2. La transformée de Fourier non-commutative.

rappel : pour tout groupe fini G :

- l'ensemble $\hat{G}$ des classes de représentations irréductibles de G est fini
- toute représentation V de G se décompose de façon unique comme :

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \hat{G}} m_\lambda \, V^\lambda .$$

- en particulier, $\underbrace{\mathbb{C}G}_{\text{représentation régulière}} = \bigoplus_{\lambda \in \hat{G}} (\dim \lambda) \, V^\lambda .$

1. L'isomorphisme de Fourier

Le dernier point invite à considérer la somme d'algèbres de matrices

$$\mathbb{C}\hat{G} = \bigoplus_{\lambda \in \hat{G}} \mathrm{End}(V^\lambda)$$

$\mathrm{End}(V^\lambda)$ → espace des applications linéaires $V^\lambda \to V^\lambda$.

- $\mathbb{C}G$ est une algèbre, et c'est aussi un espace de Hilbert pour

$$\left\langle \sum_{g\in G} c_g\, g \,\middle|\, \sum_{g\in G} d_g\, g \right\rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \overline{c_g}\, d_g .$$

- $\mathbb{C}\widehat{G}$ est une algèbre ; on peut voir ses éléments comme des applications linéaires $\bigoplus_{\lambda\in\widehat{G}} V^\lambda \longrightarrow \bigoplus_{\lambda\in\widehat{G}} V^\lambda$ qui ont des matrices diagonales par bloc.

On équipe chaque espace $\mathrm{End}(V^\lambda)$ du produit scalaire :

$$\langle U_1^\lambda | U_2^\lambda \rangle_{\mathrm{End}(V^\lambda)} = \frac{\dim\lambda}{|G|^2}\, \mathrm{tr}\left(U_1^{\lambda *} U_2^\lambda\right)$$

$\hookrightarrow$ adjoint pour $\langle\cdot|\cdot\rangle$ sur V^λ, G invariant.

Alors, $\left\langle \bigoplus_{\lambda\in\widehat{G}} U_1^\lambda \,\middle|\, \bigoplus_{\lambda\in\widehat{G}} U_2^\lambda \right\rangle = \sum_{\lambda\in\widehat{G}} \langle U_1^\lambda | U_2^\lambda \rangle_{\mathrm{End}(V^\lambda)}$

munit $\mathbb{C}\widehat{G}$ d'une structure d'espace de Hilbert.

Théorème Il existe une application linéaire $\mathcal{F} : \mathbb{C}G \to \mathbb{C}\hat{G}$ qui est un isomorphisme d'algèbres et une isométrie.

On construit cette transformée de Fourier comme suit :

Si $f \in \mathbb{C}G$, $f = \sum_{g \in G} f(g)\, g$, on pose $\hat{f}(\lambda) = \sum_{g \in G} f(g) \rho^\lambda(g)$
$\in \mathrm{End}(V^\lambda)$

$\hat{f} = \bigoplus_{\lambda \in \hat{G}} \hat{f}(\lambda)$ est un élément de $\mathbb{C}\hat{G}$.

1). $f \mapsto \hat{f}$ est évidemment linéaire, et elle est compatible avec le produit :

$$\widehat{f_1 f_2}(\lambda) = \sum_{g \in G} (f_1 f_2)(g)\, \rho^\lambda(g) = \sum_{g} \Big[\sum_{h,k \mid hk = g} f_1(h) f_2(k) \Big] \rho^\lambda(g)$$

$$= \sum_{h,k} f_1(h) f_2(k) \; \rho^\lambda(h) \; \rho^\lambda(k)$$

$$= \left(\sum_h f_1(h) \, \rho^\lambda(h) \right) \left(\sum_k f_2(k) \, \rho^\lambda(k) \right) = \hat{f_1}(\lambda) \, \hat{f_2}(\lambda).$$

2) Pour montrer que $\hat{f}$ est un isomorphisme et une isométrie, on va utiliser :

<u>Lemme</u> (orthogonalité).

