Durée : 3 heures. Les notes de cours (polycopiés ou notes manuscriptes) sont autorisées. Sont interdits : livres, calculatrices, téléphones, ordinateurs ou objets apparentés. Toutes les réponses doivent être justifiées, et la rédaction sera prise en compte. On pourra admettre un résultat d'une question précédente si nécessaire; il est fortement conseillé de traiter le plus possible les parties I et II avant d'aborder les parties III et IV. Les coordonnées d'un vecteur $x \in \mathbb{R}^d$ seront notées $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(d)}$, l'exposant permettant de ne pas confondre avec les indices d'une suite.

Partie I. Marche aléatoire définie par une distribution de pas. (6 points) Dans tout le problème, $d \geq 1$ est un entier fixé et $\mathbb{Z}^d$ est le réseau standard de dimension d :

$$\mathbb{Z}^d = \{(n^{(1)}, n^{(2)}, \ldots, n^{(d)}) \mid \forall i \in [\![1, d]\!],\ n^{(i)} \in \mathbb{Z}\}.$$

On fixe également une partie finie $S \subset \mathbb{Z}^d$ et une mesure de probabilité μ de support S : ainsi, $(\mu(s))_{s \in S}$ est une famille de nombres réels strictement positifs, et $\sum_{s \in S} \mu(s) = 1$. Par convention, $\mu(x) = 0$ si $x \notin S$. On se donne ensuite une suite $(T_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes, chaque T_n étant de loi μ :

$$\forall n \geq 1,\ \forall s \in S,\ \mathbb{P}[T_n = s] = \mu(s).$$

La *marche aléatoire* dont la loi des pas est μ est le processus aléatoire $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $(\mathbb{Z}^d)^{\mathbb{N}}$ défini par :

$$X_0 = (0, \ldots, 0) \qquad ; \qquad \forall n \geq 1,\ X_n = T_1 + T_2 + \cdots + T_n,$$

l'addition des vecteurs de $\mathbb{Z}^d$ s'effectuant bien sûr coordonnées par coordonnées. On notera $(X_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim \mathrm{MA}(\mathbb{Z}^d, \mu)$ pour indiquer que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$ dont la loi des pas est μ.

I.1 Montrer que si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim \mathrm{MA}(\mathbb{Z}^d, \mu)$, alors $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov d'espace d'états $\mathbb{Z}^d$. Donner la valeur de la matrice de transition $P(x, y)$ pour tous x et y dans le réseau $\mathbb{Z}^d$.

I.2 Une partie $S \subset \mathbb{Z}^d$ est dite *génératrice* si, pour tout vecteur entier $x \in \mathbb{Z}^d$, il existe un entier $r \geq 0$ et des pas $s_1, s_2, \ldots, s_r$ dans S tels que $x = s_1 + s_2 + \cdots + s_r$. Pour $i \in [\![1, d]\!]$, on note $e_i = (0, \ldots, 0, 1^{(i)}, 0, \ldots, 0)$ le vecteur de $\mathbb{Z}^d$ dont l'unique coordonnée non nulle est la i-ième coordonnée, égale à 1. Montrer que la partie

$$S_0 = \{e_1, e_2, \ldots, e_d, -e_1, -e_2, \ldots, -e_d\}$$

est une partie génératrice de $\mathbb{Z}^d$.

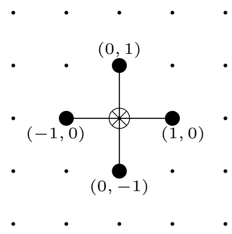
I.3 Montrer qu'une marche aléatoire $(X_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim \mathrm{MA}(\mathbb{Z}^d, \mu)$ est une chaîne de Markov irréductible sur $\mathbb{Z}^d$ si et seulement si le support S de la loi μ des pas est une partie génératrice de $\mathbb{Z}^d$.

I.4 Soit S' une partie génératrice de $\mathbb{Z}^d$, et S une partie de $\mathbb{Z}^d$ telle que :

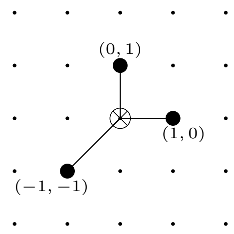
$$\forall s' \in S',\ \text{il existe } r \geq 1 \text{ et des pas } s_1, s_2, \ldots, s_r \text{ dans } S \text{ tels que } s' = s_1 + s_2 + \cdots + s_r.$$

Montrer qu'alors S est une partie génératrice de $\mathbb{Z}^d$.

