Quelques propriétés des graphes géométriques poissonniens

L'objectif de ce devoir est d'étudier certaines propriétés des modèles de *graphes géométriques poissonniens*. Dans tout ce qui suit, on fixe un entier $d \geq 2$ et un paramètre réel $\imath > 0$. La mesure de Lebesgue est notée dx, et l'ensemble des mesures atomiques sur $\mathbb{R}^d$ est noté $\mathscr{M}^{\mathrm{atom}}(\mathbb{R}^d)$. Si μ et ν sont deux mesures atomiques, on notera $\mu \leq \nu$ si tous les atomes de μ sont des atomes de ν (autrement dit, $\nu - \mu$ est encore une mesure atomique positive). Finalement, $\mathcal{P}(\imath)$ désigne une mesure aléatoire de Poisson sur $\mathbb{R}^d$ d'intensité $\imath\, dx$.

Partie I. Théorie de Palm. Si $n \geq 1$, on note $\mathscr{M}^{\mathrm{atom}}_{(n)}(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des *mesures atomiques sur $\mathbb{R}^d$ avec n points marqués* : c'est l'ensemble des paires de mesures atomiques $\pi = (\mu, \nu)$ avec $\mu \leq \nu$, et $\mu = \sum_{i=1}^n \delta_{x_i}$, les x_i étant des points arbitraires dans $\mathbb{R}^d$. On équipe $\mathscr{M}^{\mathrm{atom}}_{(n)}(\mathbb{R}^d)$ de la plus petite tribu qui rend mesurables les applications $\pi \mapsto \mu(A)$ et $\pi \mapsto \nu(A)$, A partie borélienne de $\mathbb{R}^d$.

1. Montrer que la projection
$$\begin{aligned} \mathscr{M}^{\mathrm{atom}}_{(n)}(\mathbb{R}^d) &\to \mathscr{M}^{\mathrm{atom}}(\mathbb{R}^d) \\ (\mu, \nu) &\mapsto \nu \end{aligned}$$
est une application mesurable. Si $n = 1$, on note $\pi = (\delta_x, \nu) = (x, \nu)$ les éléments de $\mathscr{M}^{\mathrm{atom}}_{(1)}(\mathbb{R}^d)$. Établir la mesurabilité de l'application
$$\begin{aligned} \mathscr{M}^{\mathrm{atom}}_{(1)}(\mathbb{R}^d) &\to R^d \\ (x, \nu) &\mapsto x. \end{aligned}$$

2. On fixe une partie mesurable bornée $A \subset \mathbb{R}^d$ avec $\mathrm{vol}(A) = \int_{\mathbb{R}^d} 1_A(x)\, dx \neq 0$, et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables i.i.d. de loi $\frac{1_A(x)\,dx}{\mathrm{vol}(A)}$. Expliquer comment construire à partir de cette suite une mesure aléatoire de Poisson M d'intensité $\imath\, 1_A(x)\, dx$. Soit M' une autre mesure aléatoire de Poisson indépendante de M et d'intensité $\imath\, 1_{\mathbb{R}^d\setminus A}(x)\, dx$. Quelle est la loi de $M + M'$?

3. On fixe une mesure aléatoire de Poisson $P = \mathcal{P}(\imath)$, et on note $P_{|\mathbb{R}^d\setminus A}$ la mesure aléatoire P restreinte au complémentaire de A, et $N = P(A)$. On considère une fonction $h : \mathscr{M}^{\mathrm{atom}}_{(1)}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ mesurable bornée. Démontrer l'identité suivante :
$$\mathbb{E}\left[\sum_{x\in A\,\cap\,\mathrm{support}(P)} h(x, P) \,\middle|\, (N, P_{|\mathbb{R}^d\setminus A})\right] = \frac{N}{(\mathrm{vol}(A))^N} \int_{A^N} h\left(x_1, \sum_{i=1}^N \delta_{x_i} + P_{|\mathbb{R}^d\setminus A}\right)\, dx_1 \cdots dx_N.$$

4. On suppose que h est invariante par translation : $h(x, \nu) = h(0, \nu(\cdot + x))$. Montrer que :
$$\mathbb{E}\left[\sum_{x\in A\,\cap\,\mathrm{support}(\mathcal{P}(\imath))} h(x, \mathcal{P}(\imath))\right] = \imath\, \mathrm{vol}(A)\, \mathbb{E}[h(0, \delta_0 + \mathcal{P}(\imath))].$$

5. Soit $n \geq 1$, et $\mathcal{B}(n, A) = \sum_{i=1}^{n} \delta_{X_i}$ la *mesure aléatoire binomiale* à valeurs dans A, les X_i étant i.i.d. uniformes dans A. On considère une fonction $k : \mathscr{M}^{\mathrm{atom}}_{(n)}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ mesurable bornée, et une mesure aléatoire de Poisson $\mathcal{P}(\imath)$ indépendante de la mesure aléatoire binomiale. Adapter les arguments des questions précédentes pour montrer que :

$$\mathbb{E}\left[\sum_{\substack{X \subset A \cap \mathrm{support}(\mathcal{P}(\imath)) \\ \mathrm{card}\, X = n}} k\left(\sum_{x \in X} \delta_x, \mathcal{P}(\imath)\right)\right] = \frac{(\imath\, \mathrm{vol}(A))^n}{n!}\, \mathbb{E}[k(\mathcal{B}(n, A), \mathcal{B}(n, A) + \mathcal{P}(\imath))].$$

