5. Le phénomène de coupure

On considère les marches aléatoires sur $\mathfrak{S}(N)$ de générateurs :

$$\mu = \mu_{RT} = \frac{1}{N} \mathrm{id} + \frac{2}{N^2} \sum_{1 \leq i < j \leq N} (i,j)$$

ou

$$\mu = \mu_{TWRT} = \frac{1}{N} \left(\mathrm{id} + \sum_{i=2}^{N} (1,i) \right).$$

et on veut établir un phénomène de coupure pour $d_{VT}(\mu^n, \mathrm{Haar})$.

<u>préliminaire</u> : comment "deviner" le temps de mélange n_{mix} ?

<u>idée</u> : pour le modèle RT, on échange à chaque étape deux entiers uniformes $i_n, j_n \in [\![1, N]\!]$.

Pour atteindre l'équilibre, il faut au moins avoir touché tous les entiers de $[\![1, N]\!]$.

$\rightsquigarrow$ problème du collectionneur

Soit $U_1, U_2, \dots U_n \sim \mathrm{Unif}(\llbracket 1, N \rrbracket)$

$T = \inf \{ n \in \mathbb{N} \mid \llbracket 1, N \rrbracket = \{ U_1, U_2, \dots, U_n \} \}$.

T est concentrée autour de $N \log N$.

En effet, si $X_n = \mathrm{card} \{ U_1, U_2, \dots, U_n \}$, alors :

- X_n croît de 0 à N.
- pour passer de k à $k+1$, il faut attendre un temps géométrique de paramètre $\frac{N-k}{N}$.

$$\mathbb{P}[X_{n+1} = k+1 \mid X_n = k] = \mathbb{P}[U_{n+1} \notin \text{un ensemble de taille } k]$$
$$= \frac{N-k}{N}.$$

Donc, $T \underset{(\text{loi})}{=} \sum_{k=0}^{N-1} G\left(\frac{N-k}{N}\right)$ avec des géométriques indépendantes.

$$\mathbb{E}[T] = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{N}{N-k} = N \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i} \sim N \log N.$$

$$\operatorname{var}(T) = \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{N}{N-k}\right)\left(\frac{N}{N-k} - 1\right) \leq N^2 \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i^2} = O(N^2)$$

+ Chebyshev.

$$\Longrightarrow \quad n_{mix,\, TWRT} \text{ “}=\text{” } N \log N$$

$$n_{mix,\, RT} \text{ “}=\text{” } \frac{N \log N}{2}$$ (on modifie 2 cartes à chaque étape).

⚠ pas du tout rigoureux ; il existe des modèles markoviens où l'équilibre global n'est pas atteint après modification de tous les sites.

1. Borne supérieure après le temps de coupure

$$\mu = \mu_{RT} \; ; \; 4\left(d_{TV}(\mu^n, \mathrm{Haar})\right)^2 \le \sum_{\lambda \neq (N)} (\dim \lambda)^2 \left(r(\lambda)\right)^{2n}$$

