Durée : 3 heures. Une feuille recto-verso de notes manuscriptes est autorisée. Sont interdits : livres, calculatrices, téléphones, ordinateurs ou objets apparentés. Toutes les réponses doivent être justifiées, et la rédaction sera prise en compte. Au sein d'un exercice, il est permis d'utiliser tout résultat qui apparaît dans le cours ou qui a été énoncé dans une question précédente du sujet, même si cette question n'a pas été traitée. La difficulté est à peu près progressive (au sein de chaque exercice, et de l'exercice 1 à l'exercice 2).

Exercice I. Un problème d'urnes. (10 points) On considère une urne contenant au temps $n = 0$ deux types de balles :

— r balles blanches ;

— $r + 2$ balles noires,

r étant un entier positif. Le nombre $(X_n)_{n\geq 0}$ de balles blanches évolue au fil du temps comme suit. Au temps $n + 1$, s'il y avait X_n balles blanches et $X_n + 2$ balles noires dans l'urne au temps n :

1. on tire au hasard l'une des $2X_n + 2$ balles de l'urne, toutes les balles étant équiprobables ;
2. si la balle tirée est blanche, on la retire et on retire également une balle noire : $X_{n+1} = X_n - 1$;
3. si la balle tirée est noire, on la replace dans l'urne et on rajoute dans l'urne une balle blanche et une balle noire : $X_{n+1} = X_n + 1$.

On suppose que les tirages au hasard de l'étape 1 sont indépendants pour des temps distincts, de sorte que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov.

I.1 Donner l'espace des états $\mathfrak{X}$ et la matrice de transition P de la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

I.2 La chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle irréductible ?

I.3 On note $f(k) = \mathbb{P}_k[\exists n \in \mathbb{N},\ X_n = 0] = \mathbb{P}_k[\tau_0 < +\infty]$, où $\tau_0 = \inf\{n \in \mathbb{N} \mid X_n = 0\}$ est la variable aléatoire donnant le temps d'atteinte de l'état 0. Montrer que f est solution du système d'équations suivant :

$$\begin{cases} f(0) = 1; \\ 2\,f(k) = \frac{k+2}{k+1}\,f(k+1) + \frac{k}{k+1}\,f(k-1) \quad \text{si } k \geq 1. \end{cases}$$

I.4 On note $\widetilde{f}$ une solution arbitraire du système d'équations

$$\begin{cases} \widetilde{f}(0) = 1; \\ 2\,\widetilde{f}(k) = \frac{k+2}{k+1}\,\widetilde{f}(k+1) + \frac{k}{k+1}\,\widetilde{f}(k-1) \quad \text{si } k \geq 1. \end{cases}$$

Montrer que $\widetilde{f}(k) = \frac{\alpha k+1}{k+1}$ pour un certain paramètre α réel. On pourra introduire la fonction $g(k) = (k+1)\,\widetilde{f}(k)$. Pour quels paramètres α a-t-on $\widetilde{f}(k) \in [0,1]$ pour tout k ?

I.5 On considère toujours une solution arbitraire $\widetilde{f}$ du système d'équations de la question I.3., avec $\widetilde{f}(k) \in [0,1]$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Montrer par récurrence sur n que, si $k \neq 0$, alors

$$\widetilde{f}(k) = \mathbb{P}_k[\tau_0 \leq n] + \sum_{k_1,\ldots,k_n \neq 0} P(k,k_1)P(k_1,k_2)\cdots P(k_{n-1},k_n)\,\widetilde{f}(k_n).$$

En déduire que $\widetilde{f}(k) \geq f(k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