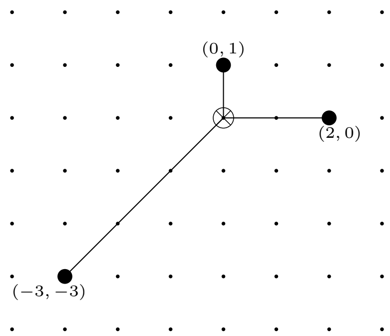
I.5 Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^2$ telle que le support S de sa loi des pas μ est l'une des parties suivantes (le symbole $\otimes$ désigne l'origine $(0, 0)$, et les $\bullet$ désignent les points de S) :



support S_1



support S_2



support S_3

Montrer dans chaque cas que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov irréductible sur $\mathbb{Z}^2$.

I.6 Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim \mathrm{MA}(\mathbb{Z}^d, \mu)$ une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$, et S le support de μ, qu'on suppose générateur de $\mathbb{Z}^d$. On note

$$E_\mu = \sum_{s\in S} \mu(s)\, s,$$

qui est un vecteur de $\mathbb{R}^d$. Donner un lien entre ce vecteur et le comportement de X_n pour n grand. Montrer que si $E_\mu \neq (0,\ldots,0)$, alors la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est irréductible transiente.

Partie II. Marches aléatoires et transformées de Fourier. (4 points) Si ν est une mesure de probabilité de support fini $S \subset \mathbb{Z}^d$, on note

$$\widehat{\nu}(\xi) = \sum_{s\in S} \nu(s)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle \xi \,|\, s\rangle},\ \ \xi \in \mathbb{R}^d$$

sa *transformée de Fourier*, $\langle \xi \mid s\rangle = \sum_{i=1}^d \xi^{(i)} s^{(i)}$ désignant le produit scalaire standard de $\mathbb{R}^d$. Par exemple, si ν attribue un poids $\frac{1}{4}$ aux quatre points du support S_1 de la question I.5, alors

$$\widehat{\nu}(\xi) = \frac{1}{4}\,(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi^{(1)}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi^{(1)}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi^{(2)}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi^{(2)}}).$$

II.1 Montrer que pour toute mesure de probabilité ν à support fini $S \subset \mathbb{Z}^d$, la fonction $\widehat{\nu}$ est 2π-périodique en chaque coordonnée :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d,\ \forall (n^{(1)},\ldots,n^{(d)}) \in \mathbb{Z}^d,\ \widehat{\nu}(\xi^{(1)} + 2n^{(1)}\pi, \ldots, \xi^{(d)} + 2n^{(d)}\pi) = \widehat{\nu}(\xi^{(1)},\ldots,\xi^{(d)}).$$

Établir ensuite par un calcul d'intégrales la formule d'inversion de Fourier :

$$\forall x \in \mathbb{Z}^d,\ \nu(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi,\pi]^d} \widehat{\nu}(\xi)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle x \,|\, \xi\rangle}\, d\xi^{(1)} \cdots d\xi^{(d)},$$

l'intégrale multiple ci-dessus étant prise avec chaque variable $\xi^{(i)}$ parcourant l'intervalle $[-\pi,\pi]$.

II.2 Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim \mathrm{MA}(\mathbb{Z}^d, \mu)$, avec μ loi des pas à support fini. Pour $n \geq 1$, on note μ_n la loi marginale de X_n : $\mathbb{P}[X_n = x] = \mu_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$. En particulier, $\mu_1 = \mu$. En conditionnant par rapport au premier pas, montrer que pour tout $n \geq 1$, et tout $x \in \mathbb{Z}^d$,

$$\mu_{n+1}(x) = \sum_{s\in S} \mu(s)\, \mu_n(x - s).$$

En déduire que chaque loi marginale μ_n est supportée par une partie S_n finie de $\mathbb{Z}^d$.

II.3 Montrer par récurrence sur $n \geq 1$ l'identité

$$\widehat{\mu_n}(\xi) = (\widehat{\mu}(\xi))^n$$

valable pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$. Montrer par ailleurs que $\widehat{\mu_n}(\xi) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle \xi \,|\, X_n\rangle}]$ pour tout $n \geq 1$.

Partie III. Apériodicité et estimée de la transformée de Fourier. (8 points) Jusqu'à la fin du problème, la loi des pas μ à support fini $S \subset \mathbb{Z}^d$ est fixée, et on suppose que S est une partie génératrice de $\mathbb{Z}^d$, de sorte que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim \mathrm{MA}(\mathbb{Z}^d, \mu)$ est une chaîne de Markov irréductible (question I.5). On suppose également que la chaîne est *apériodique* : ainsi, pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$, il existe un entier $n(x)$ tel que si P est la matrice de transition de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors $P^n(x,x) > 0$ pour tout $n \geq n(x)$ (voir le Lemme 3.15 du cours).