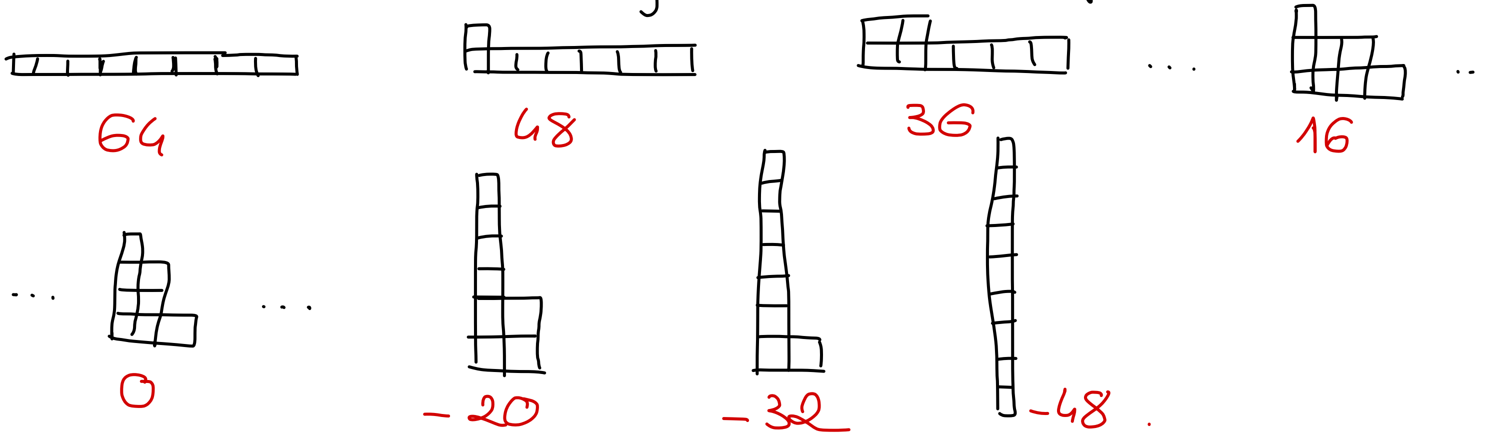
avec

$$\begin{aligned}
r(\lambda) &= \mathbb{E}_\mu\left[\chi^\lambda_{(\cdot)}\right] \\
&= \frac{1}{N}\chi^\lambda(id) + \frac{2}{N^2}\binom{N}{2}\chi^\lambda((1,2)) \\
&= \frac{1}{N} + \frac{2}{N^2}\sum_{\square \in \lambda} c(\square, \lambda)
\end{aligned}$$

$$\rightarrow \sum_{i=1}^{\ell(\lambda)} \sum_{j=1}^{\lambda_i} (j-i)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{N^2}\left(\sum_{i=1}^{\ell(\lambda)} \lambda_i + \lambda_i(\lambda_i + 1) - 2\lambda_i i\right) \\
&= \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{\ell(\lambda)} \lambda_i(\lambda_i + 2 - 2i).
\end{aligned}$$

Comment varie $r(\lambda)$? regardons $N^2 r(\lambda)$ pour $N = 8$:



<u>observations</u> :

1) Les partitions avec $r(\lambda)$ grand / >0 sont celles avec peu de parts.

2) Si λ' = conjuguée de λ, alors on a souvent :

$$r(\lambda) \geq 0 \geq r(\lambda') \geq -r(\lambda).$$

$\boxed{1}$ Se ramener à une somme sur les $\lambda \mid r(\lambda) \geq 0$.

Soit $\lambda \mid r(\lambda') < 0$.

$$r(\lambda) = \frac{1}{N} + \frac{2}{N^2} c(\lambda)$$

On a alors $r(\lambda') = \frac{1}{N} + \frac{2}{N^2} c(\lambda') = \frac{1}{N} - \frac{2}{N^2} c(\lambda)$

$$> -\frac{1}{N} - \frac{2}{N^2} c(\lambda) = -r(\lambda)$$

donc $r(\lambda) > 0$.

Par ailleurs, $\dim \lambda = \dim \lambda'$.

Considérons $E_N = \{ (N), (N-1, 1), (2 1^{N-2}), 1^N \}$

On a :

$$4 d_{TV}^2 \leq \sum_{\lambda \in E_N^*} (\dim \lambda)^2 r(\lambda)^{2n} + \sum_{\substack{\lambda \in \mathcal{Y}(N) \setminus E_N \\ r(\lambda) > 0}} * + \sum_{\substack{\lambda \in \mathcal{Y}(N) \setminus E_N \\ r(\lambda) < 0}} *$$

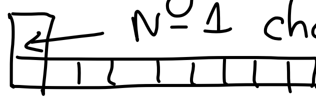
$$\leq \sum_{\lambda \in \left\{ \begin{smallmatrix} (N-1,\,1) \\ 2\,1^{N-2} \\ 1^N \end{smallmatrix} \right\}} * \quad + \quad 2 \sum_{\substack{\lambda \in \mathcal{Y}(N) \setminus E_N \\ r(\lambda) > 0}} * \ .$$

<u>trois représentations connues</u> :

$\longrightarrow$ $(N-1,\,1)$: sa dimension est $\dfrac{N!}{N \cdot (N-2)! \cdot 1} = N-1$.