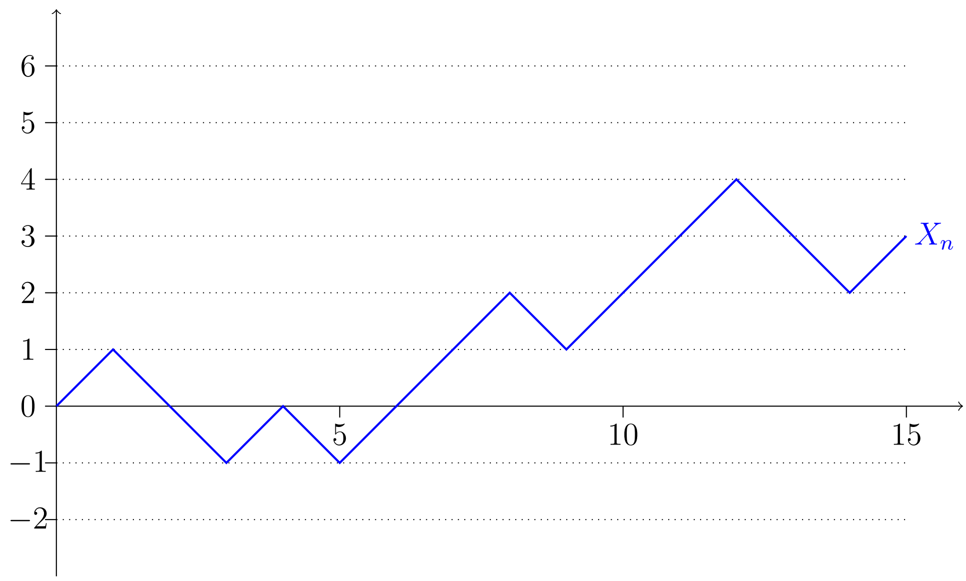
I.6 Conclure quant à la valeur du paramètre α pour la fonction $f(k) = \mathbb{P}_k[\tau_0 < +\infty]$ (indication : que peut-on dire de f dans l'ensemble des solutions du système d'équations, avec la contrainte $0 \leq f \leq 1$?).

I.7 La chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle récurrente ou transiente ? Que dire du comportement de X_n lorsque n tend vers l'infini ?

Exercice II. La transformation 2M − X. (10 points) On considère une suite de variables aléatoires $(\xi_n)_{n\geq 1}$ indépendantes et identiquement distribuées, avec $\mathbb{P}[\xi_n = 1] = \mathbb{P}[\xi_n = -1] = \frac{1}{2}$. Les sommes $X_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ forment une chaîne de Markov irréductible récurrente sur $\mathbb{Z}$ (la marche aléatoire simple symétrique, issue de $X_0 = 0$). On pose

$$M_n = \max\{X_k \,|\, 0 \leq k \leq n\} \qquad ; \qquad Y_n = 2M_n - X_n.$$

II.1 On a dessiné ci-dessous une trajectoire de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Compléter ce dessin en ajoutant la trajectoire correspondante de $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que $Y_n \geq X_n$ pour tout n, et qu'on a égalité si et seulement si n est un temps où X_n atteint son maximum ($M_n = X_n$).



II.2 On note $\mathfrak{X} = \{(k,l) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \,|\, k \leq l\}$, et $f : \mathfrak{X} \times \{\pm 1\} \to \mathfrak{X}$ la fonction définie comme suit :

$$f(k,l,\xi) = \begin{cases} (k+\xi, l-\xi) & \text{si } k < l, \\ (k+\xi, l+1) & \text{si } k = l. \end{cases}$$

Montrer que $(X_{n+1}, Y_{n+1}) = f(X_n, Y_n, \xi_{n+1})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

II.3 Montrer que $(X_n, Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov sur l'espace $\mathfrak{X}$, et donner sa matrice de transition $Q((k_1,l_1),(k_2,l_2))$.

La suite de l'exercice est destinée à montrer que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov, et à calculer sa matrice de transition. Si $l \in \mathbb{N}$, on notera $I_l = \{-l, -l+2, -l+4, \ldots, l-2, l\}$: c'est l'ensemble des $l+1$ entiers relatifs qui sont plus petits en valeur absolue que l, et qui ont même parité que l.

II.4 Montrer que pour tout n, X_n appartient à l'ensemble I_{Y_n}. Ainsi, $(X_n, Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov sur l'espace d'états restreint $\mathfrak{X}^* = \bigcup_{l\in\mathbb{N}} I_l \times \{l\}$.