III.1 Sous les hypothèses ci-dessus, montrer qu'il existe un entier N tel que la loi marginale μ_N de X_N vérifie :

$$\mu_N(e_0) > 0,\ \ \mu_N(e_1) > 0, \ldots, \mu_N(e_d) > 0$$

avec $e_0 = (0, \ldots, 0)$ et les $e_{i\in[\![1,d]\!]}$ comme dans la question I.2.

III.2 On rappelle la condition d'égalité dans l'inégalité triangulaire complexe : si $z_1, \ldots, z_r$ sont des nombres complexes, alors $|\sum_{i=1}^r z_i| \leq \sum_{i=1}^r |z_i|$, avec égalité si et seulement si tous les z_i s'écrivent $z_i = r_i\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec le même argument $\theta \in [-\pi, \pi]$. Avec l'entier N de la question précédente, montrer que si $\xi \in [-\pi,\pi]^d$ n'est pas égal à $(0,\ldots,0)$, alors $|\widehat{\mu_N}(\xi)| < 1$.

III.3 Montrer que si $\xi \in [-\pi,\pi]^d$ n'est pas égal à $(0,\ldots,0)$, alors $|\widehat{\mu}(\xi)| < 1$.

Pour préciser l'inégalité de la question précédente, on effectue un développement limité de $\widehat{\mu_N}$ au voisinage de $(0,\ldots,0)$, N étant l'entier de la question III.1. On rappelle que $E_\mu = \sum_{s\in S} \mu(s)\, s$.

III.4 On pose $E_{\mu_n} = \sum_{s\in S_n} \mu_n(s)\, s$, S_n étant le support de μ_n. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $E_{\mu_n} = n\, E_\mu$.

III.5 Montrer qu'au voisinage de $(0,\ldots,0)$,

$$\widehat{\mu_N}(\xi) = 1 + \mathrm{i}\,\langle E_{\mu_N} \,|\, \xi\rangle - \frac{1}{2} \sum_{s\in S_N} \mu_N(s)\, (\langle \xi \,|\, s\rangle)^2 + O(\|\xi\|^3),$$

$\|\xi\|$ étant la norme euclidienne définie par $\|\xi\|^2 = \langle \xi \,|\, \xi\rangle$ (on rappelle que toutes les normes sont équivalentes sur $\mathbb{R}^d$).

III.6 On suppose que $E_\mu = 0$. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ et $\lambda > 0$ tel que si $\|\xi\| \leq \varepsilon$, alors

$$|\widehat{\mu_N}(\xi)| \leq 1 - N\lambda\|\xi\|^2.$$

III.7 En utilisant un argument de compacité et l'inégalité $1 - x \leq \mathrm{e}^{-x}$, montrer que pour tout $\xi \in [-\pi,\pi]^d$,

$$|\widehat{\mu_N}(\xi)| \leq \mathrm{e}^{-N\rho\|\xi\|^2} \qquad ; \qquad |\widehat{\mu}(\xi)| \leq \mathrm{e}^{-\rho\|\xi\|^2}.$$

pour une certaine constante $\rho > 0$ (qui dépend de la loi fixée μ).

Partie IV. Transience des marches de dimension $d \geq 3$. (5 points) Dans cette dernière section, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim \mathrm{MA}(\mathbb{Z}^d, \mu)$ est une marche aléatoire sur le réseau $\mathbb{Z}^d$ avec $d \geq 3$ et μ supportée par une partie S génératrice de $\mathbb{Z}^d$. On suppose dans un premier temps que la chaîne est apériodique et que $E_\mu = 0$.

IV.1 On rappelle la valeur de l'intégrale gaussienne : pour tout $a > 0$, $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-ax^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$. En utilisant la formule d'inversion de Fourier de la question II.1, le résultat de la question II.3 et l'inégalité de la question III.7, montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in \mathbb{Z}^d$,

$$\mu_n(x) \leq \frac{C}{n^{\frac{d}{2}}}.$$

IV.2 En considérant la série $\sum_{n\geq 1} \mu_n(0,\ldots,0)$, en déduire que la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est irréductible transiente.