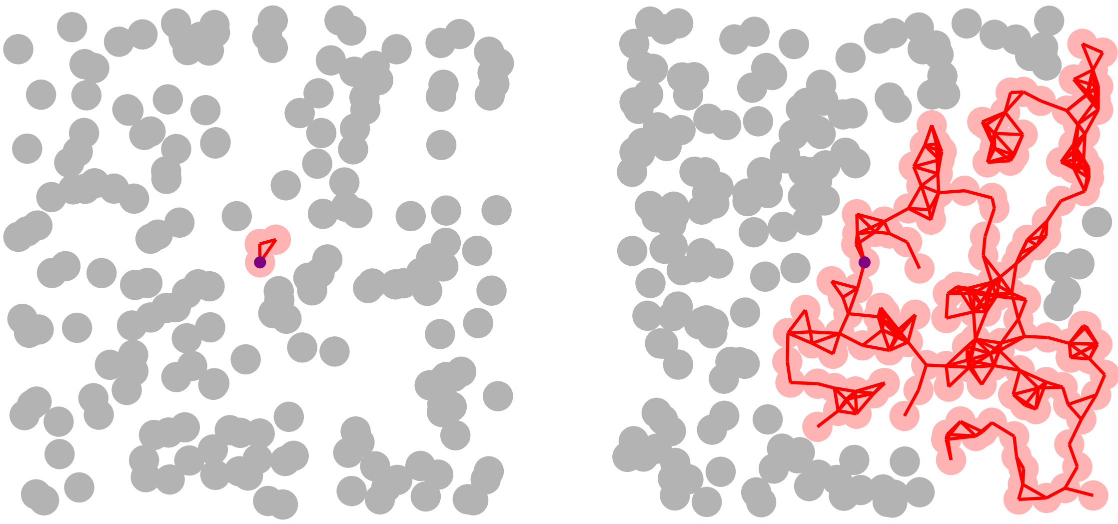
Partie II. Loi de la taille d'un cluster. Si $\mu \in \mathscr{M}^{\mathrm{atom}}(\mathbb{R}^d)$, le *graphe géométrique* $\Gamma_{\mathrm{geom}}(\mu)$ est le graphe dont les sommets sont les atomes de μ, et dont les arêtes sont les paires (x, y) avec $\|x - y\| \leq 1$, la norme $\|\cdot\|$ étant la norme euclidienne standard de $\mathbb{R}^d$. Si $\pi = (x, \mu)$ est une mesure marquée dans $\mathscr{M}^{\mathrm{atom}}_{(1)}(\mathbb{R}^d)$, on note également $\Gamma_{\mathrm{geom}}(\pi) = \Gamma_{\mathrm{geom}}(\mu)$, qu'on considère comme graphe enraciné en le sommet x. Soit $\mathcal{P}^*(\imath) = (0, \delta_0 + \mathcal{P}(\imath))$ la mesure aléatoire de Poisson marquée au point 0 ; c'est un élément aléatoire de $\mathscr{M}^{\mathrm{atom}}_{(1)}(\mathbb{R}^d)$. On note

$$\Gamma_{\mathrm{geom}}(\imath) = \Gamma_{\mathrm{geom}}(\mathcal{P}(\imath)) \qquad ; \qquad \Gamma^*_{\mathrm{geom}}(\imath) = \Gamma_{\mathrm{geom}}(\mathcal{P}^*(\imath))$$

et

$$W^* = \{x \text{ atome de } \mathcal{P}^*(\imath) \,|\, x \text{ est dans la composante connexe de } 0 \text{ dans } \Gamma^*_{\mathrm{geom}}(\imath)\}.$$

Autrement dit, si $x \in W^*$, alors il existe une suite $0 = x_0, x_1, \ldots, x_n = x$ d'atomes de $\mathcal{P}^*(\imath)$ avec $\|x_j - x_{j+1}\| \leq 1$ pour tout $j \in [\![0, n-1]\!]$. On a représenté ci-dessous deux simulations de $\Gamma^*_{\mathrm{geom}}(\imath)$ aved $d = 2$ et $\imath \in \{3, 5\}$; les atomes de le mesure aléatoire poissonnienne sont représentés par des boules euclidiennes de rayon $\frac{1}{2}$, de sorte que deux points sont connectés si et seulement si les boules correspondantes s'intersectent. La composante connexe W de 0 est coloriée en rouge.



On cherche dans cette partie une formule pour $p_n(\imath) = \mathbb{P}[|W^*| = n]$, $n \geq 1$.

1. Si x est un sommet d'un graphe G, on note $\mathrm{cc}(x, G)$ sa composante connexe. Soit $R \geq 1$ un paramètre réel et

$$M_R = \mathrm{card}\, \left\{x \in \mathcal{P}(\imath) \cap [-R, R]^d \;\middle|\; |\mathrm{cc}(x, \Gamma_{\mathrm{geom}}(\imath))| = n\right\}.$$

Montrer que $\mathbb{E}[M_R] = \imath\, (2R)^d\, p_n(\imath)$. On pourra exhiber une fonction $h : \mathscr{M}^{\mathrm{atom}}_{(1)}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ vérifiant les hypothèses de la question I.3 (attention aux problèmes de mesurabilité).

2. On dit qu'un sommet x d'un graphe G est à gauche si $x^{(1)} = \min(\{y^{(1)},\ y \in \mathrm{cc}(x, G)\})$, avec $x = (x^{(1)}, \ldots, x^{(d)})$ dans $\mathbb{R}^d$. On pose :

$$\begin{aligned}\overline{M}_R &= \mathrm{card}\ \left\{x \in \mathcal{P}(\imath) \cap [-R,R]^d \ \middle|\ |\mathrm{cc}(x, \Gamma_{\mathrm{geom}}(\imath))| = n \text{ et } x \text{ est à gauche}\right\}\ ;\\ \overline{p}_n(\imath) &= \mathbb{P}[|W^*| = n \text{ et } 0 \text{ est à gauche dans } \Gamma^*_{\mathrm{geom}}(\imath)].\end{aligned}$$

Montrer que $\mathbb{E}\big[\overline{M}_R\big] = \imath\,(2R)^d\,\overline{p}_n(\imath)$, et que $\mathbb{E}\big[|M_R - n\,\overline{M}_R|\big] = O(R^{d-1})$. On pourra introduire l'ensemble V des atomes $x \in \mathcal{P}(\imath)$ tels que $|\mathrm{cc}(x, \Gamma_{\mathrm{geom}}(\imath))| = n$ et tels que le point le plus à gauche de $\mathrm{cc}(x, \Gamma_{\mathrm{geom}}(\imath))$ tombe dans $[-R,R]^d$.

3. Montrer que $\overline{p}_n(\imath) = \frac{p_n(\imath)}{n}$ pour tout $n \geq 1$.

4. On considère la fonction $k : \mathscr{M}^{\mathrm{atom}}_{(n-1)}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ qui à une paire $(\sum_{i=2}^n \delta_{x_i}, \mu)$ associe :
   — 1 si $\{0, x_2, \ldots, x_n\}$ est la composante connexe de 0 dans $\Gamma_{\mathrm{geom}}(0, \delta_0 + \mu)$, et si 0 est à gauche ;
   — 0 sinon.