II.5 Soient l, l' deux entiers positifs avec $|l'-l| = 1$, et $k' \in I_{l'}$. Calculer $\sum_{k\in I_l} Q((k,l),(k',l'))$, et montrer que le résultat est indépendant de k', l et l' (à condition que $|l'-l| = 1$ et $k' \in I_{l'}$). On séparera les cas $l' = l+1$ et $l' = l-1$.

II.6 On fixe une suite $(l_1, l_2, \dots, l_n, l_{n+1})$ d'entiers positifs, avec $|l_i - l_{i-1}| = 1$ pour tout i (et avec pour convention $l_0 = 0$). En utilisant le fait que $(X_n, Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov, montrer que

$$\mathbb{P}[Y_{n+1} = l_{n+1} \,|\, Y_1 = l_1, \dots, Y_n = l_n] = \sum_{\substack{k_n \in I_{l_n} \\ k_{n+1} \in I_{l_{n+1}}}} p_{l_1,l_2,\dots,l_n}(k_n)\, Q((k_n, l_n), (k_{n+1}, l_{n+1}))$$

avec $p_{l_1,l_2,\dots,l_n}(k_n) = \mathbb{P}[X_n = k_n \,|\, Y_1 = l_1, \dots, Y_n = l_n]$. On pourra décomposer la probabilité à gauche en fonction des valeurs de $X_1, \dots, X_n, X_{n+1}$.

II.7 Montrer par récurrence sur n l'identité suivante : $p_{l_1,l_2,\dots,l_n}(k_n) = \frac{1}{l_n+1}$ pour tout $k_n \in I_{l_n}$. On pourra décomposer une probabilité $p_{l_1,l_2,\dots,l_{n+1}}(k_{n+1})$ en fonction de la valeur $X_n = k_n$. Ainsi, conditionnellement à la trajectoire $(Y_1 = l_1, \dots, Y_n = l_n)$, X_n est distribué uniformément sur l'ensemble d'entiers I_{l_n}.

II.8 Conclure que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov sur $\mathbb{N}$, et donner sa matrice de transition. Est-elle irréductible ?

II.9 Montrer que $\lim_{n\to\infty} Y_n = +\infty$ avec probabilité 1.

Corrigé.

I.1 L'espace des états est $\mathfrak{X} = \mathbb{N}$, et la matrice de transition est

$$P(k, k+1) = \frac{k+2}{2(k+1)} \qquad ; \qquad P(k, k-1) = \frac{k}{2(k+1)}$$

pour tout $k \geq 0$. En effet, pour le calcul de $P(k, k+1)$ par exemple, on passe de $X_n = k$ à $X_{n+1} = k+1$ si l'on tire l'une des $k+2$ balles noires dans l'urne au temps n ; ceci se produit avec probabilité $\frac{k+2}{2(k+1)}$ puisque les balles sont équiprobables (remarquons au passage que les règles de transition font qu'il y a à tout moment 2 balles noires de plus que de balles blanches).

I.2 Notons que $P(k, k+1) > 0$ pour tout $k \geq 0$, et que $P(k, k-1) > 0$ pour tout $k > 0$. Par conséquent, étant donné deux états $k, l \in \mathbb{N}$, il y a toujours un chemin de transitions possibles de k à l : si par exemple $k < l$, alors,

$$P^{l-k}(k, l) \geq P(k, k+1)P(k+1, k+2) \cdots P(l-1, l) > 0.$$

La chaîne est donc irréductible.