IV.3 Montrer plus généralement que si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim \mathrm{MA}(\mathbb{Z}^d, \mu)$ est une marche aléatoire sur le réseau $\mathbb{Z}^d$ avec $d \geq 3$ et μ supportée par une partie génératrice de $\mathbb{Z}^d$, alors $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est irréductible transiente (on demande donc d'enlever l'hypothèse d'apériodicité et l'hypothèse $E_\mu = 0$).

I.1 *(1 point)* On peut écrire chaque X_{n+1} sous la forme $X_{n+1} = f(X_n, T_n)$, $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une suite de variables i.i.d. et $f(x, s) = x+s$ étant une fonction mesurable. Par le théorème de représentation des chaînes de Markov, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bien une chaîne de Markov. De plus,

$$P(x, y) = \mathbb{P}[x + T_1 = y] = \mathbb{P}[T_1 = y - x] = \mu(y - x)$$

pour toute paire de points $(x, y) \in (\mathbb{Z}^d)^2$.

I.2 *(0.5 point)* Si $x = (x^{(1)}, \ldots, x^{(d)}) \in \mathbb{Z}^d$, notons $I = \{i \in [\![1, d]\!] \mid x^{(i)} > 0\}$ et $J = \{j \in [\![1, d]\!] \mid x^{(j)} < 0\}$. Alors,

$$x = \sum_{i\in I} \underbrace{e_i + \cdots + e_i}_{x^{(i)} \text{ termes}} + \sum_{j\in J} \underbrace{(-e_j) + \cdots + (-e_j)}_{-x^{(j)} \text{ termes}}$$

est une représentation de x comme somme finie d'éléments de S_0. Ainsi, S_0 est bien une partie génératrice de $\mathbb{Z}^d$.

I.3 *(1 point)* Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est irréductible, alors pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$, il existe un entier $r \geq 0$ un chemin $(0, x_1, x_2, \ldots, x_r = x)$ dans $\mathbb{Z}^d$ tel que chaque transition $x_i \to x_{i+1}$ ait probabilité positive pour la matrice de transition P. Or, $P(x_i, x_{i+1}) = \mu(x_{i+1} - x_i)$, donc $s_i = x_{i+1} - x_i$ appartient au support S de μ. Alors, $x = \sum_{i=1}^{r} x_{i+1} - x_i = \sum_{i=1}^{r} s_i$, donc x est une somme finie d'éléments de S. Ainsi, la partie S est génératrice dans $\mathbb{Z}^d$. La suite d'implications ci-dessus est en fait clairement une équivalence.

I.4 *(1 point)* Sous ces hypothèses, si $x \in \mathbb{Z}^d$, alors il existe $s'_1, \ldots, s'_q$ dans S' tels que $x = s'_1 + \cdots + s'_q$, et chaque s'_i s'écrit comme une somme finie $s'_i = s_{i,1} + s_{i,2} + \cdots + s_{i,r_i}$ avec les $s_{i,j}$ dans S. Donc,

$$x = \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{r_i} s_{i,j}$$

est une somme finie d'éléments de S, et S est une partie génératrice de $\mathbb{Z}^d$.

I.5 *(1 point)* La partie S_1 correspond à la question I.2. Pour la partie S_2, il suffit d'après la question précédente de montrer que tous les éléments de S_1 sont sommes d'éléments de S_2. C'est clair pour les vecteurs $(1, 0)$ et $(0, 1)$, et on a également

$$(-1, 0) = (-1, -1) + (0, 1) \quad ; \quad (0, -1) = (-1, -1) + (1, 0),$$

donc S_2 engendre S_1 qui est génératrice, et S_2 est génératrice. Utilisons le même argument pour montrer que S_3 est génératrice. On a :

$$(-1, -1) = (2, 0) + (-3, -3) + 2 \times (0, 1) \quad ; \quad (1, 0) = 2 \times (2, 0) + (-3, -3) + 3 \times (0, 1),$$

donc S_3 engendre S_2 qui est génératrice, et S_3 est génératrice.

I.6 *(1.5 point)* Par la loi des grands nombres, $\frac{X_n}{n}$ tend presque sûrement vers E_μ. Si $E_\mu \neq 0$, ceci implique qu'il existe $\eta = \frac{\|E_\mu\|}{2} > 0$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \geq 1$ tel que

$$\mathbb{P}\left[\forall n \geq N,\ \frac{\|X_n\|}{n} \geq \eta\right] \geq 1 - \varepsilon.$$

Dans ce qui suit, nous utiliserons cette information avec $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Remarquons que l'événement considéré ci-dessus contient strictement

$$\{\forall n \geq N,\ X_n \neq 0\}.$$

Or, si la chaîne était récurrente irréductible, alors l'événement ci-dessus aurait probabilité nulle. Donc, la chaîne $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est transiente irréductible.

