# Chaînes de Markov :

## classification des états

__rappel__ : si $x \in \mathcal{X}$, on connaît les comportements possibles du nombre de visites $V_x$ sous $\mathbb{P}_x$ (récurrence ou transience).

__question__ : que peut-on dire de $V_y$, $y \neq x$ sous $\mathbb{P}_x$ ?

## 1. Le lemme de Borel-Cantelli

Un résultat intermédiaire important est le lemme suivant, qui permet de savoir quand est-ce qu'une infinité d'événements issus d'une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se réalise.

__Lemme__ Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements (parties) d'un espace de probabilité $(\Omega, \mathbb{P})$.

$\{$ une infinité de $A_n$ se réalise $\}$

$\iff \{ \forall k, \exists n \geq k, A_n$ se réalise $\}$

$\iff \bigcap_{k=0}^{\infty} \left( \bigcup_{n \geq k} A_n \right) \underset{(\text{déf})}{=} \limsup_{n \to +\infty} A_n$ est vrai.

1. Si $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}[A_n] < +\infty$, alors $\limsup_{n \to +\infty} A_n$ a probabilité $0$.

2. Si les $A_n$ sont indépendants et si $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}[A_n] = +\infty$, alors $\limsup_{n \to +\infty} A_n$ a probabilité $1$.

<u>Cas particulier important</u> Si les $A_n$ sont indépendants et tous de même probabilité positive, alors $\limsup_{n \to +\infty} A_n$ a probabilité $1$.

Preuve : 1) Soit $\varepsilon > 0$. Comme la série $\sum \mathbb{P}[A_n]$ est convergente, il existe $k_0$ | $\sum_{n=k_0}^{+\infty} \mathbb{P}[A_n] \leq \varepsilon$. Alors,

$$\mathbb{P}[\limsup_{n\to+\infty} A_n] = \mathbb{P}\Big[\bigcap_{k=0}^{\infty}\Big(\bigcup_{n\geq k} A_n\Big)\Big]$$

$$\leq \mathbb{P}\Big[\bigcup_{n\geq k_0} A_n\Big]$$

$$\leq \sum_{n=k_0}^{+\infty} \mathbb{P}[A_n] \leq \varepsilon.$$

Comme c'est vrai $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbb{P}[\limsup A_n] = 0$.

2) Comme l'intersection $\bigcap_{k=0}^{\infty}\Big(\bigcup_{n\geq k} A_n\Big)$ est décroissante,

il suffit de montrer :

$$\forall k, \quad \mathbb{P}\Big[\bigcup_{n\geq k} A_n\Big] = 1$$

$$\iff \mathbb{P}\Big[\bigcap_{n\geq k} \overline{A_n}\Big] = 0.$$

Or, par indépendance,

$$\mathbb{P}\Big[\bigcap_{n\geq k} \overline{A_n}\Big] = \prod_{n\geq k} \mathbb{P}[\overline{A_n}] = \prod_{n\geq k} 1 - \mathbb{P}[A_n]$$

$$\leq \prod_{n\geq k} \exp(-\mathbb{P}[A_n]) = \exp\Big(-\underbrace{\sum_{n\geq k} \mathbb{P}[A_n]}_{\text{série divergente}}\Big)$$

$$\leq \exp(-\infty) = 0.$$

$\square$

# 2. Excursions indépendantes

Pour appliquer le lemme de Borel-Cantelli aux chaînes de Markov, on a besoin d'événements indépendants

excursions à partir d'un état x récurrent.

Soit $\mathcal{X}$ espace d'états

$P$ matrice de transition.

