x, \dots, X_{t-1} = x_{t-1}, X_t = y - 1] \mathbb{P}_{y-1}[Y_0 = y - 1, Y_1 = x_{t+1}, \dots, Y_{v-t} = y] \end{aligned}$$

avec  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}} = (X_{n+t})_{n \in \mathbb{N}}$ , qui est une chaîne de Markov de même matrice de transition. En resommant sur les états  $x_i$ , on obtient :

$$\mathbb{P}_x[\tau_{y-1} = t < \tau_{y+1} < \tau_y] = \mathbb{P}_x[t = \tau_{y-1} < \tau_{y+1}] \mathbb{P}_{y-1}[\tau_{y+1} < \tau_y] = \frac{1}{N-1} \mathbb{P}_x[t = \tau_{y-1} < \tau_{y+1}].$$

En sommant sur toutes les valeurs possibles sur  $t$ , on en déduit que pour  $x \neq y$ ,

$$\mathbb{P}_x[\tau_{y-1} < \tau_{y+1} < \tau_y] = \frac{1}{N-1} \mathbb{P}_x[\tau_{y-1} < \tau_{y+1}].$$

(d) Symétriquement, on a bien sûr  $\mathbb{P}_x[\tau_{y+1} < \tau_{y-1} < \tau_y] = \frac{1}{N-1} \mathbb{P}_x[\tau_{y+1} < \tau_{y-1}]$ , donc en sommant ces deux identités,

$$\mathbb{P}_x[Y = y] = \frac{1}{N-1} \mathbb{P}_x[\tau_{y-1} < \tau_{y+1}] + \frac{1}{N-1} \mathbb{P}_x[\tau_{y+1} < \tau_{y-1}] = \frac{1}{N-1}$$

pour tout  $x \neq y$ . Ainsi, le dernier état atteint  $Y$  suit une loi uniforme sur  $\mathcal{X} \setminus \{x\}$ .

## 8. Décomposition selon la première visite et applications.

(a) On a

$$\mathbb{P}_x[\tau_x^+ = m] = \sum_{y_1, \dots, y_{m-1} \neq x} \mathbb{P}_x[X_0 = x, X_1 = y_1, \dots, X_{m-1} = y_{m-1}, X_m = x].$$

(b) De la même façon, si  $n \geq m$ , alors

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_x[\tau_x^+ = m \text{ et } X_n = x] \\ &= \sum_{\substack{y_1, \dots, y_{m-1} \neq x \\ y_{m+1}, \dots, y_{n-1} \in \mathcal{X}}} \mathbb{P}_x[X_0 = x, X_1 = y_1, \dots, X_{m-1} = y_{m-1}, X_m = x, X_{m+1} = y_{m+1}, \dots, X_n = x] \\ &= \sum_{\substack{y_1, \dots, y_{m-1} \neq x \\ y_{m+1}, \dots, y_{n-1} \in \mathcal{X}}} \mathbb{P}_x[X_0 = x, X_1 = y_1, \dots, X_{m-1} = y_{m-1}, X_m = x] P(x, y_{m+1}) \cdots P(y_{n-1}, x) \\ &= \sum_{y_1, \dots, y_{m-1} \neq x} \mathbb{P}_x[X_0 = x, X_1 = y_1, \dots, X_{m-1} = y_{m-1}, X_m = x] P^{n-m}(x, x) \\ &= \mathbb{P}_x[\tau_x^+ = m] P^{n-m}(x, x). \end{aligned}$$

En sommant sur  $m$ , puisque  $\{X_n = x\} = \{X_n = x \text{ et } \tau_x^+ \leq n\} = \bigsqcup_{m=1}^n \{X_n = x \text{ et } \tau_x^+ = m\}$ , on obtient :

$$P^n(x, x) = \mathbb{P}_x[X_n = x] = \sum_{m=1}^n \mathbb{P}_x[\tau_x^+ = m] P^{n-m}(x, x).$$

(c) C'est le même argument qu'à la question précédente :

$$P^n(x, x) = \mathbb{P}_x[X_n = x] = \sum_{m=m_0}^n \mathbb{P}_x[\tau_x^{\geq m_0} = m] P^{n-m}(x, x).$$

(d) On écrit la variable  $V_x(\llbracket k, k+l \rrbracket)$  comme une somme d'indicatrices :  $V_x(\llbracket k, k+l \rrbracket) = \sum_{n=k}^{k+l} 1_{(X_n=x)}$ . Alors, en prenant les espérances :

$$\mathbb{E}_x[V_x(\llbracket k, k+l \rrbracket)] = \sum_{n=k}^{k+l} \mathbb{E}_x[1_{(X_n=x)}] = \sum_{n=k}^{k+l} P^n(x, x).$$

(e) Combinons les résultats des deux questions précédentes, avec  $m_0 = k$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x[V_x(\llbracket k, k+l \rrbracket)] &= \sum_{n=k}^{k+l} P^n(x, x) = \sum_{n=k}^{k+l} \sum_{m=k}^n \mathbb{P}_x[\tau_x^{\geq k} = m] P^{n-m}(x, x) \\ &= \sum_{m=k}^{k+l} \mathbb{P}_x[\tau_x^{\geq k} = m] \left( \sum_{n=m}^{k+l} P^{n-m}(x, x) \right) = \sum_{m=k}^{k+l} \mathbb{P}_x[\tau_x^{\geq k} = m] \left( \sum_{u=0}^{k+l-m} P^u(x, x) \right) \\ &\leq \left( \sum_{m=k}^{k+l} \mathbb{P}_x[\tau_x^{\geq k} = m] \right) \left( \sum_{u=0}^l P^u(x, x) \right) \leq 1 \times \mathbb{E}_x[V_x(\llbracket 0, l \rrbracket)] = \mathbb{E}_x[V_x(\llbracket 0, l \rrbracket)]. \end{aligned}$$