   Montrer que pour R assez grand, on a l'identité

$$1_{|W^*|=n \text{ et } 0 \text{ est à gauche}} = \sum_{\substack{X \subset [-R,R]^d \cap \mathcal{P}(\imath) \\ \mathrm{card}\ X = n-1}} k\left(\sum_{x \in X} \delta_x, \mathcal{P}(\imath)\right).$$

   En déduire à l'aide des questions précédentes la formule suivante :

$$\frac{p_n(\imath)}{n} = \frac{\imath^{n-1}}{(n-1)!} \int_{(\mathbb{R}^d)^{n-1}} \mathbb{E}\left[k\left(\sum_{i=2}^n \delta_{x_i}, \sum_{i=2}^n \delta_{x_i} + \mathcal{P}(\imath)\right)\right] dx_2 \cdots dx_n.$$

5. On note $k(x_2, \ldots, x_n) = k(\sum_{i=2}^n \delta_{x_i}, \sum_{i=2}^n \delta_{x_i})$, et $A(x_1, \ldots, x_n) = \mathrm{vol}(\bigcup_{i=1}^n B(x_i, 1))$, où $B(x,1)$ est la boule euclidienne de rayon 1 centrée en x. Montrer que

$$\mathbb{E}\left[k\left(\sum_{i=2}^n \delta_{x_i}, \sum_{i=2}^n \delta_{x_i} + \mathcal{P}(\imath)\right)\right] = k(x_2, \ldots, x_n)\, \mathrm{e}^{-\imath\, A(0, x_2, \ldots, x_n)}.$$

6. On définit finalement une fonction $K : (\mathbb{R}^d)^n \to \{0,1\}$:

$$K(x_1, \ldots, x_n) = 1_{\left(x_1^{(1)} < x_2^{(1)} < \cdots < x_n^{(1)} \text{ et } \Gamma_{\mathrm{geom}}(\sum_{i=1}^n \delta_{x_i}) \text{ est connexe}\right)}.$$

   Montrer que

$$\frac{p_n(\imath)}{n} = \imath^{n-1} \int_{(\mathbb{R}^d)^{n-1}} K(0, x_2, \ldots, x_n)\, \mathrm{e}^{-\imath\, A(0, x_2, \ldots, x_n)}\, dx_2 \cdots dx_n.$$

7. Montrer que pour tous entiers $n, m \geq 1$,

$$\frac{p_{n+m-1}(\imath)}{n+m-1} \geq \frac{p_n(\imath)}{n}\, \frac{p_m(\imath)}{m}.$$

   En déduire qu'il existe une constante $\zeta(\imath)$ telle que

$$\lim_{n \to \infty} \left(-\frac{\log p_n(\imath)}{n}\right) = \zeta(\imath).$$

On peut montrer que si $\imath$ est assez petit, alors $\zeta(\imath) > 0$, de sorte que les probabilités $p_n(\imath)$ décroissent exponentiellement avec n. Par contre, si $\imath$ est plus grand qu'un certain paramètre critique $\imath_c(d) > 0$, alors $\zeta(\imath) = 0$ et on a $-\log p_n(\imath) = O(n^{1-d^{-1}})$.

Partie III. Existence d'une composante connexe infinie. On note $p_\infty(\imath) = \mathbb{P}[|W^*| = \infty]$ la probabilité pour que la composante connexe de 0 dans $\Gamma^*_{\mathrm{geom}}(\imath)$ soit infinie. L'objectif de cette partie est de montrer que $p_\infty(\imath) = 0$ pour $\imath$ assez petit. On notera dans ce qui suit $V(d) = \mathrm{vol}(B(0,1))$ le volume de la boule unité.

1. Montrer que $\imath \mapsto p_\infty(\imath)$ est une fonction croissante.

2. Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures aléatoires de Poisson indépendantes de paramètre $\imath$ sur $\mathbb{R}^d$. On construit par récurrence des ensembles $X_{n\geq 0}$ et $S_{n\geq 0}$ comme suit : $X_0 = \{0\}$, $S_0 = B(0,1)$ et
$$X_{n+1} = \{x_{n+1,1}, \ldots, x_{n+1,N_{n+1}}\} = \{\text{atomes de } M_{n+1} \cap S_n\};$$
$$S_{n+1} = \left(\bigcup_{i=1}^{N_{n+1}} B(x_{n+1,i}, 1)\right) \setminus (S_0 \sqcup S_1 \sqcup \cdots \sqcup S_n).$$
Si N_n est le nombre de points dans X_n et $Y_n = \frac{N_n}{(\imath V(d))^n}$, montrer que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une surmartingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\mathcal{F}_n = \sigma(M_1, \ldots, M_n)$.

3. Pour $n \geq 1$, soit $P_n = (M_0)_{|\mathbb{R}^d \setminus (S_0 \sqcup \cdots \sqcup S_{n-1})} + \sum_{k=1}^n (M_k)_{|S_{k-1}}$. Montrer que toutes les mesures aléatoires $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des mesures poissonniennes d'intensité $\imath\, dx$.

4. On pose $M = (M_0)_{|\mathbb{R}^d \setminus (\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} S_n)} + \sum_{k=1}^\infty (M_k)_{|S_{k-1}}$. Montrer que pour $\imath$ assez petit, on a pour toute partie borélienne bornée A :
$$M(A) = \lim_{n\to\infty} P_n(A) \text{ en probabilité.}$$
En déduire que M est encore une mesure aléatoire de Poisson de paramètre $\imath$.

5. On construit le graphe géométrique poissonnien d'intensité $\imath$ en prenant $\mathcal{P}(\imath) = M$. Quel est le lien entre W^* et les ensembles de points X_n ? En déduire que pour $\imath$ assez petit, $|W^*|$ est d'espérance finie.

6. Montrer qu'il existe un paramètre $\imath_c(d) \in (0, +\infty]$ tel que $p_\infty(\imath) = 0$ pour tout $\imath < \imath_c(d)$, et $p_\infty(\imath) > 0$ pour tout $\imath > \imath_c(d)$.

7. On peut montrer que le paramètre critique $\imath_c(d)$ est fini, en couplant le modèle de graphe géométrique à un modèle de percolation discret et en utilisant les résultats de base de cette théorie. Soit $\imath > \imath_c(d)$. Montrer que le graphe géométrique poissonnien $\Gamma_{\mathrm{geom}}(\imath)$ a avec probabilité 1 au moins une composante connexe infinie. On pourra utiliser les propriétés d'indépendance spatiale de la mesure aléatoire de Poisson pour montrer que cet événement est indépendant de lui-même.

Un problème ouvert important est de montrer que $p_\infty(\cdot)$ est continue en le paramètre critique $\imath_c(d)$. La continuité de cette fonction pour $\imath \neq \imath_c(d)$ est connue, mais au point critique seul le cas $d = 2$ est démontré, et par des arguments assez difficiles.