$x$ un état <u>récurrent</u>

On définit par récurrence les temps de retour en $x$ :

$$\tau_x^{(1)} = \inf\{n \geq 1 \mid X_n = x\}$$

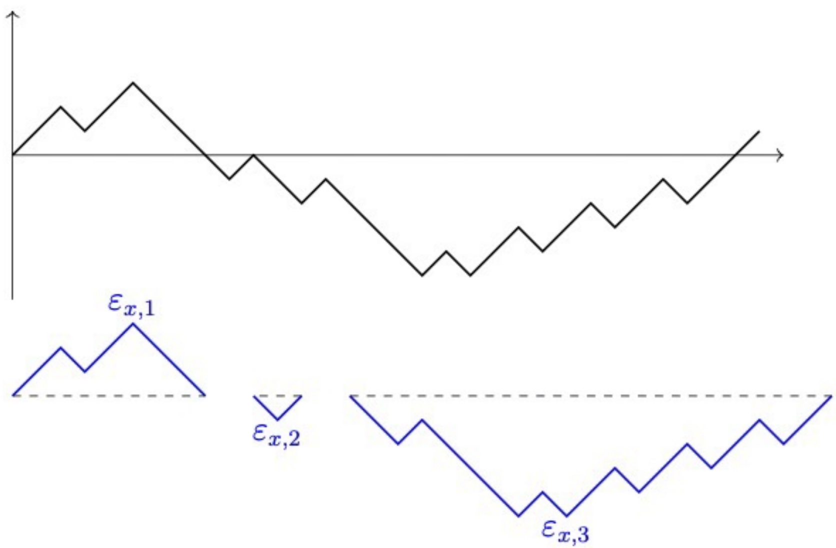
$$\tau_x^{(k\geq 2)} = \inf\{n \geq 1 + \tau_x^{(k-1)} \mid X_n = x\}$$

Comme $x$ est un état récurrent pour $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sous $\mathbb{P}_x$, tous les temps $\tau_x^{(k)}$ sont finis avec probabilité $1$.

Les excursions issues de $x$ sont les suites aléatoires :

$$\mathcal{E}_x^{(k)} = \left( X_{\tau_x^{(k-1)}}, X_{\tau_x^{(k-1)}+1}, \ldots, X_{\tau_x^{(k)}-1} \right)$$

avec par convention $\tau_x^{(0)} = 0$.



**Proposition** Sous $\mathbb{P}_x$, les suites aléatoires $\mathcal{E}_x^{(k)}$, qui sont à valeurs dans $\bigsqcup_{n\geq 1} \mathcal{X}^n$, sont indépendantes et de même loi.

**Preuve:** On a vu comme cas particulier de la propriété de Markov forte :

$\left\{\begin{array}{l}\text{sous la loi } \mathbb{P}_x \\ \text{conditionnellement à } \{\tau_x^{(1)} = t\}\end{array}\right.$, $\mathcal{E}_x^{(1)} = (X_0, \dots X_{t-1})$ et $(X_{n+t})_{n\in\mathbb{N}}$ sont indépendants, et $(X_{n+t})_{n\in\mathbb{N}}$ a loi $\mathbb{P}_x$.

Autrement dit, pour tout $A_1 \subset \bigsqcup_{n\geq 1} \mathcal{X}^n$ événements,

$$B \subset \mathcal{X}^{\mathbb{N}}$$

$$\mathbb{P}_x\left[ \mathcal{E}_x^{(1)} \in A_1 \text{ et } \left(X_{n+\tau_x^{(1)}}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in B \;\middle|\; \tau_x^{(1)} = t \right] \qquad (*)_t$$

$$= \mathbb{P}_x\left[ \mathcal{E}_x^{(1)} \in A_1 \,\middle|\, \tau_x^{(1)} = t \right] \; \mathbb{P}_x\left[ (X_n)_{n\in\mathbb{N}} \in B \right]$$

Si on déconditionne en considérant $\sum_{t=1}^{+\infty} \mathbb{P}_x[\tau_x^{(1)} = t] \, (*)_t$, on obtient :

$$\mathbb{P}_x\left[ \mathcal{E}_x^{(1)} \in A_1 \text{ et } \left(X_{n+\tau_x^{(1)}}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in B \right]$$

$$= \mathbb{P}_x\left[ \mathcal{E}_x^{(1)} \in A_1 \right] \; \mathbb{P}_x\left[ (X_n)_{n\in\mathbb{N}} \in B \right].$$