I.3 On a bien $f(0) = \mathbb{P}_0[\tau_0 < +\infty] = 1$. Par la propriété de Markov simple, pour tout $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} f(k) = \mathbb{P}_k[\tau_0((X_n)_{n\in\mathbb{N}}) < +\infty] &= \mathbb{P}_k[\tau_0((X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}) < +\infty] \\ &= \frac{k+2}{2(k+1)}\,\mathbb{P}_k[\tau_0((X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}) < +\infty \,|\, X_1 = k+1] \\ &\quad + \frac{k}{2(k+1)}\,\mathbb{P}_k[\tau_0((X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}) < +\infty \,|\, X_1 = k-1] \\ &= \frac{k+2}{2(k+1)}\,f(k+1) + \frac{k}{2(k+1)}\,f(k-1). \end{aligned}$$

I.4 L'équation de récurrence se réécrit :

$$\begin{aligned} (k+1)\,\widetilde{f}(k) &= \frac{1}{2}\,(k+2)\,\widetilde{f}(k+1) + \frac{1}{2}\,k\,\widetilde{f}(k-1); \\ g(k) &= \frac{1}{2}\,g(k+1) + \frac{1}{2}\,g(k-1), \end{aligned}$$

ce qui peut encore se réécrire : $g(k+1) - g(k) = g(k) - g(k-1)$. Autrement dit, la fonction g est affine et

$$g(k) = \alpha k + g(0) = \alpha k + 1 \qquad ; \qquad \widetilde{f}(k) = \frac{\alpha k + 1}{k+1}.$$

Pour que $\widetilde{f}$ reste dans $[0, 1]$, il faut que $\alpha \in [0, 1]$: si l'on avait $\alpha < 0$, il y aurait des valeurs de $\widetilde{f}$ négatives, et si l'on avait $\alpha > 1$, alors on aurait $\widetilde{f}(1) > 1$.

I.5 Fixons $k \neq 0$; par hypothèse,

$$\widetilde{f}(j) = P(j, j+1)\,\widetilde{f}(j+1) + P(j, j-1)\,\widetilde{f}(j-1) = \sum_{l\in\mathbb{N}} P(j, l)\,\widetilde{f}(l)$$

pour tout $j \neq 0$. L'équation proposée par l'énoncé est clairement vraie au rang $n = 0$; supposons-la établie jusqu'au rang n, et montrons le cas $n+1$. On peut écrire :

$$
\begin{aligned}
\widetilde{f}(k) &= \mathbb{P}_k[\tau_0 \leq n] + \sum_{k_1,\dots,k_n \neq 0} P(k,k_1)\cdots P(k_{n-1},k_n)\,\widetilde{f}(k_n) \\
&= \mathbb{P}_k[\tau_0 \leq n] + \sum_{\substack{k_1,\dots,k_n \neq 0 \\ k_{n+1}\in\mathbb{N}}} P(k,k_1)\cdots P(k_{n-1},k_n)\,P(k_n,k_{n+1})\,\widetilde{f}(k_{n+1}) \\
&= \mathbb{P}_k[\tau_0 \leq n] + \sum_{k_1,\dots,k_n \neq 0} P(k,k_1)\cdots P(k_{n-1},k_n)\,P(k_n,0) \\
&\quad + \sum_{k_1,\dots,k_n,k_{n+1} \neq 0} P(k,k_1)\cdots P(k_{n-1},k_n)\,P(k_n,k_{n+1})\,\widetilde{f}(k_{n+1})
\end{aligned}
$$

puisque par hypothèse $\widetilde{f}(0) = 1$. Il suffit alors de remarquer que la première somme sur la dernière ligne est la probabilité $\mathbb{P}_k[\tau_0 = n+1]$, qui additionnée à $\mathbb{P}_k[\tau_0 \leq n]$ donne $\mathbb{P}_k[\tau_0 \leq n+1]$.