Corrigé.

I.1. Soit $\pi_2 : (\mu, \nu) \in \mathscr{M}^{\mathrm{atom}}_{(n)}(\mathbb{R}^d) \mapsto \nu \in \mathscr{M}^{\mathrm{atom}}(\mathbb{R}^d)$. On rappelle que $\mathscr{M}^{\mathrm{atom}}(\mathbb{R}^d)$ est équipé de la plus petite tribu qui rend mesurable les applications $\mathrm{eval}_A : \nu \mapsto \nu(A)$, A partie borélienne de $\mathbb{R}^d$. En particulier, étant donné un autre espace mesurable $(E, \mathscr{E})$ et une application $f : E \to \mathscr{M}^{\mathrm{atom}}(\mathbb{R}^d)$,

$$f \text{ est une application mesurable } \iff \forall A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d),\ \ \mathrm{eval}_A \circ f \text{ est une application mesurable.}$$

Ici, $(\mathrm{eval}_A \circ \pi_2)(\mu, \nu) = \nu(A)$, donc par définition $\mathrm{eval}_A \circ \pi_2$ est mesurable sur $\mathscr{M}^{\mathrm{atom}}_{(n)}(\mathbb{R}^d)$ pour toute partie mesurable A, et π_2 est bien mesurable.

Si $n = 1$, notons $\theta : (x, \nu) \in \mathscr{M}^{\mathrm{atom}}_{(1)}(\mathbb{R}^d) \mapsto x \in \mathbb{R}^d$. Soit $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$. On a

$$\theta^{-1}(B) = \{(\mu, \nu) \in \mathscr{M}^{\mathrm{atom}}_{(1)}(\mathbb{R}^d) \,|\, \mu(B) = 1\} = (\mathrm{eval}_B \circ \pi_1)^{-1}(\{1\}),$$

et comme précédemment, $\mathrm{eval}_B \circ \pi_1$ est mesurable sur $\mathscr{M}^{\mathrm{atom}}_{(n)}(\mathbb{R}^d)$ pour tout $n \geq 1$. Ainsi, la partie $\theta^{-1}(B)$ est mesurable dans $\mathscr{M}^{\mathrm{atom}}_{(1)}(\mathbb{R}^d)$, et ceci prouve que θ est une application mesurable.

I.2. Si N est une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre $\imath \,\mathrm{vol}(A)$, on a vu en cours que

$$M = \sum_{i=1}^{N} \delta_{X_i}$$

définissait une mesure aléatoire de Poisson d'intensité $\imath\, 1_A(x)\, dx$ (c'est la construction générique de toute mesure aléatoire de Poisson dont l'intensité est de masse finie). Par le principe de superposition, $M + M'$ est alors une mesure de Poisson d'intensité $\imath\, dx$ sur $\mathbb{R}^d$.

I.3. On utilise la construction de la question précédente pour la mesure aléatoire de Poisson $P = M + M'$. Calculer l'espérance conditionnellement à N et à $M' = P_{|\mathbb{R}^d \setminus A}$ revient à intégrer par rapport aux variables aléatoires $X_{n \geq 1}$ (qui elles sont indépendantes de N et M'). Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sum_{x \in A \,\cap\, \mathrm{support}(P)} h(x, P) \,\middle|\, (N, M')\right] &= \int_{A^N} \left(\sum_{i=1}^{N} h\left(x_i, \sum_{i=1}^{N} \delta_{x_i} + M'\right)\right) \frac{dx_1}{\mathrm{vol}(A)} \cdots \frac{dx_N}{\mathrm{vol}(A)} \\ &= \frac{N}{(\mathrm{vol}(A))^N} \int_{A^N} h\left(x_1, \sum_{i=1}^{N} \delta_{x_i} + M'\right)\, dx_1 \cdots dx_N\end{aligned}$$

en utilisant à la seconde ligne la symétrie des rôles joués par les variables $x_1, \ldots, x_N$.

I.4. La question précédente incite à calculer l'espérance en conditionnant par rapport à N et M'. On écrit :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sum_{x \in A \,\cap\, P} h(x, P)\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\sum_{x \in A \,\cap\, \mathrm{support}(P)} h(x, P) \,\middle|\, (N, M')\right]\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\frac{N}{(\mathrm{vol}(A))^N} \int_{A^N} h\left(x_1, \delta_{x_1} + \sum_{i=2}^{N} \delta_{x_i} + M'\right)\, dx_1 \cdots dx_N\right] \\ &= \mathrm{e}^{-\imath\, \mathrm{vol}(A)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\imath^m\, \mathrm{vol}(A)}{(m-1)!} \int_{A^m} \mathbb{E}\left[h\left(x_1, \delta_{x_1} + \sum_{i=2}^{m} \delta_{x_i} + M'\right)\right]\, dx_1 \cdots dx_m.\end{aligned}$$

Posons $\lambda_A = \imath \operatorname{vol}(A)$. Dans l'espérance restante, la seule variable aléatoire est $M' = \mathcal{P}(\imath)_{|\mathbb{R}^d \setminus A}$. On réécrit l'expression obtenue en isolant la variable x_1, et en posant $l = m-1$ et $y_i = x_{i+1}$:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sum_{x \in A \cap P} h(x,P)\right] \\
&= \imath \int_A dx_1 \left(\mathrm{e}^{-\lambda_A} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\lambda_A)^l}{l!} \int_{A^l} \frac{dy_1}{\operatorname{vol}(A)} \cdots \frac{dy_l}{\operatorname{vol}(A)}\, \mathbb{E}\left[h\left(x_1, \delta_{x_1} + \sum_{i=1}^{l} \delta_{y_i} + M' \right)\right]\right) \\
&= \imath \int_A dx_1\, \mathbb{E}\left[h\left(x_1, \delta_{x_1} + \widetilde{M} + M' \right)\right],
\end{aligned}$$

où $\widetilde{M}$ est une mesure aléatoire de Poisson d'intensité $\imath\, 1_A(y)\, dy$ et indépendante de M'. La somme $\widetilde{P} = \widetilde{M} + M'$ est une mesure aléatoire de Poisson sur tout $\mathbb{R}^d$ d'intensité $\imath\, dy$. Comme h est invariant par translation et comme la loi d'une mesure aléatoire de Poisson est aussi invariante par translation, $\mathbb{E}[h(x_1, \delta_{x_1} + \widetilde{P})] = \mathbb{E}[h(0, \delta_0 + \widetilde{P}(\cdot + x_1))] = \mathbb{E}[h(0, \delta_0 + \mathcal{P}(\imath))]$. On conclut :

$$\mathbb{E}\left[\sum_{x \in A \cap P} h(x,P)\right] = \imath \int_A dx_1\, \mathbb{E}[h(0, \delta_0 + \mathcal{P}(\imath))] = \imath \operatorname{vol}(A)\, \mathbb{E}[h(0, \delta_0 + \mathcal{P}(\imath))].$$