(formule des équerres)

dans un tableau standard de forme $(N-1,\,1)$:



$N-1$ choix dans $[\![2, N]\!]$.

Regardons la représentation de $\mathfrak{S}(N)$ sur $\mathbb{C}^N = V$

$$\sigma \cdot (x_1, x_2, \dots, x_N) = (x_{\sigma^{-1}(1)} \dots x_{\sigma^{-1}(N)}) .$$

Son caractère est $ch^V(\sigma)$ = nombre de points fixes de σ.

$$\Psi(V) = s_{(N-1)} s_{(1)}.$$

En effet,

$$\Psi(V) = \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(N)} m_1(t(\sigma)) \, p_{t(\sigma)}(X)$$

$$= \sum_{\mu \in \mathcal{Y}(N)} m_1(\mu) \frac{p_\mu(X)}{z_\mu} = \sum_{\nu \in \mathcal{Y}(N-1)} (m_1(\nu)+1) \frac{p_{\nu \sqcup 1}(X)}{z_{\nu \sqcup 1}}$$

$$= \sum_{\nu \in \mathcal{Y}(N-1)} \frac{p_\nu(X) p_1(X)}{z_\nu} = h_{N-1}(X) \, p_1(X)$$

$$= s_{(N-1)}(X) \, s_{(1)}(X).$$

(rappel : $h_N(X) = \sum_{\nu \in \mathcal{Y}(N)} \frac{p_\nu(X)}{z_\nu}$) .

Par Jacobi-Trudy ou par la règle de Pieri :

$$s_{(N-1)}\, s_1 = s_{(N)} + s_{(N-1,1)} .$$

$$\Longleftrightarrow \quad \mathbb{C}^N = V^{(N)} \oplus V^{(N-1,1)}$$

représentation triviale

représentation de dimension $N-1$ sur $W = \{(x_1 \dots x_N) \mid \sum_{i=1}^N x_i = 0\}$, de caractère

$$\mathrm{ch}^{(N-1,1)}(\sigma) = m_1(t(\sigma)) - 1 .$$

$$(\dim \lambda)^2 (r(\lambda))^{2n} = (N-1)^2 \left(1 - \frac{2}{N}\right)^{2n} .$$

$\longrightarrow 2\,1^{N-2}$. $\quad \dim = N-1$

$$r(\lambda) = \left(\frac{4}{N} - 1\right).$$

$\longrightarrow 1^N$: $\quad \dim = 1$. Quelle représentation autre que la représentation triviale est repr. de $\mathfrak{S}(N)$ de dimension 1 ?

C'est la représentation signature : $\sigma . v = \varepsilon(\sigma) v$.

$$r(\lambda) = \left(\frac{2}{N} - 1\right).$$

Alors, $$\sum_{\lambda \in E_N^*} * = (N-1)^2 \left(1 - \frac{2}{N}\right)^{2n} + (N-1)^2 \left(1 - \frac{4}{N}\right)^{2n} + \left(1 - \frac{2}{N}\right)^{2n}$$

$\lambda = (N-1, 1) \quad \geq \quad \lambda = (2\,1^{N-2})$ ou 1^N.

Conclusion : $4\, d_{TV}^2 \leq 2 \cdot \sum_{\substack{\lambda \in \mathcal{Y}(N)^* \\ r(\lambda) > 0}} (\dim \lambda)^2 \, (r(\lambda))^{2n}$.

$\boxed{2}$ Réunissons maintenant les partitions λ en fonction de leur plus grande part $\lambda_1 = N-k$, $k \geq 1$.

Lemme 1 : $\dim \lambda \leq \binom{N}{k} \dim(\lambda_2, \lambda_3, \dots)$.