II.1 *(1.5 point)* Pour la 2π-périodicité en toutes les coordonnées de la transformée de Fourier, on écrit simplement avec $n \in \mathbb{Z}^d$:

$$\widehat{\nu}(\xi + 2\pi n) = \sum_{s \in S} \nu(s)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle \xi + 2\pi n \,|\, s\rangle} = \sum_{s \in S} \nu(s)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle \xi \,|\, s\rangle}\, \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\langle n \,|\, s\rangle} = \sum_{s \in S} \nu(s)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle \xi \,|\, s\rangle} = \widehat{\nu}(\xi),$$

puisque tous les produits scalaires $\langle n \mid s\rangle = \sum_{i=1}^d n^{(i)}\, s^{(i)}$ sont entiers ($n \in \mathbb{Z}^d$ et $s \in \mathbb{Z}^d$). Pour la formule d'inversion de Fourier, on peut calculer le terme de droite de la formule :

$$\begin{aligned}\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi,\pi]^d} \widehat{\nu}(\xi)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle x \,|\, \xi\rangle}\, d\xi^{(1)} \cdots d\xi^{(d)} &= \sum_{s \in S} \nu(s) \int_{[-\pi,\pi]^d} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle s - x \,|\, \xi\rangle}\, \frac{d\xi^{(1)}}{2\pi} \cdots \frac{d\xi^{(d)}}{2\pi} \\ &= \sum_{s \in S} \nu(s) \prod_{i=1}^d \left(\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(s^{(i)} - x^{(i)})t}\, \frac{dt}{2\pi} \right).\end{aligned}$$

Si $s^{(i)} \neq x^{(i)}$ pour un indice $i \in [\![1, d]\!]$, alors l'intégrale $\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(s^{(i)} - x^{(i)})t}\, dt$ s'annule. Par conséquent, la formule d'inversion donne

$$\sum_{s \in S} \nu(s)\, 1_{(s=x)} = \nu(x),$$

avec par convention $\nu(x) = 0$ si $x \notin S$.

II.2 *(1.5 point)* On calcule $\mu_{n+1}(x)$ en conditionnant par rapport à la valeur de X_n :

$$\begin{aligned}\mu_{n+1}(x) = \mathbb{P}[X_{n+1} = x] &= \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{P}[X_{n+1} = x \text{ et } X_n = y] \\ &= \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{P}[X_{n+1} = x \mid X_n = y]\, \mu_n(y) = \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} \mu(x - y)\, \mu_n(y)\end{aligned}$$

d'après la question I.1. Lorsque y parcourt $\mathbb{Z}^d$, il en va de même pour $x - y$, donc le changement de variables $s = x - y$ est valide :

$$\mu_{n+1}(x) = \sum_{s \in \mathbb{Z}^d} \mu(s)\, \mu_n(x - s).$$

Cette somme peut maintenant être restreinte au support S de μ, car $\mu(s) = 0$ si $s \notin S$. Montrons maintenant pourquoi ceci implique que μ_n a un support fini. L'argument le plus simple consiste à introduire une borne K sur les normes $\|s\|$ des éléments du support S de μ. Montrons alors que si $\mu_n(x) \neq 0$, alors $\|x\| \leq nK$. Le résultat est clair au rang $n = 1$, puisque $\mu_1 = \mu$. Supposons le résultat vrai au rang $n \geq 1$. Si $\mu_{n+1}(x) > 0$, alors il existe $s \in S$ tel que $\mu(s) > 0$ et $\mu_n(x - s) > 0$. Par hypothèse de récurrence, $\|x - s\| \leq nK$, donc par l'inégalité triangulaire, $\|x\| \leq \|s\| + \|x - s\| \leq (n+1)K$ et le résultat est bien vrai au rang $n + 1$. Comme le nombre de points entiers de $\mathbb{Z}^d$ de norme bornée par une constante est toujours fini, ceci implique bien que toutes les lois μ_n ont des supports S_n finis.