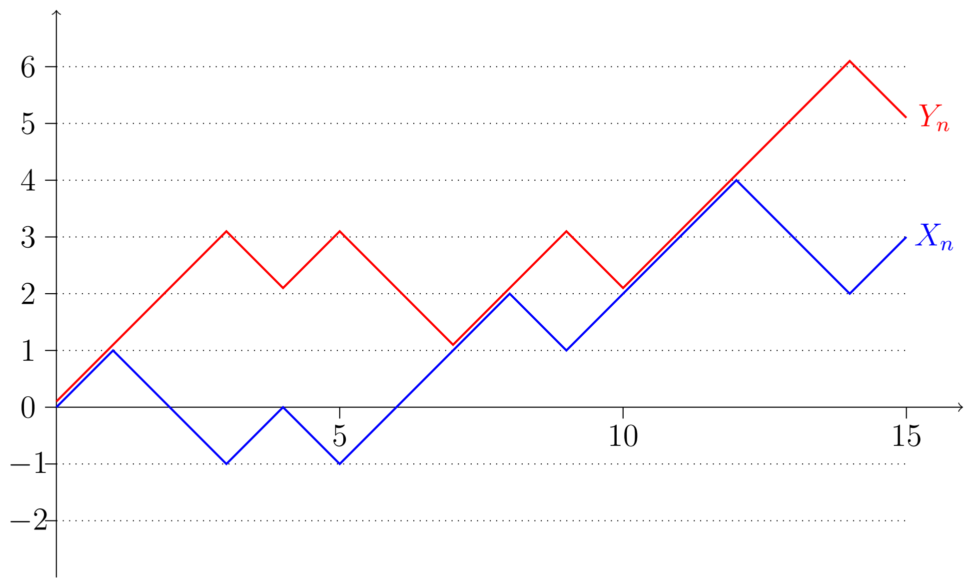
Ce résultat implique en particulier que $\widetilde{f}(k) \geq \mathbb{P}_k[\tau_0 \leq n]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc par passage à la limite que $\widetilde{f}(k) \geq f(k)$.

I.6 D'après la question précédente, f est la solution minimale du système d'équations, correspondant donc à un paramètre $\alpha = 0$. Ainsi,

$$f(k) = \frac{1}{k+1} \quad \text{pour tout entier } k \geq 0.$$

I.7 Si la chaîne était récurrente irréductible, on visiterait tous les états avec probabilité 1, quelque soit le point de départ. Comme ce n'est ici pas le cas, la chaîne irréductible est donc transiente. Ceci implique que $\lim_{n\to\infty} X_n = +\infty$ presque sûrement, quelque soit le point de départ $X_0 = r$.

II.1 Le dessin complété est :



Comme $X_n \leq M_n$, on a toujours

$$Y_n = 2M_n - X_n \geq M_n = \left(\max_{0\leq k\leq n} X_n\right) \geq X_n.$$

On a égalité si et seulement si $X_n = M_n$; ainsi, $Y_n = X_n$ aux instants n où X_n atteint son maximum.

II.2 Si $X_n < Y_n$, alors $X_n < M_n$ d'après la question précédente. Le maximum au temps $n+1$ ne pourra donc pas augmenter, car $X_{n+1} \leq X_n + 1 \leq M_n$. Ainsi,

$$X_n < Y_n \Rightarrow M_{n+1} = M_n \Rightarrow Y_{n+1} = 2M_n - X_{n+1} = 2M_n - X_n - \xi_{n+1} = Y_n - \xi_{n+1}.$$

On a donc montré que si $X_n < Y_n$, alors $(X_{n+1}, Y_{n+1}) = (X_n + \xi_{n+1}, Y_n - \xi_{n+1})$. Supposons maintenant $X_n = M_n = Y_n$. Alors, le maximum au temps $n+1$ peut augmenter d'une unité si $X_{n+1} = X_n + 1$ (dans le cas contraire, $M_{n+1} = M_n$). On a donc :

$$\begin{cases} \xi_{n+1} = 1 & \Rightarrow M_{n+1} = M_n + 1 \Rightarrow Y_{n+1} = 2M_n + 2 - X_n - 1 = Y_n + 1; \\ \xi_{n+1} = -1 & \Rightarrow M_{n+1} = M_n \qquad \Rightarrow Y_{n+1} = 2M_n - X_n + 1 = Y_n + 1. \end{cases}$$

Ainsi, si $X_n = Y_n$, alors $(X_{n+1}, Y_{n+1}) = (X_n + \xi_{n+1}, Y_n + 1)$. On a donc bien montré que $(X_{n+1}, Y_{n+1}) = f(X_n, Y_n, \xi_{n+1})$ dans tous les cas.