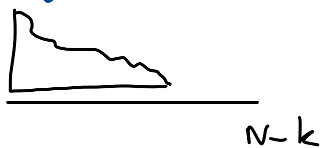
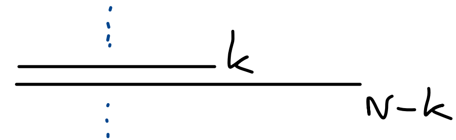
En effet, pour construire un tableau standard de forme λ, on peut d'abord choisir les $N-k$ entrées de la première ligne $\longrightarrow \binom{N}{N-k}$ possibilités

puis remplir de façon standard les autres lignes

$\longrightarrow \dim(\lambda_2, \lambda_3, \dots)$ choix.

__Lemme 2__ Si $1 \le k \le \frac{N}{2}$, $r(\lambda) \le 1 - \frac{2k(N+1-k)}{N^2}$

Si $k > \frac{N}{2}$, $r(\lambda) \le 1 - \frac{k}{N}$.

$r(\lambda =$  $) \le r($  $)$ en translatant des cases pour augmenter le contenu.

$$r(\lambda) = \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{\ell(\lambda)} \lambda_i(\lambda_i - 2i + 2) = \frac{(N-k)^2}{N^2} + \frac{N-k}{N^2}\sum_{i=2}^{\ell(\lambda)}\lambda_i$$

$$= \frac{N-k}{N}.$$

$\longrightarrow$ on obtient donc la borne supérieure :

$$2\, d_{TV}^2 \le \sum_{k=1}^{N/2} \binom{N}{k}^2 \sum_{v\in \mathcal{Y}(k)} (\dim v)^2 \left(1-\frac{2k(N+1-k)}{N^2}\right)^{2n} \qquad S_1$$

$$+ \sum_{k=\frac{N}{2}}^{N} \binom{N}{k}^2 \sum_{v \in \mathcal{Y}(k)} (\dim v)^2 \left(1-\frac{k}{N}\right)^{2n}. \qquad S_2.$$

Traitons la première somme avec $n = \dfrac{N(\log N + c)}{2}$:

$$\sum_{v\in\mathcal{Y}(k)} (\dim v)^2 = k!$$

$$\binom{N}{k}^2 \sum_{v\in\mathcal{Y}(k)} (\dim v)^2 = \frac{\left(N^{\downarrow k}\right)^2}{k!} \le \frac{N^{2k}}{k!}$$

$$\left(1-\frac{2k(N+1-k)}{N^2}\right)^{2n} \le \exp\left(-2k\,(\log N + c)\,\frac{N+1-k}{N}\right)$$

$$\text{terme}_k \leq \frac{1}{k!}\left(\exp\left(\log N - (\log N + c)\,\frac{N+1-k}{N}\right)\right)^{2k}$$

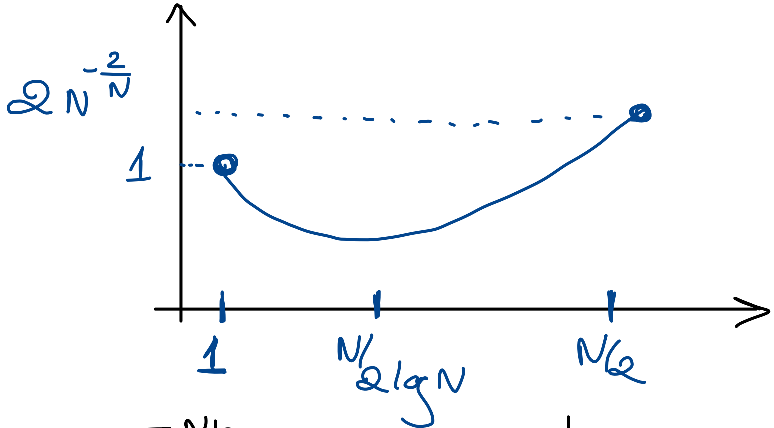
$$\leq \frac{1}{k!}\left(\exp\left(\log N - \log N\left(\frac{N+1-k}{N}\right) - \frac{c}{2}\right)\right)^{2k}$$

$$\leq \frac{1}{k!}\exp(-kc)\; N^{\frac{2k(k-1)}{N}}.$$

$$\leq \left(e^{1-c}\, N^{\frac{2(k-1)}{N}}\,\frac{1}{k}\right)^{k} \quad \text{par Stirling : } k! \geq \left(\frac{k}{e}\right)^{k}.$$

$$\Longrightarrow S_1 \leq \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} \left(e^{1-c}\, N^{\frac{2(k-1)}{N}}\,\frac{1}{k}\right)^{k}.$$