On équipe chaque représentation V^λ d'une base $(e_i^\lambda)_{1 \leq i \leq \dim \lambda}$ orthonormée et on note $(\rho_{ij}^\lambda(g))_{1 \leq i,j \leq \dim \lambda}$ la matrice de $\rho^\lambda(g)$ dans cette base.

Alors :
$$\langle \rho_{ij}^\lambda \mid \rho_{kl}^\mu \rangle_{\mathbb{C}G} = \begin{cases} \dfrac{1}{\dim \lambda} & \text{si } \lambda = \mu, \; i = k, \; j = l. \\[2ex] 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Admettons provisoirement le lemme. Il implique que $(\rho^{\lambda}_{ij})_{\lambda, i, j}$ est une base orthogonale de $\mathbb{C}G$. Il suffit alors de montrer que les images $\widehat{\rho^{\lambda}_{ij}}$ forment une base orthogonale de $\mathbb{C}\widehat{G}$.

$$\left(\widehat{\rho^{\lambda}_{ij}}(\mu)\right)_{kl} = \sum_{g \in G} \rho^{\lambda}_{ij}(g)\, \rho^{\mu}_{kl}(g) = \sum_{g \in G} \overline{\rho^{\lambda^*}_{ij}(g)}\, \rho^{\mu}_{kl}(g)$$

$$|G| \langle \rho^{\lambda^*}_{ij} \mid \rho^{\mu}_{kl} \rangle = \frac{|G|}{\dim \lambda} \mathbb{1}_{(\lambda^* = \mu,\ i = k,\ j = l)}$$

où λ^* est la représentation conjuguée de λ :

$$V^{\lambda^*} = V^{\lambda'} = \hom(V^{\lambda}, \mathbb{C})$$

$$\rho^{\lambda^*}(g)(\phi) = \phi \circ \rho^{\lambda}(g^{-1}).$$

Donc, $\widehat{\rho_{ij}^{\lambda}}(\mu) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mu \neq \lambda^* \\ \frac{|G|}{\dim \lambda} E_{ij}^{\lambda^*} & \leftarrow \text{matrice élémentaire} \end{cases}$

Ainsi : — $\widehat{\rho_{ij}^{\lambda}}$ est de norme carrée $\frac{|G|^2}{\dim \lambda^2} \times \frac{\dim \lambda}{|G|^2} = \frac{1}{\dim \lambda}$

— les $\widehat{\rho_{ij}^{\lambda}}$ sont 2 à 2 orthogonaux. $\square$

<u>Preuve du lemme</u> : en utilisant les bases orthonormales de V^λ et V^μ :

$$\langle \rho_{ij}^{\lambda} \mid \rho_{kl}^{\mu} \rangle_{\mathbb{C}G} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\rho_{ij}^{\lambda}(g)}\, \rho_{kl}^{\mu}(g)$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\langle e_i^\lambda \mid \rho^\lambda(g) e_j^\lambda \rangle} \langle e_k^\mu \mid \rho^\mu(g) e_l^\mu \rangle$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle e_k^\mu \mid g \cdot e_l^\mu \rangle \langle g \cdot e_j^\lambda \mid e_i^\lambda \rangle$$

Considérons l'application linéaire

$$\phi = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |g \cdot e_\ell^\mu \rangle \langle g \cdot e_j^\lambda|$$

$$\phi(v \in V^\lambda) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle g \cdot e_j^\lambda | v \rangle \, g \cdot e_\ell^\mu .$$

C'est un morphisme de représentations dans $\hom_G(V^\lambda, V^\mu)$:

$$\phi(h \cdot v) = \frac{1}{|G|} \sum_g \langle g \cdot e_j^\lambda | h \cdot v \rangle \, g \cdot e_\ell^\mu$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_g \langle \underbrace{h^{-1} g}_{g'} \cdot e_j^\lambda | v \rangle \, \underbrace{g}_{hg'} \cdot e_\ell^\mu$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g'} \langle g' \cdot e_j^\lambda | v \rangle \, hg' \cdot e_\ell^\mu = h \cdot \phi(v).$$

Si $V^\lambda \neq V^\mu$, $\phi = 0$ et $\langle g_{ij}^\lambda | g_{k\ell}^\mu \rangle = 0$.