II.3 *(1 point)* Le plus simple est peut-être de remarquer d'abord que

$$\widehat{\mu_n}(\xi) = \sum_{x \in S_n} \mu_n(x)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle \xi \,|\, x\rangle} = \sum_{x \in S_n} \mathbb{P}[X_n = x]\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle \xi \,|\, x\rangle} = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle \xi \,|\, X_n\rangle}].$$

Alors, comme $X_{n+1} = X_n + T_{n+1}$ avec T_{n+1} indépendant de $X_n = T_1 + T_2 + \cdots + T_n$, on a la factorisation :

$$\widehat{\mu_{n+1}}(\xi) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle \xi \,|\, X_n\rangle}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle \xi \,|\, T_{n+1}\rangle}] = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle \xi \,|\, X_n\rangle}]\, \mathbb{E}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle \xi \,|\, T_{n+1}\rangle}] = \widehat{\mu_n}(\xi)\, \widehat{\mu}(\xi),$$

d'où la formule $\widehat{\mu_n}(\xi) = (\widehat{\mu}(\xi))^n$ par récurrence sur $n \geq 1$.

III.1 *(1.5 point)* Puisque la chaîne est apériodique, pour tout entier $n \geq n_0$ avec un seuil n_0 assez grand, les probabilités de retour $P^n(e_0, e_0), P^n(e_1, e_1), \ldots, P^n(e_d, e_d)$ sont toutes strictement positives. Fixons par ailleurs $n_1, \ldots, n_d$ tels que $P^{n_1}(e_0, e_1) > 0, \ldots, P^{n_d}(e_0, e_d) > 0$; de tels entiers existent puisque la chaîne est supposée irréductible. Alors, si $N \geq \max(n_0, n_0+n_1, \ldots, n_0+n_d)$, on a bien $\mu_N(e_0) = P^N(e_0, e_0) > 0$ puisque $N \geq n_0$, et on a aussi pour $i \in [\![1, d]\!]$:

$$\mu_N(e_i) = P^N(e_0, e_i) \geq P^{n_i}(e_0, e_i)\, P^{N-n_i}(e_i, e_i) > 0,$$

car $N - n_i \geq n_0$.

III.2 *(1 point)* D'après la question précédente, N est choisi de sorte que les vecteurs $e_0, e_1, \ldots, e_d$ appartiennent tous au support S_N de μ_N. Notons $S'_N = S_N \setminus \{e_0, \ldots, e_d\}$, et

$$\widehat{\mu_N}(\xi) = \mu_N(e_0) + \sum_{i=1}^{d} \mu_N(e_i)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi^{(i)}} + \sum_{s \in S'_N} \mu_N(s)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle \xi \,|\, s\rangle}.$$

L'inégalité triangulaire dit que

$$|\widehat{\mu_N}(\xi)| \leq \mu_N(e_0) + \sum_{i=1}^{d} \mu_N(e_i) + \sum_{s \in S'_N} \mu_N(s) = \mu_N(s_N) = 1,$$

avec égalité si et seulement si toutes les phases $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi^{(i)}}$ et $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle \xi \,|\, s\rangle}$ pour $s \in S'_N$ sont égales à 1 (la phase de $\mu_N(e_0)$). Dès que $\xi \in [-\pi, \pi]^d$ n'est pas le vecteur nul, l'une des phases $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi^{(i)}}$ n'est pas égale à 1, donc l'inégalité $|\widehat{\mu_N}(\xi)| \leq 1$ est en fait une inégalité stricte $|\widehat{\mu_N}(\xi)| < 1$.

III.3 *(0.5 point)* C'est évident puisque $|\widehat{\mu}(\xi)| = |\widehat{\mu_N}(\xi)|^{\frac{1}{N}}$ d'après la question II.3, et est donc la racine N-ième d'un nombre positif strictement plus petit que 1 si $\xi \in [-\pi, \pi]^d \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$.

III.4 *(0.5 point)* La quantité E_μ est l'espérance dans $\mathbb{R}^d$ d'un pas T_n de la marche aléatoire X_n. On a donc

$$E_{\mu_n} = \mathbb{E}[X_n] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[T_i] = \sum_{i=1}^{n} E_\mu = n\, E_\mu.$$

III.5 *(1.5 point)* Le développement limité de chaque terme $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle \xi \,|\, s\rangle}$ pour ξ au voisinage de 0 est :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle \xi \,|\, s\rangle} = 1 + \mathrm{i}\, \langle \xi \mid s\rangle - \frac{1}{2}\, (\langle \xi \mid s\rangle)^2 + O(|\, \langle \xi \mid s\rangle\,|^3).$$