Mais $x \longrightarrow N^{\frac{2(x-1)}{N}}\,\dfrac{1}{x}$ sur l'intervalle $\left[1, \frac{N}{2}\right]$ a pour graphe:



$$\Longrightarrow \frac{N^{\frac{2(k-1)}{N}}}{k} \leq 2 .$$

$$S_1 \leq \sum_{k=1}^{N/2} \left(O(e^{-c}) \right)^k = O(e^{-c})$$

et de même pour S_2 . . .

$$\Longrightarrow d_{TV}\left(\mu_{N\frac{(\log N+c)}{2}}, \text{Haar} \right) = O(e^{-c/2}) .$$

2. Asymptotique poissonnienne des permutations uniformes

Les termes importants dans la borne supérieure sont ceux avec λ_1 grand

$\leadsto$ en particulier, $\lambda = (N-1, 1)$.

Peut-on prendre comme fonction discriminante $ch^{(N-1,1)}(\sigma)$?

$= \text{nbre de points fixes}(\sigma) - 1$.

aparté : sous la mesure uniforme sur $\mathfrak{S}(N)$, que dire de la distribution de

$m_1(\sigma)$ nbre de points fixes ?

$\sum_{k\geq 1} m_k(\sigma) = n c(\sigma)$ nbre total de cycles ?

* Un dérangement de taille N est une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}(N)$ sans point fixe.

D_N = nbre de dérangements de taille N.

Si $I \subset [\![1, N]\!]$, considérons

$$\mathfrak{S}_{N,I} = \{ \sigma \in \mathfrak{S}_N : \forall i \in I, \sigma(i) = i \}.$$

$$\operatorname{card} \mathfrak{S}_{N,I} = (N - |I|)!$$

$$D_N = |\mathfrak{S}_N| - \operatorname{card}\left(\bigcup_{i=1}^{N} \mathfrak{S}_{N,\{i\}} \right)$$

$$= N! - \sum_{\substack{I \subset [\![1, N]\!] \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|-1} \operatorname{card} \mathfrak{S}_{N,I}$$

formule du crible

$$= \sum_{I \subset [\![1, N]\!]} (-1)^{|I|} (N - |I|)!$$

$$= \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \frac{N!}{(N-k)!\,k!} (N-k)! = N! \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

$$\frac{D_N}{N!} = \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{k!} \xrightarrow[N\to+\infty]{} e^{-1}.$$

$$\mathbb{P}[m_1(\sigma) = k] = \frac{1}{N!} \sum_{\substack{A \subset [\![1,N]\!] \\ |A| = k}} D_{N-k} = \frac{D_{N-k}}{k!\,(N-k)!}$$

$$\xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{e^{-1}}{k!} \qquad \text{Donc } m_1(\sigma_N) \xrightarrow[\text{loi}]{} \text{Poisson}(1)$$

* Pour le nombre total de cycles, utilisons le lemme suivant :

Lemme : $\mathfrak{S}(N-1) \times [\![1, N]\!] \longrightarrow \mathfrak{S}(N)$
$\sigma, \quad k \longmapsto \sigma \circ (k, N)$ est une bijection
(avec $(N, N) = id$).

