Durée : 3 heures. Les notes de cours (polycopiés ou notes manuscriptes) sont autorisées. Sont interdits : livres, calculatrices, téléphones, ordinateurs ou objets apparentés. Toutes les réponses doivent être justifiées, et la rédaction sera prise en compte. On pourra admettre un résultat d'une question précédente si nécessaire. Les deux exercices sont indépendants et rapportent le même nombre de points. On notera 1_A l'indicatrice d'un événement A : cette fonction vaut 1 si A se produit, et 0 sinon.

Exercice 1. On fixe une suite de paramètres $(p_k)_{k\geq 0}$ dans $[0,1]$, et on considère la chaîne de Markov sur l'espace d'états $\mathbb{N}$, de matrice de transition :

$$P(k,k+1) = p_k \quad ; \quad P(k,0) = 1-p_k$$

pour tout $k \geq 0$ (les autres coefficients $P(k,l)$ sont nuls).

1. Dessiner le graphe de la matrice de transition P. À quelle condition nécessaire et suffisante sur la suite des paramètres $(p_k)_{k\geq 0}$ la chaîne de Markov est-elle irréductible sur $\mathbb{N}$? On fera attention au fait que, en général, on peut redescendre d'un état k à l'état 0 en commençant par monter aux états $k+1, k+2, \ldots, k+l$ puis en descendant à 0 depuis $k+l$. Dans tout ce qui suit, on supposera la condition d'irréductibilité vérifiée.
2. Pour $k \geq 0$, on note $q_k = \prod_{j=0}^{k-1} p_j = p_0 p_1 \cdots p_{k-1}$, et $r_k = q_k - q_{k+1}$; en particulier, $q_0 = 1$. Que dire de la suite de nombres réels $(q_k)_{k\geq 0}$? Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   (a) La chaîne de Markov de matrice P admet une mesure invariante non nulle.
   (b) On a $\sum_{k=0}^{\infty} r_k = 1$.
   (c) On a $\lim_{k\to\infty} q_k = 0$
3. On suppose que $\lim_{k\to\infty} q_k \neq 0$. Montrer que dans ce cas, la chaîne de Markov de matrice P est transiente. Que dire alors presque sûrement de

   $$\lim_{n\to\infty} X_n,$$

   où $(X_n)_{n\geq 0}$ est la chaîne de Markov de matrice P ?
4. Pour $n \geq 0$, exprimer la probabilité de retour $\mathbb{P}_0[X_n = 0] = P^n(0,0)$ comme une somme de certains produits $r_{n_1} r_{n_2} \cdots r_{n_m}$:

   $$P^n(0,0) = \sum_{(n_1,\ldots,n_m)\in I_n} r_{n_1} r_{n_2} \cdots r_{n_m},$$

   où I_n est un ensemble de m-uplets d'entiers qu'on demande de déterminer (l'entier m est arbitraire et dans chaque ensemble I_n, il pourra y avoir des 1-uplets, des 2-uplets, des 3-uplets, etc.). On pourra décomposer tout chemin de longueur n reliant 0 à 0 en une concaténation de boucles $0 \to 1 \to 2 \to 3 \to \cdots \to n_i \to 0$.
5. On suppose que $\lim_{k\to\infty} q_k = 0$. Montrer que dans ce cas, la chaîne de Markov de matrice P est récurrente. On pourra relier les deux quantités suivantes :

   $$\sum_{n=0}^{\infty} P^n(0,0) \quad \text{et} \quad \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} r_k\right)^m.$$

6. Montrer que la chaîne de Markov de matrice P est récurrente positive si et seulement si la série $\sum_{k\geq 0} q_k$ est convergente. Donner dans ce cas l'expression de l'unique mesure de probabilité invariante.
7. Que dire de la chaîne de Markov si $\lim_{k\to\infty} q_k = 0$ et $\sum_{k\geq 0} q_k = +\infty$?

On obtient ainsi une classification complète des comportements possibles de la chaîne en fonction des comportements limites de la suite et de la série de terme général q_k.