Sinon, si $\lambda = \mu$, alors $\hom_G(V^\lambda, V^\lambda) = \mathbb{C}\, \mathrm{id}_{V^\lambda}$ et on détermine $\phi = t\, \mathrm{id}_{V^\lambda}$ en calculant la trace de ϕ.

$$t = \frac{1}{\dim \lambda} \operatorname{tr} \phi = \frac{1}{|G| \dim \lambda} \sum_{i=1}^{\dim \lambda} \sum_{g \in G} \langle e_i^\lambda | g \cdot e_\ell^\lambda \rangle \langle g \cdot e_j^\lambda | e_i^\lambda \rangle$$

$$= \frac{1}{|G| \dim \lambda} \sum_{g \in G} \langle g \cdot e_j^\lambda | g \cdot e_\ell^\lambda \rangle$$

$$= \frac{\langle e_j^\lambda | e_\ell^\lambda \rangle}{\dim \lambda} = \frac{\mathbb{1}_{(j=\ell)}}{\dim \lambda}.$$

On conclut si $\lambda = \mu$:

$$\langle \rho_{ij}^\lambda | \rho_{k\ell}^\lambda \rangle = \langle e_i^\lambda | \phi(e_k^\lambda) \rangle = \frac{\mathbb{1}_{(i=k,\, j=\ell)}}{\dim \lambda} \quad \square.$$

2. Applications de la transformée de Fourier

On a vu pendant la preuve du théorème d'isomorphisme que les ρ_{ij}^{λ} formaient une base orthonormée de $\mathbb{C}G$. On peut donc les utiliser pour décomposer n'importe quelle fonction $f = \sum_{g \in G} f(g) g \in \mathbb{C}G$:

$$f(g) = \sum_{\lambda \in \hat{G}} \sum_{i,j=1}^{\dim \lambda} \frac{\langle \rho_{ij}^{\lambda} \mid f \rangle}{\langle \rho_{ij}^{\lambda} \mid \rho_{ij}^{\lambda} \rangle} \rho_{ij}^{\lambda}(g)$$

$$= \sum_{\lambda \in \hat{G}} \frac{\dim \lambda}{|G|} \cdot \sum_{i,j=1}^{\dim \lambda} \sum_{h \in H} \overline{\rho_{ij}^{\lambda}(h)}\, f(h)) \; \rho_{ij}^{\lambda}(g)$$

$$= \sum_{\lambda \in \hat{G}} \frac{\dim \lambda}{|G|} \sum_{i,j=1}^{\dim \lambda} (\hat{f}(\lambda))_{ij} \; \rho_{ij}^{\lambda *}(g)$$

$$= \sum_{\lambda \in \hat{G}} \frac{\dim \lambda}{|G|} \sum_{i,j=1}^{\dim \lambda} \left(\hat{f}(\lambda)\right)_{ij} \rho^{\lambda}_{ji}(g^{-1})$$

$$= \sum_{\lambda \in \hat{G}} \frac{\dim \lambda}{|G|} \operatorname{tr}\left(\hat{f}(\lambda)\, \rho^{\lambda}(g^{-1})\right).$$

formule d'inversion de Fourier.

En particulier, si μ est le générateur d'une marche aléatoire sur G, on obtient :

$$\mu_n(g) = \sum_{\lambda \in \hat{G}} \frac{\dim \lambda}{|G|} \operatorname{tr}\left(\hat{\mu}_n(\lambda)\, \rho^{\lambda}(g^{-1})\right)$$

$$= \sum_{\lambda \in \hat{G}} \frac{\dim \lambda}{|G|} \operatorname{tr}\left(\left(\hat{\mu}(\lambda)\right)^n \rho^{\lambda}(g^{-1})\right).$$

Cas particulier important :

Si $f = \sum_{g \in G} f(g) \cdot g$, on dit que f est centrale si l'une des assertions équivalentes suivantes est vérifiée :

1) $f \in Z(\mathbb{C}G)$: $f \cdot x = x \cdot f \quad \forall x \in \mathbb{C}G$

2) $f(gh) = f(hg) \quad \forall g, h \in G$

3) $f(ghg^{-1}) = f(h) \quad \forall g, h \in G$ (fonction invariante par conjugaison).