En effet, l'application réciproque est
$$\rho \longmapsto \left(\rho \circ (\rho^{-1}(N), N), \rho^{-1}(N)\right).$$

Notons de plus que
$$nc(\sigma \circ (k, N)) = \begin{cases} nc(\sigma) & \text{si } k \leq N-1 \text{ (on agrandit un cycle)} \\ nc(\sigma) + 1 & \text{si } k = N. \text{ (on ajoute un cycle point fixe)} \end{cases}$$

Corollaire : dans $\mathbb{C}[z]\mathfrak{S}(N)$:
$$\prod_{i=1}^{N} (z + J_i) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(N)} z^{nc(\sigma)} \sigma.$$

Tirer $\sigma_N = (k_1, 1)(k_2, 2) \dots (k_N, N)$ uniformément au hasard dans $\mathfrak{S}(N)$ est équivalent à tirer au hasard indépendamment $k_1 \in [\![1, 1]\!]$, $k_2 \in [\![1, 2]\!]$, ... $k_N \in [\![1, N]\!]$.

$$nc(\sigma_N) = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{1}_{(k_i = i)} \underset{(\text{loi})}{=} \sum_{i=1}^{N} \text{Bernoulli}\left(\frac{1}{i}\right).$$

$$\sim \text{Poisson}\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i} \simeq \log N\right)$$

[très proche en variation totale :

$$d_{TV}(\sigma_N, \mathcal{P}(\log N)) = O\left(\frac{1}{\log N}\right).$$

On peut aussi montrer :

$$(m_1(\sigma_N), m_2(\sigma_N), \dots, m_k(\sigma_N)) \xrightarrow[\text{lois jointes}]{} \left(\mathcal{P}(1), \mathcal{P}\left(\frac{1}{2}\right), \dots \mathcal{P}\left(\frac{1}{k}\right)\right).$$

3. Borne inférieure avant le temps de coupure

On veut utiliser l'inégalité $d_{TV}(\mu_n, \text{Haar}) \geq 1 - \frac{8c}{(b-a)^2}$ avec

$$a = \mathbb{E}_{\mu_n}\left[ch^{(N-1,1)} \right]$$

$$b = \mathbb{E}_{\text{Haar}}\left[ch^{(N-1,1)} \right]$$

$$c = \text{borne sur } \operatorname{Var}_{\mu_n}\left(ch^{(N-1,1)} \right),\ \operatorname{Var}_{\text{Haar}}\left(ch^{(N-1,1)} \right).$$

$$n = \frac{N(\log N - c)}{2}$$

On connaît déjà :

$$\mathbb{E}_{\mu_n}\left[ch^{(N-1,1)} \right] = (N-1)\left(1 - \frac{2}{N}\right)^n = a$$

$$\mathbb{E}_{\text{Haar}}\left[ch^{(N-1,1)} \right] = 0 = b.$$

$$\left(1-\frac{2}{N}\right)^n \sim \exp\left(-(\log N - c)\right) = \frac{e^c}{N}$$

$$(a-b)^2 \geq \text{cste} \cdot e^c.$$

Variance ? Il faut calculer $\mathbb{E}_{\mu_n/\text{Haar}}\left[\left(ch^{(N-1,1)}\right)^2\right]$.

<u>idée</u> : $ch^{(N-1,1)}$ est le caractère d'une représentation W.

Son carré est le caractère de $W \otimes_{\mathbb{C}} W$ avec l'action

$$\sigma \cdot (w_1 \otimes w_2) = (\sigma \cdot w_1) \otimes (\sigma \cdot w_2)$$

Quelle est la décomposition en irréductibles de cette représentation ?

<u>Lemme</u> :

$$\left(ch^{(N-1,1)}\right)^2 = ch^{(N-2,2)} + ch^{(N-2,1,1)} + ch^{(N-1,1)} + ch^{(N)}.$$

(pour $N \geq 4$).

<u>Preuve</u> : On montre de façon équivalente :

$$\left(ch^{(N-1,1)}\right)\left(ch^{(N-1,1)}+1\right) = ch^{(N-2,2)} + ch^{(N-2,1,1)} + 2ch^{(N-1,1)} + ch^{(N)}.$$

$$\Updownarrow \quad \text{Frobenius - Schur}$$

$$\sum_{\mu \in \mathcal{Y}(N)} (m_1(\mu))(m_1(\mu)-1)\frac{p_\mu(X)}{z_\mu} = s_{(N-2,2)}(X) + s_{(N-2,1,1)}(X) + 2s_{(N-1,1)}(X) + s_{(N)}(X)$$

$$\Big\downarrow \text{ Jacobi-Trudy } (+\text{ énorme simplification})$$

$$\sum_{\mu \in \mathcal{Y}(N)} (m_1(\mu))(m_1(\mu)-1)\frac{p_\mu(X)}{z_\mu} = \sum_{\nu \in \mathcal{Y}(N-2)} \frac{p_{\nu \sqcup 1^2}(X)}{z_\nu} \longleftrightarrow s_{(N-2)}(X)\,(s_1(X))^2.$$