I.5. On garde la même construction $P = M + M'$ de la mesure aléatoire de Poisson, et on commence par calculer l'espérance conditionnelle

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{\substack{X \subset A \cap P \\ \operatorname{card} X = n}} k(X,P) \,\middle|\, (N, M')\right] &= 1_{N \geq n} \sum_{\substack{I \subset [\![1,N]\!] \\ |I| = n}} \int_{A^N} k\left(\sum_{i \in I} \delta_{x_i}, \sum_{i=1}^{N} \delta_{x_i} + M' \right) \frac{dx_1}{\operatorname{vol}(A)} \cdots \frac{dx_N}{\operatorname{vol}(A)} \\
&= \frac{1_{N \geq n}}{(\operatorname{vol}(A))^N} \binom{N}{n} \int_{A^N} k\left(\sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i}, \sum_{i=1}^{N} \delta_{x_i} + M' \right) dx_1 \cdots dx_N,
\end{aligned}$$

où $h(X,P) = h(\sum_{x \in X} \delta_x, P)$, et en utilisant la symétrie du rôle joué par les variables x_i. On obtient ensuite en isolant les n premières variables $x_1, \ldots, x_n$:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sum_{\substack{X \subset A \cap P \\ \operatorname{card}(X) = n}} k(X,P)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\frac{1_{N \geq n}}{(\operatorname{vol}(A))^N} \binom{N}{n} \int_{A^N} h\left(\sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i}, \sum_{i=1}^{N} \delta_{x_i} + M' \right) dx_1 \cdots dx_N \right] \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda_A} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\lambda_A)^m}{m!} \binom{m}{n} \int_{A^m} \frac{dx_1}{\operatorname{vol}(A)} \cdots \frac{dx_m}{\operatorname{vol}(A)}\, \mathbb{E}\left[k\left(\sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i}, \sum_{i=1}^{m} \delta_{x_i} + M' \right)\right] \\
&= \frac{\imath^n}{n!} \int_{A^n} dx_1 \cdots dx_n \left(\mathrm{e}^{-\lambda_A} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\lambda_A)^l}{l!} \int_{A^l} \frac{dy_1}{\operatorname{vol}(A)} \cdots \frac{dy_l}{\operatorname{vol}(A)}\, \mathbb{E}\left[k\left(\sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i}, \sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i} + \sum_{i=1}^{l} \delta_{y_i} + M' \right)\right]\right) \\
&= \frac{\imath^n}{n!} \int_{A^n} dx_1 \cdots dx_n\, \mathbb{E}\left[k\left(\sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i}, \sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i} + \widetilde{M} + M' \right)\right]
\end{aligned}$$

où comme précédemment $\widetilde{M}$ est une mesure aléatoire poissonnienne d'intensité $\imath\, 1_A(y)\, dy$ et indépendante de M'. On conclut :

$$\mathbb{E}\left[\sum_{\substack{X \subset A \cap P \\ \mathrm{card}\,(X)=n}} k(X,P)\right] = \frac{\imath^n}{n!} \int_{A^n} dx_1 \cdots dx_n\, \mathbb{E}\left[k\left(\sum_{i=1}^n \delta_{x_i}, \sum_{i=1}^n \delta_{x_i} + \mathcal{P}(\imath)\right)\right]$$
$$= \frac{(\imath\, \mathrm{vol}(A))^n}{n!}\, \mathbb{E}[k(\mathcal{B}(n,A), \mathcal{B}(n,A) + \mathcal{P}(\imath))].$$

II.1. On considère la fonction

$$h : (x,\nu) \mapsto 1_{|\mathrm{cc}(x,\Gamma_{\mathrm{geom}}(\nu))|=n}.$$

Le point délicat est de montrer que cette fonction est mesurable, ou, de façon équivalente, que l'ensemble des paires (x,ν) avec $|\mathrm{cc}(x,\Gamma_{\mathrm{geom}}(\nu))| = n$ est une partie mesurable de $\mathscr{M}^{\mathrm{atom}}_{(1)}(\mathbb{R}^d)$. Notons que si $|\mathrm{cc}(x,\Gamma_{\mathrm{geom}}(\nu))| \geq n$, alors il existe un arbre T d'ensemble de sommets $[\![1,n]\!]$ tel qu'on ait

$$\int_{(\mathbb{R}^d)^{n-1}} \left(\prod_{(a,b)\text{ arête de }T} 1_{d(x_a,x_b)\leq 1}\right) 1_{x_1\neq x_2 \neq \cdots \neq x_n}\, \delta_x(dx_1)\, \nu(dx_2)\, \cdots\, \nu(dx_n) > 0.$$

En effet, si l'on explore de voisins en voisins la composante connexe de $x = x_1$ dans $\Gamma_{\mathrm{geom}}(\nu)$ en s'arrêtant dès que l'on a n sommets distincts $x_1 \neq x_2 \neq \cdots \neq x_n$, alors on obtient un graphe connexe sur n sommets étiquetés, et un arbre couvrant T de ce graphe donne alors une intégrale positive. La quantité écrite ci-dessus est une fonction mesurable $F_T(x,\nu)$ de la paire (x,ν), en tant que composée des applications mesurables suivantes :

- $(x,\nu) \in \mathscr{M}^{\mathrm{atom}}_{(1)}(\mathbb{R}^d) \mapsto (\delta_x,\nu) \in (\mathscr{M}^{\mathrm{atom}}(\mathbb{R}^d))^2$ (*cf.* question I.1) ;
- $\Pi_n : (\mu,\nu) \in (\mathscr{M}^{\mathrm{atom}}(\mathbb{R}^d))^2 \mapsto \mu \otimes \nu^{\otimes n-1} \in \mathscr{M}^{\mathrm{atom}}((\mathbb{R}^d)^n)$ — ce point n'est pas tout à fait évident, et il faut un argument de classe monotone pour voir que l'ensemble des parties $A \subset (\mathbb{R}^d)^n$ telles que $\mathrm{eval}_A \circ \Pi_n$ soit mesurable est l'ensemble de tous les boréliens de $(\mathbb{R}^d)^n$;
- $\mathrm{eval}_{A_T} : \mathscr{M}^{\mathrm{atom}}((\mathbb{R}^d)^n) \to \mathbb{N}$, où A_T est la partie mesurable de $(\mathbb{R}^d)^n$ formée des n-uplets tels que $x_1 \neq x_2 \neq \cdots \neq x_n$ et $d(x_a,x_b) \leq 1$ pour toute arête (a,b) de l'arbre T.