Théorème Une fonction f sur G est centrale ssi c'est une combinaison linéaire des caractères irréductibles

$$\mathrm{ch}^\lambda(g) = \mathrm{tr}(\rho^\lambda(g)).$$

Ces caractères irréductibles forment une base orthonormée de $Z(\mathbb{C}G)$.

<u>Preuve</u> Si $f \in Z(\mathbb{C}G)$, $\hat{f} \in Z(\mathbb{C}\hat{G})$

$$Z(\mathbb{C}\hat{G}) = \bigoplus_{\lambda \in \hat{G}} Z(\mathrm{End}(V^\lambda)) = \bigoplus_{\lambda \in \hat{G}} \mathbb{C}\,\mathrm{id}_{V^\lambda}$$

$\Longrightarrow \forall \lambda$, $\hat{f}(\lambda)$ est un multiple de la matrice identité de V^λ.

Plus précisément, $\hat{f}(\lambda) = \dfrac{\mathrm{tr}\,\hat{f}(\lambda)}{\dim \lambda} \times \mathrm{id}_{V^\lambda}$

$$= \frac{|G|}{\dim \lambda}\left(\frac{1}{|G|}\sum_{h \in G} f(h)\,\mathrm{ch}^\lambda(h)\right) \mathrm{id}_{V^\lambda}$$

Alors, en appliquant la formule générale d'inversion de Fourier :

$$f(g) = \sum_{\lambda \in \hat{G}} \left(\frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} f(h)\, ch^\lambda(h) \right) \operatorname{tr} \rho^\lambda(g^{-1})$$

$$= \sum_{\lambda \in \hat{G}} \underbrace{\left(\frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} f(h)\, ch^\lambda(h) \right)}_{\langle ch^{\lambda^*} | f \rangle} \underbrace{\overline{ch^\lambda(g)}}_{ch^{\lambda^*}(g)} .$$

$$= \sum_{\lambda \in \hat{G}} \langle ch^\lambda | f \rangle \, ch^\lambda(g) . \qquad \square .$$

$\lambda \leftrightarrow \lambda^*$

Considérons en particulier une marche aléatoire sur G dont le générateur μ est central (dans $Z(\mathbb{C}G)$). Alors,

$$\mu_n(g) = \sum_{\lambda\in\hat{G}} \frac{\dim\lambda}{|G|}\, \mathrm{tr}\left((\hat{\mu}(g))^n\, \rho^\lambda(g^{-1}) \right)$$

$$= \sum_{\lambda\in\hat{G}} \frac{(\dim\lambda)^{1-n}}{|G|} \left(\sum_{h\in G} \mu(h)\, \mathrm{ch}^\lambda(h) \right)^n \mathrm{ch}^\lambda(g^{-1}).$$

$$= \sum_{\lambda\in\hat{G}} \frac{(\dim\lambda)^{2}}{|G|} \left(\sum_{h\in G} \mu(h)\, \chi^\lambda(h) \right)^n \chi^\lambda(g^{-1})$$

$$\chi^\lambda(\cdot) = \frac{\mathrm{ch}^\lambda(\cdot)}{\dim\lambda} = \frac{\mathrm{ch}^\lambda(\cdot)}{\mathrm{ch}^\lambda(e_G)}$$

mesure de Plancherel

caractère irréductible renormalisé.

$$\boxed{\mu_n(g) = \sum_{\lambda\in\hat{G}} \mathrm{Pl}(\lambda) \left(\mathbb{E}_\mu[\chi^\lambda(h)] \right)^n \chi^\lambda(g^{-1}).}$$

<u>exemple</u> : $G = \mathfrak{S}(N)$. Quelles sont les fonctions centrales ?