L'entier N étant fixé, les s intervenant dans le support de S_N sont en nombre fini, et pour chacun, on a l'inégalité de Cauchy–Schwarz $|\,\langle \xi \mid s\rangle\,| \leq \|\xi\|\, \|s\| \leq C\, \|\xi\|$ pour une certaine constante positive C (dépendant de μ et de N, mais ces quantités sont fixées). Par conséquent, pour tout $s \in S_N$,

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle \xi \,|\, s\rangle} = 1 + \mathrm{i}\, \langle \xi \mid s\rangle - \frac{1}{2}\, (\langle \xi \mid s\rangle)^2 + O(\|\xi\|^3)$$

avec une constante dans le $O(\cdot)$ dépendant de μ et de N (ce sera le cas de tous les $O(\cdot)$ dans ce qui suit). En faisant la combinaison linéaire de ces identités, on obtient :

$$\begin{aligned}\widehat{\mu_N}(\xi) &= \sum_{s \in S_N} \mu_N(s)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle \xi \,|\, s\rangle} \\ &= \sum_{s \in S_N} \mu_N(s) + \mathrm{i} \left\langle \xi \,\middle|\, \sum_{s \in S_N} \mu_N(s)\, s \right\rangle - \frac{1}{2} \sum_{s \in S_N} \mu_N(s)\, (\langle \xi \mid s\rangle)^2 + O(\|\xi\|^3).\end{aligned}$$

La première somme vaut 1, et la seconde somme est par définition $E_{\mu_N} = N\, E_\mu$.

III.6 *(1.5 point)* Si $E_\mu = 0$, le premier terme de l'estimée disparaît. Par ailleurs, S_N contient tous les vecteurs $e_1, \ldots, e_d$, pour lesquels $(\langle \xi \mid e_i \rangle)^2 = (\xi^{(i)})^2$. Notons $C_1 > 0$ une borne inférieure des coefficients $\mu_N(e_1), \ldots, \mu_N(e_d)$. On a :

$$\sum_{s \in S_N} \mu_N(s)\, (\langle \xi \mid s \rangle)^2 \geq \sum_{i=1}^{d} \mu_N(e_i)\, (\xi^{(i)})^2 \geq C_1 \sum_{i=1}^{d} (\xi^{(i)})^2 = C_1\, \|\xi\|^2.$$

Par ailleurs, si C_2 est une borne supérieure des normes carrées $\|s\|^2$ avec $s \in S_N$, alors par Cauchy–Schwarz,

$$\sum_{s \in S_N} \mu_N(s)\, (\langle \xi \mid s \rangle)^2 \leq C_2\, \|s\|^2 \sum_{s \in S_N} \mu_N(s) = C_2\, \|s\|^2.$$

Le terme principal de l'estimée de $\widehat{\mu_N}(\xi)$ (sans le reste $O(\|\xi\|^3)$) est donc un nombre réel encadré par $1 - \frac{C_2}{2}\, \|s\|^2$ et $1 - \frac{C_1}{2}\, \|s\|^2$ pour certaines constantes $C_2 > C_1 > 0$. Pour $\|\xi\|$ assez petit, $\|\xi\|^3 \leq \frac{C_1}{4}\, \|\xi\|^2$ et $1 - \frac{C_2}{2}\, \|s\|^2 \geq 0$, donc par l'inégalité triangulaire,

$$0 \leq |\widehat{\mu_N}(\xi)| \leq 1 - \frac{C_1}{4}\, \|\xi\|^2.$$

C'est ce que l'on voulait démontrer en renommant $\frac{C_1}{4} = N\lambda$ avec $\lambda > 0$.

III.7 *(1.5 point)* L'inégalité $|\widehat{\mu_N}(\xi)| \leq 1 - N\rho\, \|\xi\|^2$ est donc valable pour tout $\|\xi\| < \varepsilon$ avec ε et ρ assez petits. Maintenant, sur la partie compacte

$$K = [-\pi, \pi]^d \setminus \{\xi \mid \|\xi\| < \varepsilon\},$$

la fonction continue $|\mu_N(\xi)|$ reste strictement plus petite que 1 d'après la question III.2, donc elle admet un maximum $M < 1$. Ce maximum est plus petit que $1 - N\rho \max(\|\xi\|^2,\ \xi \in [-\pi,\pi]^d)$ pour ρ assez petit, puisque la quantité $\max(\|\xi\|^2,\ \xi \in [-\pi,\pi]^d)$ est une constante finie. En choisissant ρ assez petit, on peut donc écrire pour tout $\xi \in K$:

$$|\widehat{\mu_N}(\xi)| \leq 1 - N\rho \max(\|\xi\|^2,\ \xi \in [-\pi,\pi]^d) \leq 1 - N\rho \|\xi\|^2,$$

et d'après ce qui précède, cette inégalité est aussi valable sur la boule $\{\xi \mid \|\xi\| < \varepsilon\}$. On a donc pour tout $\xi \in [-\pi,\pi]^d$:

$$|\widehat{\mu_N}(\xi)| \leq 1 - N\rho\, \|\xi\|^2 \leq \mathrm{e}^{-N\rho\, \|\xi\|^2}$$