Par conséquent,

$$\{(x,\nu) \in \mathscr{M}^{\mathrm{atom}}_{(1)}(\mathbb{R}^d) \,|\, |\mathrm{cc}(x,\Gamma_{\mathrm{geom}}(\nu))| \geq n\} = \bigcup_{\substack{T\text{ arbre de Cayley}\\ \text{sur } n \text{ sommets}}} (F_T)^{-1}([\![1,+\infty]\!])$$

est bien une partie mesurable pour tout $n \geq 1$, donc h est une application mesurable sur $\mathscr{M}^{\mathrm{atom}}_{(1)}(\mathbb{R}^d)$.

Notons que M_R est le nombre de points x dans $[-R,R]^d \cap \mathcal{P}(\imath)$ tels que $h(x,\mathcal{P}(\imath)) = 1$. Il est évident que h est invariante par translation, donc on peut lui appliquer le résultat de la question I.4 :

$$\mathbb{E}[M_R] = \imath\,(2R)^d\; \mathbb{E}[h(0,\delta_0 + \mathcal{P}(\imath))] = \imath\,(2R)^d\, p_n(\imath).$$

II.2. Le même raisonnement que ci-dessus montre que la fonction

$$\overline{h} : (x,\nu) \mapsto 1_{|\mathrm{cc}(x,\Gamma_{\mathrm{geom}}(\nu))|=n \text{ et } x \text{ est à gauche}}$$

est mesurable sur $\mathscr{M}^{\text{atom}}_{(1)}(\mathbb{R}^d)$ (on change seulement l'ensemble mesurable A_T en rajoutant la condition mesurable que x soit à gauche). De plus, $\overline{h}$ est de nouveau invariante par translation, donc

$$\mathbb{E}\big[\overline{M}_R\big] = \imath\,(2R)^d\ \mathbb{E}\big[\overline{h}(0, \delta_0 + \mathcal{P}(\imath))\big] = \imath\,(2R)^d\,\overline{p}_n(\imath).$$

Comparons maintenant M_R et $\overline{M}_R$. Soit V l'ensemble des atomes $x \in \mathcal{P}(\imath)$ qui appartiennent à une composante connexe de $\Gamma_{\text{geom}}(\imath)$ de taille n, et tels que le point le plus à gauche de $\text{cc}(x, \Gamma_{\text{geom}}(\imath))$ tombe dans $[-R, R]^d$ ("le plus à gauche" signifiant de première coordonnée minimale). Avec probabilité 1, les premières coordonnées des atomes d'une mesure aléatoire de Poisson sont toutes distinctes, donc cette définition est sans ambiguïté. On a évidemment :

$$\text{card}\, V = n\, \overline{M}_R,$$

puisque l'application qui à $x \in V$ associe le point y le plus à gauche dans $\text{cc}(x, \Gamma_{\text{geom}}(\imath))$ atteint chaque élément compté par $\overline{M}_R$ exactement n fois. Comparons maintenant les ensembles V et U, où U est l'ensemble des points comptés par M_R.

— Si $x \in V \setminus U$, alors la composante connexe de x est de taille n et a son point le plus à gauche y dans $[-R, R]^d$, mais x n'est pas lui-même dans $[-R, R]^d$. On a $\|x - y\| \leq n$, donc x appartient à $[-R - n, R + n]^d \setminus [-R, R]^d$. Ainsi,

$$\text{card}\,(V \setminus U) \leq \mathcal{P}(\imath)\big([-R - n, R + n]^d \setminus [-R, R]^d\big).$$

— De même, si $x \in U \setminus V$, alors x est dans $[-R, R]^d$ et dans une composante connexe de taille n, mais le point y le plus à gauche de $\text{cc}(x, \Gamma_{\text{geom}}(\imath))$ n'est pas dans $[-R, R]^d$. De nouveau, ce point y appartient alors à $[-R - n, R + n]^d \setminus [-R, R]^d$, et il y a moins de n points $x \in U \setminus V$ lui correspondant, donc

$$\text{card}\,(U \setminus V) \leq n\, \mathcal{P}(\imath)\big([-R - n, R + n]^d \setminus [-R, R]^d\big).$$

Comme n est fixé et $[-R - n, R + n]^d \setminus [-R, R]^d$ est de volume $O(R^{d-1})$, on obtient

$$\mathbb{E}[|\text{card}\, U - \text{card}\, V|] \leq (n+1)\, \mathbb{E}\big[\mathcal{P}(\imath)\big([-R - n, R + n]^d \setminus [-R, R]^d\big)\big] = O(R^{d-1}).$$

II.3. D'après la question précédente, pour tout $R \geq 1$, on a

$$|p_n(\imath) - n\, \overline{p}_n(\imath)| = \frac{\big|\mathbb{E}\big[M_R - n\overline{M}_R\big]\big|}{\imath\,(2R)^d} = O\left(\frac{1}{R}\right).$$

En faisant tendre R vers l'infini, on en déduit l'identité assez intuitive mais non triviale $p_n(\imath) = n\, \overline{p}_n(\imath)$.

II.4. La condition "$|W^*| = n$ et 0 est à gauche" peut être vérifiée en observant uniquement la mesure aléatoire $\mathcal{P}(\imath)$ dans la boîte $[-R, R]^d$ avec $R \geq n$. Ceci implique immédiatement l'identité. La fonction k est mesurable sur $\mathscr{M}^{\text{atom}}_{(n-1)}(\mathbb{R}^d)$ pour des raisons analogues à celles données dans la question II.1. Par conséquent, d'après la question I.5,

$$\begin{aligned}
\overline{p}_n(\imath) &= \frac{(\imath\,(2R)^d)^{n-1}}{(n-1)!}\ \mathbb{E}\big[k(\mathcal{B}(n-1, [-R, R]^d), \mathcal{B}(n-1, [-R, R]^d) + \mathcal{P}(\imath))\big] \\
&= \frac{\imath^{n-1}}{(n-1)!} \int_{([-R,R]^d)^{n-1}} dx_2 \cdots dx_n\ \mathbb{E}\left[k\left(\sum_{i=2}^{n} \delta_{x_i}, \sum_{i=2}^{n} \delta_{x_i} + \mathcal{P}(\imath)\right)\right].
\end{aligned}$$

L'identité est vraie pour tout R assez grand, et donc aussi pour l'intégrale sur $(\mathbb{R}^d)^{n-1}$ par convergence monotone. Par ailleurs, le terme de gauche de la formule est égal à $\frac{p_n(\imath)}{n}$ d'après la question précédente.