Deux permutations σ_1 et σ_2 sont conjuguées dans $\mathfrak{S}(N)$ ssi elles ont la même structure de cycles :

$$\sigma_1 = (a_1, a_2, \dots, a_{r_1})(a_{r_1+1}, \dots, a_{r_1+r_2}) \dots$$

cycles de longueur $r_1, r_2, \dots, r_\ell$ avec $r_1 + r_2 + \dots + r_\ell = N$.

$$\sigma_2 = \rho\sigma_1\rho^{-1} = (\rho(a_1), \rho(a_2), \dots \rho(a_{r_1}))(\rho(a_{r_1+1}), \dots \rho(a_{r_1+r_2})) \dots$$

Les classes de conjugaison de $\mathfrak{S}(N)$ sont donc en bijection avec les partitions de l'entier N :

$$\mathcal{Y}(N) = \left\{ \lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_\ell),\ \text{les } \lambda_i \text{ entiers},\ \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_\ell = N \right\}$$

Par exemple, $\mathfrak{Y}(4) = \{(4), (3,1), (2,2), (2,1,1), (1^4)\}$

et il y a cinq classes de conjugaison dans $\mathfrak{S}(4)$:

les 4 cycles (6) ; les 3 cycles (8) ; les produits de 2 transpositions disjointes (3) ;

les transpositions (6) ; l'identité (1).

Le générateur $\mu = \frac{1}{N} \mathrm{id}_{[\![1,N]\!]} + \frac{2}{N^2} \sum_{1 \leq i < j \leq N} (i,j)$ est dans $Z(\mathbb{C}\mathfrak{S}(N))$.

<u>Problème</u> : qu'est-ce que $\widehat{\mathfrak{S}(N)}$?

comment calculer | dim λ pour $\lambda \in \widehat{\mathfrak{S}(N)}$?
| $\mathrm{ch}^\lambda(\sigma)$

$\rightsquigarrow$ réponse dans quelques minutes ...

Proposition : Soit G un groupe fini. $|\hat{G}|$ est aussi le nombre de classes de conjugaison de G.

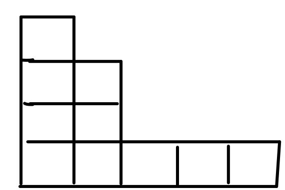
Preuve : C'est la dimension de $Z(\mathbb{C}G)$. $\square$.

Dans le cas de $\mathfrak{S}(N)$ il doit donc exister une bijection entre $\hat{\mathfrak{S}}(N) = \{\text{représentations irréductibles de } \mathfrak{S}(N)\}$

et $\mathcal{Y}(N) = \{\text{partitions de l'entier } N\}$.

On représentera les éléments de $\mathcal{Y}(N)$ par leurs diagrammes de Young :

$N = 10$, $\lambda = (5, 2, 2, 1) \longleftrightarrow$



λ_4
λ_3
λ_2
λ_1

<u>spoiler</u> : Il existe une indexation des représentations irréductibles de $\mathfrak{S}(N)$ telle que :

5				
4	X			
2	7			
1	3	6	8	9

- $\dim \lambda$ = nbre de façons de numéroter les cases de λ par les entiers de $[\![1, N]\!]$, en étant croissant suivant les lignes et les colonnes.
- $ch^{\lambda}(\sigma)$ si $\lambda \in \mathcal{Y}(N)$, σ de type cyclique $\mu \in \mathcal{Y}(N)$?

Posons $p_\mu(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{\ell(\mu)} \left(x_1^{\mu_i} + x_2^{\mu_i} + \dots + x_n^{\mu_i}\right)$

$$s_\lambda(x_1, \dots, x_n) = \frac{\det\left(x_i^{\,n-j+\lambda_j}\right)_{1 \le i,j \le n}}{\det\left(x_i^{\,n-j}\right)_{1 \le i,j \le n}}, \quad n \ge N.$$

Alors, $p_\mu(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\lambda \in \mathcal{Y}(N)} ch^\lambda(\sigma)\, s_\lambda(x_1, \dots, x_n)$.

$\rightsquigarrow$ théorie des fonctions (polynômes) symétriques.

3. L'algèbre des fonctions symétriques

On fixe un alphabet $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ contenant une infinité de variables commutant 2 à 2.

Un monôme est un produit fini de ces variables.