Considérons en particulier un événement $B$ du type :

$$\mathcal{E}_x^{(1)}\left((X_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) \in A_2 , \; \dots \; \mathcal{E}_x^{(k-1)}\left((X_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) \in A_k .$$

Notons que $\mathcal{E}_x^{(k)}\left(\left(X_{n+\tau_x^{(1)}}\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ = $k$-ième excursion de la chaîne décalée

= $(k+1)$-ième excursion de la chaîne de Markov

$= \mathcal{E}_x^{(k+1)}\left((X_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$.

Donc :

$$\mathbb{P}_x\left[\mathcal{E}_x^{(1)}\in A_1 \text{ et } \mathcal{E}_x^{(2)}\in A_2 \text{ et} \dots \text{ et } \mathcal{E}_x^{(k)}\in A_k\right]$$

$$= \mathbb{P}_x\left[\mathcal{E}_x^{(1)}\in A_1\right]\ \mathbb{P}_x\left[\mathcal{E}_x^{(1)}\in A_2 \text{ et} \dots \text{ et } \mathcal{E}_x^{(k-1)}\in A_k\right]$$

$\square$.

## 3. Classification des états.

On rappelle qu'étant donnés $\mathcal{X}$, $P$, $x$, $y$, on dit que $x$ communique avec $y$ s'il existe $n\geq 1$ avec $P^n(x,y)>0$.

**Théorème** Si $x$ est récurrent et $x \rightsquigarrow y$, alors $y$ est récurrent et $y \rightsquigarrow x$.

**Preuve** Sous $\mathbb{P}_x$, considérons les événements $A_k = \{ y \in \mathcal{E}_x^{(k)} \}$.

Soit $x = x_0 \to x_1 \to \dots \to x_n = y$ un chemin de transitions possibles de $x$ à $y$, de longueur minimale. On a donc $x_i \neq x$ pour $1 \leq i \leq n$.

$\mathbb{P}_x [ X_0 = x, X_1 = x_1, \dots X_n = y ] = P(x, x_1) P(x_1, x_2) \dots P(x_{n-1}, y) > 0$

est inférieure à $\mathbb{P}_x [$ la première excursion issue de $x$ contient $y ]$

$= \mathbb{P} [ A_1 ]$.

Ainsi : $\mathbb{P}[A_1] = p > 0$.

Alors, les $A_k$ sont indépendants et tous de même probabilité positive

$\Longrightarrow$ Borel-Cantelli, $\mathbb{P}_x[$ une infinité de $A_k$ se réalise $] = 1$.

Ceci implique :

1) $y \rightsquigarrow x$ : après la réalisation d'un événement $A_k$, la chaîne revient en $x$ en un temps fini. Ceci se réalise avec probabilité $> 0$ ssi $P^n(y,x) > 0$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$.

2) $y$ est récurrent. On a $\mathbb{P}_x[V_y = +\infty] = 1$, or, par la propriété de Markov forte,

$$\mathbb{P}_x[V_y = +\infty] = \mathbb{P}_x[\tau_y^+ < +\infty]\ \underbrace{\mathbb{P}_y[V_y = +\infty]}_{=1}$$