II.5. La fonction $k(x_2,\dots,x_n)$ vaut 1 si le graphe $\Gamma_{\mathrm{geom}}(\delta_0+\sum_{i=2}^n \delta_{x_i})$ est connexe et si 0 est à gauche, et 0 sinon. Si $k(x_2,\dots,x_n)=0$, alors $\{0,x_2,\dots,x_n\}$ ne peut pas être la composante connexe de 0 dans $\Gamma_{\mathrm{geom}}(\delta_0+\sum_{i=2}^n \delta_{x_i}+\mathcal{P}(\imath))$ avec 0 le point le plus à gauche, et dans ce cas l'identité est claire. Supposons maintenant que $k(x_2,\dots,x_n)=1$. Alors, pour que $\{0,x_2,\dots,x_n\}$ soit la composante connexe de 0 dans $\Gamma_{\mathrm{geom}}(\delta_0+\sum_{i=2}^n \delta_{x_i}+\mathcal{P}(\imath))$ avec 0 le point le plus à gauche, il faut que les atomes ajoutés par $\mathcal{P}(\imath)$ ne soient pas connectés à $\Gamma_{\mathrm{geom}}(\delta_0+\sum_{i=2}^n \delta_{x_i})$, donc tombent tous en dehors de $B(0,1)\cup\bigcup_{i=2}^n B(x_i,1)$. La probabilité pour que ceci arrive est $\mathrm{e}^{-\imath\, A(0,x_2,\dots,x_n)}$, d'où l'identité

$$\mathbb{E}\left[k\left(\sum_{i=2}^n \delta_{x_i},\sum_{i=2}^n \delta_{x_i}+\mathcal{P}(\imath)\right)\right]=k(x_2,\dots,x_n)\,\mathrm{e}^{-\imath\, A(0,x_2,\dots,x_n)}.$$

II.6. En combinant les questions II.4 et II.5, on obtient

$$\frac{p_n(\imath)}{n}=\frac{\imath^{n-1}}{(n-1)!}\int_{(\mathbb{R}^d)^{n-1}} k(x_2,\dots,x_n)\,\mathrm{e}^{-\imath\, A(0,x_2,\dots,x_n)}\,dx_2\cdots dx_n.$$

La fonction de $n-1$ variables que l'on intègre est invariante par permutation des variables, donc on peut se débarrasser du facteur multiplicatif $\frac{1}{(n-1)!}$ en intégrant seulement sur l'ensemble des $(n-1)$-uplets $(x_2,\dots,x_n)$ avec $x_2^{(1)}<x_3^{(1)}<\dots<x_n^{(1)}$. Alors,

$$\begin{aligned}\frac{p_n(\imath)}{n}&=\imath^{n-1}\int_{(\mathbb{R}^d)^{n-1}} k(x_2,\dots,x_n)\,1_{(x_2^{(1)}<\dots<x_n^{(1)})}\,\mathrm{e}^{-\imath\, A(0,x_2,\dots,x_n)}\,dx_2\cdots dx_n\\&=\imath^{n-1}\int_{(\mathbb{R}^d)^{n-1}} K(0,x_2,\dots,x_n)\,\mathrm{e}^{-\imath\, A(0,x_2,\dots,x_n)}\,dx_2\cdots dx_n.\end{aligned}$$

II.7. Notons que si $K(0,x_2,\dots,x_n)=1$ et $K(x_n,\dots,x_{n+m-1})=1$, alors on a

$$0<x_2^{(1)}<\dots<x_n^{(1)}<\dots<x_{n+m-1}^{(1)},$$

et par ailleurs les deux graphes $\Gamma_{\mathrm{geom}}(\{0,x_2,\dots,x_n\})$ et $\Gamma_{\mathrm{geom}}(\{x_n,\dots,x_{n+m-1}\})$ sont connexes, donc $\Gamma_{\mathrm{geom}}(\{0,x_2,\dots,x_{n+m-1}\})$ est également connexe puisque le point x_n est partagé. On en déduit que $K(0,x_2,\dots,x_{n+m-1})=1$. Ainsi, on a toujours

$$K(0,x_2,\dots,x_n)\,K(x_n,\dots,x_{n+m-1})\leq K(0,x_2,\dots,x_{n+m-1}).$$

Comme le volume est sous-additif, on a aussi

$$A(0,x_2,\dots,x_n)+A(x_n,\dots,x_{n+m-1})\geq A(0,x_2,\dots,x_{n+m-1}).$$

Alors, en utilisant l'invariance par translation des fonctions considérées, on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{p_n(\imath)}{n\,\imath^{n-1}}\,\frac{p_m(\imath)}{m\,\imath^{m-1}}\\
&=\int_{(\mathbb{R}^d)^{n+m-2}} K(0,x_2,\ldots,x_n)\,K(0,y_2,\ldots,y_m)\,\mathrm{e}^{-\imath\,(A(0,x_2,\ldots,x_n)+A(0,y_2,\ldots,y_m))}\,dx\,dy\\
&=\int_{(\mathbb{R}^d)^{n+m-2}} K(0,x_2,\ldots,x_n)\,K(x_n,y_2+x_n,\ldots,y_m+x_n)\,\mathrm{e}^{-\imath\,(A(0,x_2,\ldots,x_n)+A(x_n,y_2+x_n,\ldots,y_m+x_n))}\,dx\,dy\\
&=\int_{(\mathbb{R}^d)^{n+m-2}} K(0,x_2,\ldots,x_n)\,K(x_n,\ldots,x_{n+m-1})\,\mathrm{e}^{-\imath\,(A(0,x_2,\ldots,x_n)+A(x_n,\ldots,x_{n+m-1}))}\,dx\\
&\leq\int_{(\mathbb{R}^d)^{n+m-2}} K(0,x_2,\ldots,x_{n+m-1})\,\mathrm{e}^{-\imath\,A(0,x_2,\ldots,x_{n+m-1})}\,dx=\frac{p_{n+m-1}(\imath)}{(n+m-1)\,\imath^{n+m-2}},
\end{aligned}$$

ce que l'on voulait démontrer. On en déduit que la suite positive

$$u_n=-\log\left(\frac{p_{n+1}(\imath)}{n+1}\right)$$

est sous-additive, donc par un argument classique il existe une limite $\zeta(\imath)\geq 0$ à la suite $(\frac{u_n}{n})_{n\geq 1}$. La suite $-\frac{\log p_n(\imath)}{n}$ a la même limite puisque $\frac{\log(n+1)}{n}$ tend vers 0.