$x_1 x_2 x_3$, $x_2^2 x_3^5$, etc ; $\deg(x_I = x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_s^{i_s}) = i_1 + i_2 + \dots + i_s$

Un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ est une combinaison linéaire formelle (à coefficients réels) de monômes, éventuellement infinie mais bornée en degré :

- $x_1 x_2 x_3 + 4 x_2^2 x_3^5$ (de degré 7)
- $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2$ (de degré 2)

mais $\sum_{k=1}^{\infty} (x_1)^k$ n'est pas autorisée.

Le groupe symétrique infini $\mathfrak{S}(\infty)$ est l'union croissante $\bigcup_{n=1}^{+\infty} \uparrow \mathfrak{S}(n)$, avec $\sigma \in \mathfrak{S}(n)$ pouvant être considérée comme un élément de $\mathfrak{S}(n+k)$ en posant $\sigma(m > n) = m$.

Ses éléments sont les permutations σ de $\mathbb{N}^*$ qui ne modifient qu'un nombre fini d'entiers.

Si $\sigma \in \mathfrak{S}(\infty)$, σ agit linéairement sur $\mathbb{R}[X]$ par :

$$\sigma(x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_d}) = x_{\sigma(i_1)} x_{\sigma(i_2)} \cdots x_{\sigma(i_d)}.$$

Par ailleurs, $\mathbb{R}[X]$ est une algèbre pour le produit des polynômes, et $\sigma \circ (PQ) = (\sigma \circ P) \times (\sigma \circ Q) \quad \forall P, Q$.

Definition Une fonction symétrique est un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\sigma \circ P = P \quad \forall \sigma \in \mathfrak{S}(\infty)$$

Les fonctions symétriques forment une sous-algèbre graduée $\mathrm{Sym} \subset \mathbb{R}[X]$.

<u>exemple 1</u>. Pour $k \geq 1$, posons

$$p_k(X) = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i)^k$$ somme des puissances (Newton)

Les $p_k \in Sym$. Plus généralement, si $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_\ell)$ est une partition d'entier dans $\mathcal{Y} = \bigsqcup_{N=0}^{\infty} \mathcal{Y}(N)$, alors

$$p_\lambda(X) = \prod_{i=1}^{\ell} p_{\lambda_i}(X) \in Sym \; ; \; \deg p_\lambda = |\lambda| = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i .$$

<u>exemple 2</u> Pour $k \geq 1$, posons

$$h_k(X) = \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}$$ fonction homogène.

Les $h_k \in Sym$, et on peut former leurs produits

$$h_\lambda(X) = \prod_{i=1}^{\ell} h_{\lambda_i}(X) \in Sym \; ; \; \deg h_\lambda = |\lambda| .$$

<u>exemple 3</u> Pour $k \geq 1$, posons

$$e_k(X) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}$$ fonction élémentaire.

$$e_\lambda(X) = \prod_{i=1}^{\ell} e_{\lambda_i}(X) \in Sym \, ; \quad \deg e_\lambda = |\lambda| .$$

<u>Théorème</u> Les $(p_\lambda)_{\lambda \in \mathcal{Y}}$, $(h_\lambda)_{\lambda \in \mathcal{Y}}$, $(e_\lambda)_{\lambda \in \mathcal{Y}}$ engendrent linéairement la même algèbre (on verra plus loin que c'est Sym).

<u>exemple</u> : Montrons que

$$h_3(X) = \frac{p_3(X)}{3} + \frac{p_{(2,1)}(X)}{2} + \frac{p_{(1,1,1)}(X)}{6} .$$

On a $h_3(X) = \sum_{i \leq j \leq k} x_i x_j x_k$.

$$\frac{p_3(x)}{3} = \frac{1}{3} \sum_{i=j=k} x_i x_j x_k$$

$$\frac{p_{(2,1)}(x)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} x_i^2 x_j = \frac{1}{2} \sum_{i=j=k} x_i x_j x_k + \frac{1}{2} \sum_{i<j=k} x_i x_j x_k + \frac{1}{2} \sum_{i=j<k} x_i x_j x_k$$

$$\frac{p_{1^3}(x)}{6} = \frac{1}{6} \sum_{i,j,k} x_i x_j x_k = \frac{1}{6} \sum_{i=j=k} x_i x_j x_k + \frac{1}{2} \sum_{i<j=k} x_i x_j x_k + \frac{1}{2} \sum_{i=j<k} x_i x_j x_k$$

$$+ \sum_{i<j<k} x_i x_j x_k .$$

On conclut car :

$(i \leq j \leq k) \iff (i=j=k)$ ou $(i<j=k)$ ou $(i=j<k)$ ou $(i<j<k)$.