II.3 La question précédente implique que la paire $(X_n, Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov sur l'espace $\mathfrak{X}$ (en effet, les aléas $(\xi_n)_{n\geq 1}$ sont supposés i.i.d.). Sa matrice de transition est donnée par :

$$Q((k,l),(k+1,l-1)) = Q((k,l),(k-1,l+1)) = \frac{1}{2}$$

si $k < l$, et

$$Q((k,l),(k+1,l+1)) = Q((k,l),(k-1,l+1)) = \frac{1}{2}$$

si $k = l$.

II.4 Comme $Y_n = 2M_n - X_n$, Y_n et X_n ont même parité. On sait déjà que $Y_n \geq X_n$, et comme $M_n \geq 0$, $Y_n \geq -X_n$, d'où $Y_n \geq X_n \geq -Y_n$. Ainsi, $X_n \in I_{Y_n}$.

II.5 Supposons d'abord $l' = l+1$, et fixons $k' \in I_{l'}$. Notons que, pour que $Q((k,l),(k',l'))$ soit non nulle, il faut que $k \in \{k'+1, k'-1\}$. On a donc :

$$\begin{aligned} \sum_{k\in I_l} Q((k,l),(k',l+1)) &= Q((k'-1,l),(k',l+1)) + 1_{(k'+1\leq l)}\, Q((k'+1,l),(k',l+1)) \\ &= \frac{1_{(k'=l')}}{2} + \frac{1_{(k'<l')}}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Si $l' = l-1$, on calcule de même :

$$\sum_{k\in I_l} Q((k,l),(k',l-1)) = Q((k'+1,l),(k',l-1)) + Q((k'-1,l),(k',l-1)) = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

en utilisant le fait que, puisque $k' \in I_l'$, on a $k' \leq l'$, donc $k'-1 < l'+1 = l$.

II.6 On calcule

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}[Y_{n+1} = l_{n+1} \mid Y_1 = l_1, \ldots, Y_n = l_n] \\
&= \frac{\mathbb{P}[Y_1 = l_1, \ldots, Y_n = l_n, Y_{n+1} = l_{n+1}]}{\mathbb{P}[Y_1 = l_1, \ldots, Y_n = l_n]} \\
&= \sum_{k_1,\ldots,k_{n+1}} \frac{\mathbb{P}[(X_1, Y_1) = (k_1, l_1), \ldots, (X_n, Y_n) = (k_n, l_n), (X_{n+1}, Y_{n+1}) = (k_{n+1}, l_{n+1})]}{\mathbb{P}[Y_1 = l_1, \ldots, Y_n = l_n]} \\
&= \sum_{k_1,\ldots,k_{n+1}} \frac{\mathbb{P}[(X_1, Y_1) = (k_1, l_1), \ldots, (X_n, Y_n) = (k_n, l_n)]}{\mathbb{P}[Y_1 = l_1, \ldots, Y_n = l_n]} Q((k_n, l_n), (k_{n+1}, l_{n+1})) \\
&= \sum_{k_n,k_{n+1}} \frac{\mathbb{P}[Y_1 = l_1, \ldots, Y_n = l_n, X_n = k_n]}{\mathbb{P}[Y_1 = l_1, \ldots, Y_n = l_n]} Q((k_n, l_n), (k_{n+1}, l_{n+1})) \\
&= \sum_{k_n,k_{n+1}} p_{(l_1,\ldots,l_n)}(k_n)\, Q((k_n, l_n), (k_{n+1}, l_{n+1})).
\end{aligned}$$

II.7 Le résultat est clair pour $n = 0$. Supposons le résultat établi jusqu'au rang n, et calculons

$$p_{(l_1,\ldots,l_n,l_{n+1})}(k_{n+1}) = \frac{\mathbb{P}[Y_1 = l_1, \ldots, Y_n = l_n, Y_{n+1} = l_{n+1}, X_{n+1} = k_{n+1}]}{\mathbb{P}[Y_1 = l_1, \ldots, Y_n = l_n, Y_{n+1} = l_{n+1}]}.$$