Exercice 2. L'objectif de cet exercice est de modéliser l'évolution au cours du temps du nombre de machines dans un atelier de réparation. On note X_n le nombre (entier positif) de machines dans l'atelier de réparation au début du n-ième jour. Au $(n+1)$-ième jour :

— Si X_n était plus grand que 1, alors une machine a été réparée pendant le n-ième jour. Ainsi, en l'absence de l'arrivée de nouvelles machines à réparer, on aurait $X_{n+1} = X_n - 1_{(X_n \geq 1)}$.

— De nouvelles machines à réparer peuvent arriver à l'atelier au cours du n-ième jour. On considère une suite $(Z_n)_{n\geq 0}$ de variables aléatoires à valeurs entières positives ou nulles, indépendantes et identiquement distribuées : Z_n est le nombre de nouvelles machines à réparer arrivant au n-ième jour. Ces machines s'ajoutent au nombre X_n, de sorte que l'équation de récurrence reliant X_n à X_{n+1} est :

$$X_{n+1} = X_n - 1_{(X_n \geq 1)} + Z_n.$$

On supposera les Z_n intégrables et indépendantes de X_0. On notera $a_k = \mathbb{P}[Z_n = k]$ pour $k \geq 0$; comme les Z_n sont i.i.d., cette probabilité ne dépend que de k.

1. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov, et exprimer sa matrice de transition $P(l,m)$ en fonction de la suite de coefficients $(a_k)_{k\geq 0}$. On pourra donner la réponse en explicitant le coin supérieur gauche de la matrice P :

$$\begin{pmatrix} P(0,0) & P(0,1) & P(0,2) & P(0,3) & \cdots \\ P(1,0) & P(1,1) & P(1,2) & P(1,3) & \cdots \\ P(2,0) & P(2,1) & P(2,2) & P(2,3) & \cdots \\ P(3,0) & P(3,1) & P(3,2) & P(3,3) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}.$$

2. Montrer que la chaîne de Markov est irréductible si et seulement si $a_0 > 0$ et $a_0 + a_1 < 1$.
3. Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, on note $g_X(s)$ sa série génératrice, qui est la fonction de $s \in [0,1]$ définie par

$$g_X(s) = \mathbb{E}[s^X] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}[X = n]\, s^n.$$

Que valent en général $g_X(0)$ et $g_X(1)$? Si X est intégrable, montrer que g_X est dérivable sur tout le segment $[0,1]$, avec $g'_X(1) = \mathbb{E}[X]$.

Puisque les Z_n ont toutes la même distribution, elles ont toutes la même espérance et la même fonction génératrice ; on notera donc $\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[Z_n]$ et $g_Z(s) = g_{Z_n}(s)$.

4. Montrer que les fonctions génératrices $g_{X_n}(s)$ vérifient la relation de récurrence :

$$g_{X_{n+1}}(s) = g_{X_n}(0)\, g_Z(s) + (g_{X_n}(s) - g_{X_n}(0))\, \frac{g_Z(s)}{s}$$

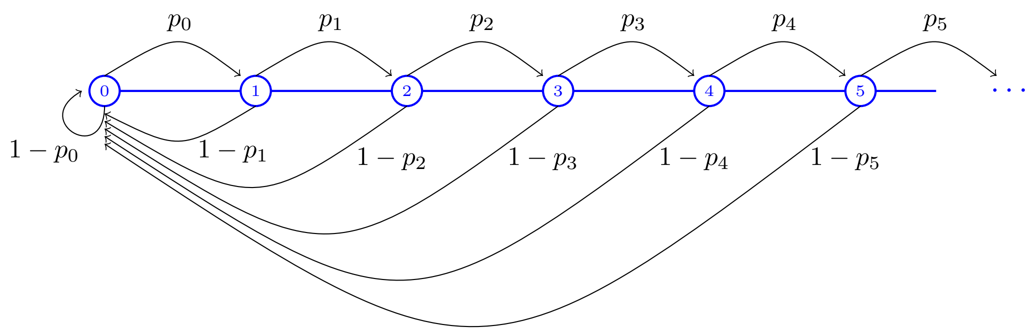
pour $s > 0$ (quelque soit la loi initiale de X_0, et donc la valeur de $g_{X_0}(s)$).