<u>Preuve générale</u> : Introduisons

$$P(X, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k(X) z^k}{k}$$

$$E(X, z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} e_k(X) z^k$$

$$H(X, z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} h_k(X) z^k.$$

On a $E(X, z) = \prod_{i=1}^{\infty} (1 + z x_i)$

$$H(X, z) = \prod_{i=1}^{\infty} (1 + z x_i + z^2 x_i^2 + \cdots + z^r x_i^r + \cdots)$$

$$= \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - z x_i}.$$

Donc $E(X,z) = \dfrac{1}{H(X,-z)}$ $\Longrightarrow$ on peut exprimer les e en fonction des h et réciproquement.

Puis, $\log H(X,z)$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} -\log(1-zx_i) = \sum_{i,k=1}^{\infty} \frac{(zx_i)^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k(X)z^k}{k} = P(X,z)$$

et $H(X,z) = \exp(P(X,z))$

$\Longrightarrow$ on peut exprimer les p en fonction des h et réciproquement. $\square$

<u>Théorème</u> Les 3 familles sont des bases linéaires graduées de Sym.

$$\mathrm{Sym} = \bigoplus_{d \geq 0} \underbrace{\mathrm{Sym}_{(d)}}_{\text{fonctions symétriques homogènes de degré } d}$$

et $\mathrm{Sym}_{(d)} = \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{Y}(d)} \mathbb{R} p_\lambda = \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{Y}(d)} \mathbb{R} e_\lambda = \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{Y}(d)} \mathbb{R} h_\lambda$.

<u>Preuve</u>. D'après ce qui précède, il suffit de le montrer pour les p.

On exhibe une autre base de $\mathrm{Sym}_{(d)}$: les fonctions monomiales.

Si $\lambda = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_\ell \in \mathcal{Y}(d)$, on dit qu'un monôme

$x_I = x_{i_1}^{m_1} x_{i_2}^{m_2} \dots x_{i_\ell}^{m_\ell}$ est de type λ si $i_1 < i_2 < \dots < i_\ell$

et si la réorganisation décroissante des multiplicités m_i donne la partition λ.

Si $P \in Sym_{(d)}$ et si x_I de type λ intervient dans P avec coefficient c, alors tous les autres monômes x_J de type λ ont aussi coefficient c.

$\Longrightarrow$ Une base linéaire de $Sym_{(d)}$ est $(m_\lambda)_{\lambda \in \mathcal{Y}(d)}$,

où $$m_\lambda(X) = \sum_{I \mid x_I \text{ de type } \lambda} x_I .$$

Par exemple, $Sym_{(2)} = \mathrm{Vect}\left(m_2(X), m_{(1,1)}(X)\right)$

avec $m_2(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2$; $m_{(1,1)}(X) = \sum_{1 \leq i < j} x_i x_j$.

<u>Fait</u> : Il y a une relation de changement de base triangulaire

entre $(m_\lambda)_{\lambda \in \mathcal{Y}(d)}$ et $(p_\lambda)_{\lambda \in \mathcal{Y}(d)}$.

En effet, calculons par exemple $p_{(5,3,2)}$:

$$p_{(5,3,2)}(X) = \sum_{i,j,k} x_i^5 \, x_j^3 \, x_k^2$$

$$= \underset{i \neq j \neq k}{m_{(5,3,2)}(X)} + \underset{i = j \neq k}{m_{(8,2)}(X)} + \underset{i = k \neq j}{m_{(7,3)}(X)}$$

$$+ 2 \underset{i \neq j = k}{m_{(5,5)}(X)} + \underset{i = j = k}{m_{10}(X)}$$

Tous les m_μ qui apparaissent dans p_λ vérifient :
μ est obtenue à partir de λ en réunissant des parts

$\Longrightarrow$ relation d'ordre. $\square$