Le dénominateur de cette fraction se décompose comme suit :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}[Y_1 = l_1, \ldots, Y_n = l_n, Y_{n+1} = l_{n+1}, X_{n+1} = k_{n+1}] \\
&= \sum_{k_n \in I_{l_n}} \mathbb{P}[Y_1 = l_1, \ldots, Y_n = l_n, Y_{n+1} = l_{n+1}, X_n = k_n, X_{n+1} = k_{n+1}] \\
&= \sum_{k_n \in I_{l_n}} \mathbb{P}[Y_1 = l_1, \ldots, Y_n = l_n, X_n = k_n]\, Q((k_n, l_n), (k_{n+1}, l_{n+1})) \\
&= \sum_{k_n \in I_{l_n}} \mathbb{P}[Y_1 = l_1, \ldots, Y_n = l_n]\, p_{(l_1,\ldots,l_n)}(k_n)\, Q((k_n, l_n), (k_{n+1}, l_{n+1})) \\
&= \sum_{k_n \in I_{l_n}} \mathbb{P}[Y_1 = l_1, \ldots, Y_n = l_n]\, \frac{Q((k_n, l_n), (k_{n+1}, l_{n+1}))}{l_n + 1}
\end{aligned}$$

Le numérateur est égal à la somme sur toutes les valeurs possibles de X_{n+1} de la quantité ci-dessus, c'est-à-dire :

$$\sum_{\substack{k_n \in I_{l_n} \\ \widetilde{k}_{n+1} \in I_{l_{n+1}}}} \mathbb{P}[Y_1 = l_1, \ldots, Y_n = l_n]\, \frac{Q((k_n, l_n), (\widetilde{k}_{n+1}, l_{n+1}))}{l_n + 1}.$$

Lorsque l'on fait le ratio, les probabilités $\mathbb{P}[Y_1 = l_1, \ldots, Y_n = l_n]$ se simplifient et on obtient simplement

$$p_{(l_1,\ldots,l_n,l_{n+1})}(k_{n+1}) = \frac{\sum_{k_n \in I_{l_n}} Q((k_n, l_n), (k_{n+1}, l_{n+1}))}{\sum_{k_n \in I_{l_n}, \widetilde{k}_{n+1} \in I_{l_{n+1}}} Q((k_n, l_n), (\widetilde{k}_{n+1}, l_{n+1}))}.$$

D'après la question II.6, le numérateur vaut $\frac{1}{2}$ et le dénominateur vaut $\frac{1}{2} \operatorname{card}(I_{l_{n+1}}) = \frac{l_{n+1}+1}{2}$. Ainsi,

$$p_{(l_1,\ldots,l_n,l_{n+1})}(k_{n+1}) = \frac{1}{l_{n+1} + 1}.$$

II.8 En insérant le résultat de la question précédente dans le calcul de la question II.6, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[Y_{n+1} = l_{n+1} \,|\, Y_1 = l_1, \ldots, Y_n = l_n] &= \frac{1}{l_n + 1} \sum_{\substack{k_n \in I_{l_n} \\ k_{n+1} \in I_{l_{n+1}}}} Q((k_n, l_n), (k_{n+1}, l_{n+1})) \\ &= \frac{\operatorname{card}(I_{l_{n+1}})}{2\,(l_n+1)} = \frac{l_{n+1}+1}{2(l_n+1)}.\end{aligned}$$

Le résultat ne dépend que de (l_n, l_{n+1}), donc on a montré que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov. Sa matrice de transition est :

$$P(l, l+1) = \frac{l+2}{2(l+1)} \quad ; \quad P(l, l-1) = \frac{l}{2(l+1)}.$$

C'est donc la même chaîne de Markov que dans l'exercice I. MWAHAHAHAHAHAHAHA (rires diaboliques).

II.9 D'après l'exercice I, on a une chaîne de Markov irréductible transiente. En particulier, Y_n tend vers $+\infty$ presque sûrement.