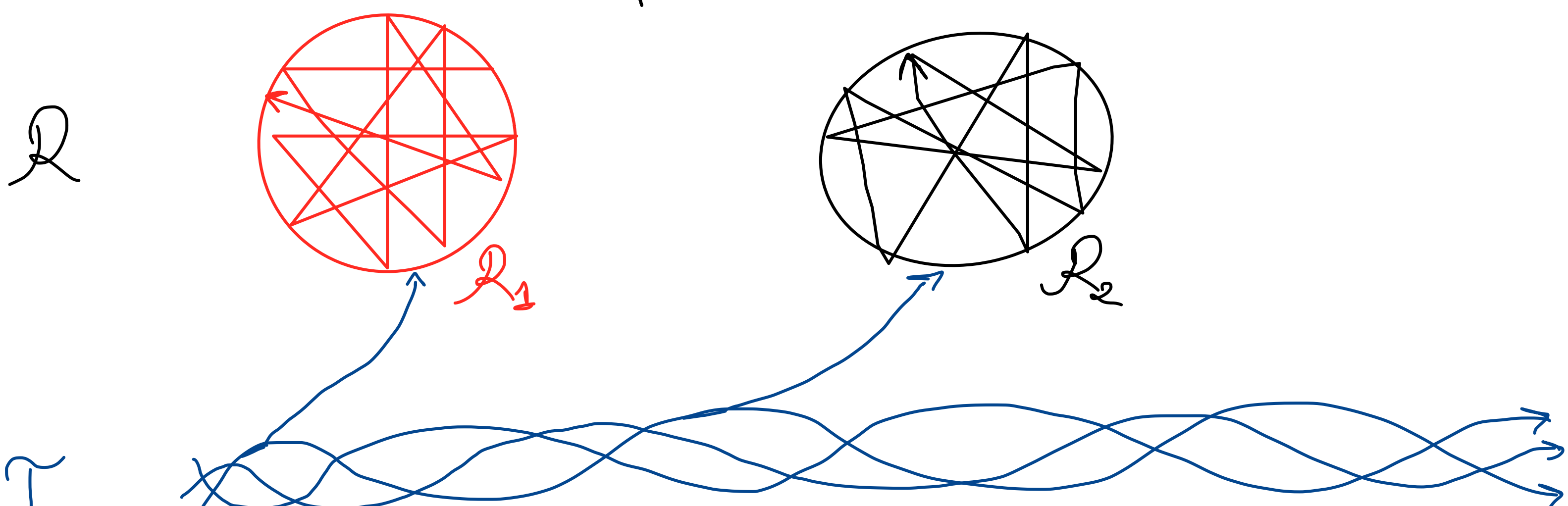
$y$ récurrent. $\longleftarrow 1$ $\square$.

Soit $\mathcal{X}$ un espace d'états, $P$ matrice stochastique.

On peut découper $\mathcal{X}$ en :

$$\mathcal{X} = \underbrace{T}_{\text{états transients}} \cup \underbrace{R}_{\text{états récurrents}} = T \cup \bigsqcup_{i \in I} R_i$$

$R_i$ : classes d'équivalence d'états récurrents pour la relation de communication.



comportement de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sous $\mathbb{P}_x$ (avec probabilité 1)

- si $x \in \mathcal{R}_i$ est un état récurrent : $x$, ainsi que tous les $y \in \mathcal{R}_i$ sont visités infiniment souvent. Ce sont les seuls états visités.

- si $x \in T$ est un état transient :
  - soit la chaîne ne visite que des états transients (chacun un nombre fini de fois)
  - soit la chaîne atteint un état récurrent $x \in \mathcal{R}_i$. À partir de ce moment, elle commence la visite systématique des états de la classe $\mathcal{R}_i$.

<u>Cas particuliers</u> 1) si la matrice de transition $P$ est irréductible, alors soit il y a une seule classe de récurrence, soit tous les états sont transients.

2) si l'on considère une chaîne irréductible finie, alors tous ses états sont récurrents, et sous $\mathbb{P}_x$ avec $x$ arbitraire, $V_y = +\infty$ $\forall y \in \mathcal{X}$.

<u>exemples</u> : 1) la marche aléatoire sur un graphe $G$ fini et connexe visite p.s. tous les sommets une infinité de fois.

2) marche aléatoire de paramètre $p$ sur $\mathbb{Z}$ :

elle est irréductible, transiente si $p \neq 1/2$ (voir TD)

récurrente si $p = 1/2$

3) marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$ : transiente si $d \geq 3$

récurrente si $d \leq 2$.

(résultat plus difficile).