Jusqu'à la fin de l'exercice, on suppose que Z_n n'est pas presque sûrement égal à 1 ; cette dernière hypothèse est équivalente au fait que $g_Z(s)$ n'est pas la fonction $s \mapsto s$. On suppose aussi l'existence d'une mesure de probabilité π sur $\mathbb{N}$ laissée invariante par la matrice P.

5. Si X_0 est distribuée suivant π, quelle est la distribution de X_n pour $n \geq 1$? En déduire que la fonction génératrice $g_\pi(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \pi(n)\, s^n$ vérifie dans ce cas l'équation
$$g_\pi(s)\,(s - g_Z(s)) = \pi(0)\,(s-1)\,g_Z(s)$$
pour tout $s \in [0,1]$.
6. En prenant un développement limité de cette équation au voisinage de $s = 1$, montrer que $\mathbb{E}[Z] \leq 1$.
7. Si $\mathbb{E}[Z] = 1$ et Z_n n'est pas presque sûrement égal à 1, montrer que $g_Z(s) > s$ pour tout $s \in [0,1)$. En déduire que sous les hypothèses données au début de la question 4., on a en fait $\mathbb{E}[Z] < 1$.

Comme dans l'exercice précédent, on pourrait donner une classification complète des comportements possibles de la chaîne en fonction de $\mathbb{E}[Z]$ *: la chaîne est récurrente positive si* $\mathbb{E}[Z] < 1$*, récurrente nulle si* $\mathbb{E}[Z] = 1$*, et transiente si* $\mathbb{E}[Z] > 1$.

I.1 Le graphe de la matrice de transition est :



La matrice est irréductible si on peut aller de tout état à tout autre état. Pour pouvoir monter jusqu'à un niveau arbitrairement élevé, on ne peut le faire que par des sauts de taille $+1$, donc il faut que tous les coefficients p_k soient strictement positifs. Cette condition étant satisfaite, pour pouvoir descendre jusqu'à un niveau arbitrairement bas, il faut et il suffit de pouvoir redescendre jusqu'à 0, partant de n'importe quel état k (c'est clairement nécessaire, et comme on peut ensuite remonter jusqu'à tout autre niveau, c'est suffisant). Notons qu'il n'est pas nécessaire de le faire en un seul coup : partant de k, on peut d'abord monter quelques étages $k+1, k+2, \ldots, k+l$, puis descendre à cette étape à 0. Il faut et il suffit donc que $1-p_m$ soit non nul pour des m arbitrairement grands; autrement dit, $(p_k)_{k\geq 0}$ ne peut pas être stationnaire à 1 (c'est-à-dire égale à 1 pour k suffisamment grand). Ainsi :

$$\big(\text{la chaîne est irréductible}\big) \Leftrightarrow \big(\text{la suite } (p_k)_{k\geq 0} \text{ est strictement positive et non stationnaire à } 1\big).$$

I.2 Comme les paramètres p_k sont tous non nuls et plus petits que 1, la suite $(q_k)_{k\geq 0}$ est à valeurs dans $(0,1]$ et décroissante. Comme $p_k \neq 1$ pour une infinité de termes, $q_{k+1} < q_k$ pour une infinité de termes, de sorte que $(q_k)_{k\geq 0}$ n'est pas stationnaire. En tant que suite décroissante minorée, $(q_k)_{k\geq 0}$ admet une limite $q \in [0,1)$. Cherchons maintenant les mesures invariantes pour la chaîne de matrice P. Comme cette chaîne est irréductible, une mesure invariante π non nulle charge tout $\mathbb{N}$; posons $a = \pi(0)$, qui est donc un nombre réel strictement positif. Les équations d'invariance s'écrivent :

$$a = \pi(0) = \sum_{l\in\mathbb{N}} \pi(l)\, P(l,0) = \sum_{l\in\mathbb{N}} \pi(l)\,(1-p_l)$$

et, pour $k \geq 0$,

$$\pi(k+1) = p_k\, \pi(k).$$

Ces équations impliquent immédiatement que $\pi(k) = a\, q_k$ pour tout $k \geq 0$, et la première équation donne aussi :

$$a = a \sum_{l\in\mathbb{N}} q_l(1-p_l) = a \sum_{l\in\mathbb{N}} (q_l - q_{l+1}) = a \sum_{l\in\mathbb{N}} r_l.$$