à condition de choisir ρ assez petit. L'inégalité pour $|\widehat{\mu}(\xi)|$ s'en déduit puisque $|\widehat{\mu}(\xi)| = |\widehat{\mu_N}(\xi)|^{\frac{1}{N}}$.

IV.1 *(2 points)* En combinant les résultats des questions II.1, II.3 et III.7, on obtient

$$\begin{aligned}
|\mu_n(x)| &\leq \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi,\pi]^d} \left| \widehat{\mu_n}(\xi)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle x \mid \xi \rangle} \right| d\xi^{(1)} \cdots d\xi^{(d)} \\
&\leq \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi,\pi]^d} |\widehat{\mu}(\xi)|^n \, d\xi^{(1)} \cdots d\xi^{(d)} \leq \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi,\pi]^d} \mathrm{e}^{-n\rho\, \|\xi\|^2}\, d\xi^{(1)} \cdots d\xi^{(d)} \\
&\leq \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-n\rho t^2}\, dt \right)^d \leq \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-n\rho t^2}\, dt \right)^d = \left(\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{n\rho}} \right)^d,
\end{aligned}$$

d'où le résultat demandé avec une constante $C = \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi\rho}} \right)^d$.

IV.2 *(1 point)* Pour une chaîne irréductible, on sait que la transience est équivalente à la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} P^n(x,x)$ pour n'importe quel état $x \in \mathbb{Z}^d$. Ici, on a

$$\sum_{n\geq 1} P^n(e_0, e_0) = \sum_{n\geq 1} \mu_n(e_0) \leq C \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\frac{d}{2}}} < +\infty$$

la convergence étant liée au fait que $\frac{d}{2} \geq \frac{3}{2} > 1$ (série de Riemann). On a donc établi la transience de la chaîne sur $\mathbb{Z}^{d\geq 3}$ sous les hypothèses d'irréducibilité, d'apériodicité et de marche centrée ($E_\mu = (0,\ldots,0)$).

IV.3 *(2 point)* D'après la question I.6, si $E_\mu \neq (0,\ldots,0)$, alors on a aussi transience. Le cas qu'il reste à traiter est donc celui d'une marche irréductible, centrée mais pas apériodique. Fixons une loi des pas μ sur $\mathbb{Z}^{d\geq 3}$correspondant à ces hypothèses, et notons

$$\mu' = \frac{\mu + \delta_{(0,\ldots,0)}}{2}.$$

La loi μ' correspond à la marche aléatoire "paresseuse" $(X'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ obtenue à partir de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme suit : on parcourt les mêmes états que la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mais chaque transition $(X_n = x) \to (X_{n+1} = y)$ est remplacée par une suite finie d'états visités $(x, x, \ldots, x, y)$, avec un temps d'attente aléatoire pour passer de x à y suivant une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$. Il est facile de voir que si μ est supportée par une partie génératrice de $\mathbb{Z}^d$, alors il en va de même pour μ'. De plus,

$$E_{\mu'} = \frac{1}{2}\, E_\mu,$$

donc $E_\mu = 0$ implique que $E_{\mu'} = 0$. Finalement, assurer de pouvoir toujours rester au même endroit avec probabilité positive force l'apériodicité de la chaîne $(X'_n)_{n\in\mathbb{N}}$. D'après ce qui précède, $(X'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc transiente, ce que l'on peut traduire comme suit : presque sûrement, pour toute boîte finie $B \subset \mathbb{Z}^d$, il existe N (aléatoire) tel que $B \cap \{X'_n,\ n \geq N\} = \emptyset$. Or, d'après la description que l'on a faite de $(X'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par rapport à $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on peut coupler les deux marches de sorte que chaque ensemble d'états $\{X'_n,\ n \geq N\}$ se réécrive sous la forme $\{X_n,\ n \geq M\}$. Ainsi, pour toute boîte finie $B \subset \mathbb{Z}^d$, il existe M (aléatoire) tel que $B \cap \{X_n,\ n \geq M\} = \emptyset$; et la chaîne $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est encore irréductible transiente.