OK car $s_{(N-2)}(X) = \sum_{\nu \in \mathcal{Y}(N-2)} \frac{p_\nu(X)}{z_\nu}$.

On en déduit des formules explicites pour les variances :

$$\mathrm{Var}_{\mathrm{Haar}}\left(\mathrm{ch}^{(N-1,1)}\right) = 1 .$$

$$\mathrm{Var}_{\mu^n}\left(\mathrm{ch}^{(N-1,1)}\right) = 1 + (N-1)\left(1-\frac{2}{N}\right)^n + \frac{N^2-3N+2}{2}\left(1-\frac{4}{N}\right)^n - \frac{N^2-N+2}{2}\left(1-\frac{2}{N}\right)^{2n} .$$

$$c \leq 1 + (N-1)\left(1-\frac{2}{N}\right)^n = 1+a .$$

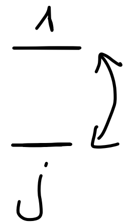
$$\Longrightarrow d_{VT} \geq 1 - \frac{8(1+a)}{a^2} = 1 - O\left(e^{-c}\right) .$$

$a \approx e^c$

$\square$

Compléments :

1) et les autres marches aléatoires ?

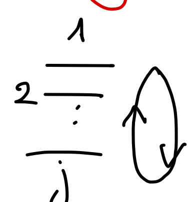
- TWRT :  même technique, car μ est conjuguée à $\frac{1}{N}\left(id + J_N\right)$

  ↳ TF connue !

$$\hat{\mu}(\lambda).e_T = \frac{1}{N}\left(1 + c(N,T)\right) e_T$$

$$\Longrightarrow tr\left(\left(\hat{\mu}(\lambda)^*\right)^n \left(\hat{\mu}(\lambda)\right)^n\right) = \sum_{\mu : \mu \nearrow \lambda} \dim \mu \left(\frac{1 + c(\lambda \setminus \mu)}{N}\right)^{2n}.$$

même stratégie $\longrightarrow$ $n_{mix} = N \log N$.

- top-to-random cycle :  $\longrightarrow$ technique du temps aléatoire d'uniformité.

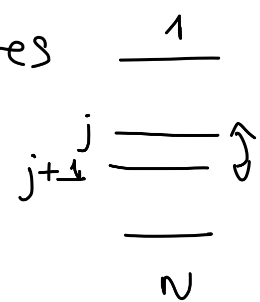
Si T est un temps d'arrêt tel que $\begin{cases} \sigma_T \sim \text{Uniforme}(\mathfrak{S}(N)), \\ \sigma_T \text{ est indépendant de } T \end{cases}$

alors $d_{TV}(\mu_n, \text{Haar}) \leq \mathbb{P}[T > n]$

ici on peut trouver un temps d'uniformité explicite, d'espérance $N \log N$.

$\longrightarrow n_{mix} = N \log N$.

- transpositions élémentaires aléatoires



assez difficile...

Lacoin, 2015 : $\longrightarrow n_{mix} = \dfrac{N^3 \log N}{2\pi^2}$.

- mélange casino : voir DM !

Bayer - Diaconis, 1992 : $\longrightarrow n_{mix} = \dfrac{3\log N}{2\log 2}$.

2) trouver $\chi^\lambda(21^{N-2})$ à partir de la formule de Frobenius-Schur

C'est possible : voir les exercices du poly.

$$ch^\lambda(21^{N-2}) = \text{coeff de } s_\lambda(x) \text{ dans } p_2(p_1)^{N-2}.$$