Il faut donc que $1 = \sum_{l\in\mathbb{N}}(q_l - q_{l+1}) = (1-q_1) + (q_1 - q_2) + \cdots$. C'est le cas si la série télescopique $\sum_{k\geq 0} r_k$ converge vers 1; or, sa somme partielle au rang l est $R_l = 1 - q_{l+1}$. Donc, la condition nécessaire et suffisante à l'existence d'une mesure invariante pour P est :

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} r_k = 1\right) \Leftrightarrow \left(\lim_{k\to\infty} q_k = 0\right).$$

Notons que dans le cas contraire, $\sum_{k=0}^{\infty} r_k$ converge vers $1 - q < 1$. Par ailleurs, lorsqu'une mesure invariante non nulle existe, elle est unique à un coefficient multiplicatif près, car les équations ci-dessus admettent une unique solution une fois la valeur $a = \pi(0)$ fixée.

I.3 Si q_k ne tend pas vers 0, alors il n'existe pas de mesure invariante d'après la question précédente. Or, une chaîne récurrente irréductible admet toujours une mesure invariante (unique à un coefficient près) ; on est donc dans l'autre cas, avec une chaîne transiente irréductible. Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est transiente sur l'espace des états $\mathbb{N}$, alors chaque entier ne peut être visité qu'un nombre fini de fois, donc étant fixé un intervalle $[\![0, M]\!]$, X_n n'est pas dans $[\![0, M]\!]$ pour n assez grand. Autrement dit,

$$\lim_{n\to\infty} X_n = +\infty$$

presque sûrement dans ce cas de transience.

I.4 Explicitons le coefficient $P^n(0,0)$. Pour revenir en 0 en n étapes, il faut avoir fait m boucles $0 \to 1 \to 2 \to \cdots \to n_i \to 0$, avec $n_1, n_2, \ldots, n_m$ entiers positifs et

$$\sum_{i=1}^{m}(n_i + 1) = n_1 + n_2 + \cdots + n_m + m = n;$$

en effet, la somme des longueurs des boucles est le nombre total d'étapes. La probabilité pour faire ceci avec des entiers n_i fixés est le produit des probabilités de transition :

$$\begin{aligned}
&\underbrace{\big(P(0,1)P(1,2)\cdots P(n_1-1,n_1)P(n_1,0)\big)}_{\text{première boucle}}\underbrace{\big(P(0,1)P(1,2)\cdots P(n_2-1,n_2)P(n_2,0)\big)}_{\text{seconde boucle}}\cdots\\
&= (p_0p_1\cdots p_{n_1-1}(1-p_{n_1}))(p_0p_1\cdots p_{n_2-1}(1-p_{n_2}))\cdots\\
&= (q_{n_1} - q_{n_1+1})(q_{n_2} - q_{n_2+1})\cdots\\
&= r_{n_1}r_{n_2}\cdots r_{n_m}.
\end{aligned}$$

On conclut que :

$$P^n(0,0) = \sum_{\substack{n_1,\ldots,n_m\geq 0\\ n_1+n_2+\cdots+n_m+m=n}} r_{n_1}r_{n_2}\cdots r_{n_m}.$$

I.5 On sait que la chaîne de Markov est récurrente irréductible si et seulement si $\sum_{n=0}^{\infty} P^n(0,0) = +\infty$. Sommer sur tous les entiers n revient à retirer la condition $n_1 + n_2 + \cdots + n_m + m = n$, donc :

$$\sum_{n=0}^{\infty} P^n(0,0) = \sum_{m\geq 0}\sum_{n_1,\ldots,n_m\geq 0} r_{n_1}r_{n_2}\cdots r_{n_m} = \sum_{m\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{\infty} r_k\right)^m.$$

Or, $\sum_{k=0}^{\infty} r_k = 1 - q$, donc le terme de droite est une série géométrique qui est convergente si et seulement si $1-q < 1$, donc si et seulement si $q > 0$. Ainsi, si $q = 0$, alors $\sum_{n=0}^{\infty} P^n(0,0) = +\infty$ et la chaîne est récurrente.

I.6 On sait que pour une chaîne de Markov irréductible, l'existence d'une mesure finie invariante est équivalent à la récurrence positive. D'après la question 2., la mesure invariante est dans ce cas donnée par $\pi(k) = a\,q_k$ pour tout k, et la masse de cette mesure est $a\,(\sum_{k=0}^{\infty} q_k) = a\,Q$ avec $Q = \sum_{k\geq 0} q_k < +\infty$. Donc, il existe une mesure invariante non nulle de masse finie si et seulement si $Q < +\infty$. Dans ce cas, le choix $a = \frac{1}{Q}$ donne l'unique mesure de probabilité invariante :

$$\pi(k) = \frac{q_k}{Q} = \frac{q_k}{\sum_{l=0}^{\infty} q_l} \quad \text{pour tout entier } k.$$

I.7 Lorsque la série $\sum_{k\geq 0} q_k$ est divergente mais a son terme général q_k tendant vers 0, on n'a pas récurrence positive d'après la question précédente, mais on a récurrence d'après la question 5., donc c'est le cas où la chaîne est récurrente nulle.

II.1 On a une relation de récurrence du type $X_{n+1} = f(X_n, Z_n)$ avec $f : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $(Z_n)_{n\geq 0}$ suite de variables i.i.d. et indépendantes de X_0. La fonction f est $f(k,z) = k - 1_{k\geq 1} + l$. Le théorème de représentation des chaînes de Markov assure que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov, de matrice de transition $P(k,l) = \mathbb{P}[f(k,Z) = l]$, avec Z de même loi que les Z_n. Plus précisément :

- si $k = 0$, alors $f(k,Z) = f(0,Z) = Z$, donc $P(0,l) = \mathbb{P}[Z = l] = a_l$;
- si $k \geq 1$, alors $f(k,Z) = k - 1 + Z$, donc $P(k,l) = \mathbb{P}[k-1+Z = l] = 1_{(l\geq k-1)}\, a_{l-k+1}$.

Le coin supérieur gauche de la matrice de transition est donc :

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ & & a_0 & a_1 & \cdots \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

II.2 Si $a_0 + a_1 = 1$, alors la matrice de transition est presque triangulaire inférieure : $P(k,l) = 0$ pour tout couple d'entiers avec $1 \leq k < l$. Par exemple, partant de 1, on ne peut pas atteindre 2, donc la chaîne $(X_n)_{n\geq 0}$ n'est pas irréductible. De même, si $a_0 = 0$, alors la matrice de transition est triangulaire supérieure, donc $P(k,l) = 0$ pour tout couple d'entiers avec $k > l$. La chaîne $(X_n)_{n\geq 0}$ est alors croissante presque sûrement, et elle n'est donc pas irréductible. Ainsi, $a_0+a_1 < 1$ et $a_0 > 0$ sont des conditions nécessaires à l'irréductibilité. Réciproquement, si ces conditions sont vérifiées :

- À chaque étape, on peut faire un pas négatif -1 avec probabilité $a_0 > 0$, donc on peut descendre arbitrairement bas partant de tout niveau. Plus précisément, pour tout couple $k > l$ d'entiers positifs, $P^{k-l}(k,l) = (a_0)^{k-l}$, donc l est atteignable à partir de k.
- Si $a_2 + a_3 + \cdots > 0$, alors partant de tout état k, on peut en une étape monter d'au moins une unité : en effet, $P(0, [\![1,+\infty\,]\!]) = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ et $P(k \geq 1, [\![k+1,+\infty]\!]) = a_2 + a_3 + \cdots$. En plusieurs étapes, partant de $k \in \mathbb{N}$, on peut donc en un nombre fini d'étapes et avec probabilité positive *dépasser* n'importe quel niveau $l > k$. Comme on peut ensuite redescendre par sauts -1 exactement en l, l est atteignable à partir de k pour toute paire $l > k$.

Conclusion : la chaîne est irréductible si et seulement si $a_0 > 0$ et $a_0 + a_1 < 1$.

II.3 On a $g_X(0) = \mathbb{P}[X = 0]$ et $g_X(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}[X = n] = 1$. Cette dernière identité prouve que g_X est toujours une série entière de rayon de convergence au moins égal à 1. En particulier, g_X est toujours dérivable sur $[0,1)$, de dérivée :

$$g_X'(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[X = n]\, n\, s^{n-1}.$$

Si X est intégrable, alors la série ci-dessus est encore convergente en $s = 1$, et c'est la valeur de $g_X'(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[X = n]\, n = \mathbb{E}[X]$.

II.4 Remarquons que X_n est mesurable par rapport à la tribu engendrée par $X_0, Z_0, \dots, Z_{n-1}$, et est donc indépendante de Z_n. On en déduit que :

$$\begin{aligned} g_{X_{n+1}}(s) &= \mathbb{E}[s^{X_{n+1}}] = \mathbb{E}[s^{X_n - 1_{X_n \geq 1} + Z_n}] \\ &= \mathbb{E}[1_{(X_n=0)}\, s^{Z_n}] + \mathbb{E}[1_{(X_n \geq 1)}\, s^{X_n - 1 + Z_n}] \\ &= \mathbb{P}[X_n = 0]\, \mathbb{E}[s^{Z_n}] + \mathbb{E}[1_{(X_n \geq 1)}\, s^{X_n}]\, \mathbb{E}[s^{Z_n - 1}] \\ &= g_{X_n}(0)\, g_Z(s) + (g_{X_n}(s) - g_{X_n}(0))\, \frac{g_Z(s)}{s}. \end{aligned}$$

II.5 Si π est invariante par P et X_0 est distribuée suivant π, alors pour tout $n \geq 1$, la distribution de X_n est

$$\pi\, P^n = \pi.$$

L'équation de récurrence de la question précédente pour $n = 0$ s'écrit alors :

$$g_\pi(s) = \pi(0)\, g_Z(s) + (g_\pi(s) - \pi(0))\, \frac{g_Z(s)}{s}$$

puisque $g_{X_1} = g_{X_0} = g_\pi$. En remultipliant par s et en réorganisant les termes, on obtient :

$$g_\pi(s)\, (s - g_Z(s)) = \pi(0)\, (s-1)\, g_Z(s)$$

pour tout $s \in (0, 1]$. Cette équation est encore valable lorsque $s = 0$: dans ce cas, les deux termes de l'équation valent $-\pi(0)\, g_Z(0)$.

II.6 On peut dériver l'équation de la question 5. sur tout l'intervalle $[0, 1)$, mais a priori pas en $s = 1$, car $g'_\pi(1)$ n'est pas forcément bien définie (on ne sait pas a priori que π a un premier moment). Néanmoins, si $s = 1 - \varepsilon$ avec $\varepsilon = o(1)$, alors :

- $g_\pi(s) = 1 - o(1)$, car g_π est continue en $s = 1$, et $g_\pi(1) = 1$.
- $s - g_Z(s) = (\mathbb{E}[Z] - 1)\varepsilon + o(\varepsilon)$, car g_Z est dérivable en $s = 1$, et $g_Z(1-\varepsilon) = 1 - \mathbb{E}[Z]\, \varepsilon + o(\varepsilon) = 1 - o(1)$.

On obtient donc $(1 - o(1))\, \varepsilon\, (\mathbb{E}[Z] - 1 + o(1)) = -\pi(0)\, \varepsilon\, (1 - o(1))$, d'où $\pi(0) = 1 - \mathbb{E}[Z]$. Comme cette probabilité est comprise entre 0 et 1, ceci force $\mathbb{E}[Z] \leq 1$.

II.7 La fonction g_Z est croissante strictement convexe sur $(0, 1)$ (c'est la série entière $\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, z^k$ qui est à coefficients positifs, et on a $a_0 + a_1 < 1$, donc $g''_Z(s) > 0$). Elle est donc au dessus de sa tangente en $s = 1$. Si $\mathbb{E}[Z] = 1$, ceci implique $g_Z(s) > s$ pour tout $s \neq 1$. Alors, dans l'équation de la question 5., le terme de gauche est strictement positif pour tout $s \in (0, 1)$, tandis que le terme de droite est nul puisque $\pi(0) = 1 - \mathbb{E}[Z]$; c'est une contradiction. On a donc nécessairement $\mathbb{E}[Z] < 1$.