III.1. Si $\imath<\imath'$, on couple les deux mesures aléatoires $P=\mathcal{P}(\imath)$ et $P'=\mathcal{P}(\imath')$ en prenant $P''=\mathcal{P}(\imath'-\imath)$ indépendant de P, et en posant $P'=P+P''$; on obtient bien une mesure poissonnienne d'intensité $\imath'\,dx$ par le principe de superposition. Avec cette construction, $\Gamma^*_{\mathrm{geom}}(\imath)$ est un sous-graphe $\Gamma^*_{\mathrm{geom}}(\imath')$, donc si 0 est dans une composante connexe infinie du premier graphe, c'est *a fortiori* le cas dans le second graphe. Ceci montre que $p_\infty(\imath)\leq p_\infty(\imath')$.

III.2. On calcule

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[N_{n+1}\,|\,\mathcal{F}_n]&=\mathbb{E}[M_{n+1}(S_n)\,|\,\mathcal{F}_n]\\
&\leq\mathbb{E}\left[M_{n+1}\left(\bigcup_{i=1}^{N_n}B(x_{n,i},1)\right)\,|\,\mathcal{F}_n\right]\\
&\leq\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N_n}M_{n+1}(B(x_{n,i},1))\,|\,\mathcal{F}_n\right]\\
&\leq N_n(\imath\,V_d).
\end{aligned}$$

Par conséquent, $Y_n=\frac{N_n}{(\imath\,V_d)^n}$ est une surmartingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

III.3. Le cas $n=1$ est trivial :

$$P_1=(M_0)_{|\mathbb{R}^d\setminus B(0,1)}+(M_1)_{|B(0,1)}$$

suit bien la loi $\mathcal{P}(\imath)$ par le principe de superposition. Supposons le résultat établi jusqu'au rang n, et considérons P_{n+1}. Lorsqu'on passe de P_n à P_{n+1}, on retire les points de M_0 dans S_n, en les remplaçant par des points d'une nouvelle mesure aléatoire M_{n+1} ; on s'attend à ce que ceci ne change en rien la loi de la mesure aléatoire. Pour montrer que l'on conserve bien une mesure aléatoire de loi $\mathcal{P}(\imath)$, on utilise la formule de Campbell. Soit $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}_+$ une fonction mesurable positive. On a par conditionnement :

$$\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-P_{n+1}(f)}]=\mathbb{E}\Big[\mathbb{E}\Big[\mathrm{e}^{-(M_0)_{|\mathbb{R}^d\setminus(S_0\sqcup\cdots\sqcup S_n)}(f)-(M_{n+1})_{|S_n}(f)}\,|\,M_1,\ldots,M_n\Big]\;\mathrm{e}^{-\sum_{k=1}^n(M_k)_{|S_{k-1}}(f)}\Big].$$

Par le principe de superposition, conditionnellement aux mesures $M_1, \ldots, M_n$, la mesure aléatoire $(M_0)_{|\mathbb{R}^d \setminus (S_0 \sqcup \cdots \sqcup S_n)} + (M_{n+1})_{|S_n}$ a la même loi que $(M_0)_{|\mathbb{R}^d \setminus (S_0 \sqcup \cdots \sqcup S_{n-1})}$. Donc,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-P_{n+1}(f)}] &= \mathbb{E}\Big[\mathbb{E}\Big[\mathrm{e}^{-(M_0)_{|\mathbb{R}^d \setminus (S_0 \sqcup \cdots \sqcup S_{n-1})}(f)} \,|\, M_1, \ldots, M_n\Big]\ \mathrm{e}^{-\sum_{k=1}^{n} (M_k)_{|S_{k-1}}(f)}\Big] \\ &= \mathbb{E}[\mathrm{e}^{-P_n(f)}].\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \geq 1$, $P_n \sim \mathcal{P}(\imath)$.

III.4. On remarque que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[(P_{n+1}(A) - P_n(A))^2\big] &= \mathbb{E}\big[(M_{n+1}(A \cap S_n) - M_0(A \cap S_n))^2\big] \\ &= \mathbb{E}\big[\mathbb{E}\big[(M_{n+1}(A \cap S_n) - M_0(A \cap S_n))^2 \,|\, \mathcal{F}_n\big]\big] \\ &= 2\,\mathbb{E}[\imath \operatorname{vol}(A \cap S_n)]\end{aligned}$$

puisque la variance d'une loi de Poisson de paramètre λ est égale à λ. On en déduit la borne

$$\mathbb{E}\big[(P_{n+1}(A) - P_n(A))^2\big] \leq 2\,(\imath\, V_d)\, \mathbb{E}[N_n] \leq 2\,(\imath\, V_d)^{n+1}$$

en utilisant le résultat de la question III.2. En particulier, si $\imath\, V_d < 1$, alors la série des normes $\|P_{n+1}(A) - P_n(A)\|$ dans $\mathscr{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, donc la suite de variables aléatoires $(P_n(A))_{n \geq 1}$ converge en norme quadratique, et par conséquent en probabilité vers $M(A)$. Pour toute familles de parties mesurables bornées disjointes $(A_1, \ldots, A_r)$ et tout $n \geq 1$, le vecteur $(P_n(A_1), \ldots, P_n(A_r))$ est un vecteur de variables indépendantes de Poisson de paramètres $(\imath \operatorname{vol}(A_1), \ldots, \imath \operatorname{vol}(A_r))$. Comme la convergence en probabilité est compatible avec les produits d'espaces et implique la convergence en loi, on en déduit que $(M(A_1), \ldots, M(A_r))$ est aussi un vecteur de variables indépendantes de Poisson de paramètres $(\imath \operatorname{vol}(A_1), \ldots, \imath \operatorname{vol}(A_r))$. Ceci implique que M est une mesure aléatoire poissonnienne d'intensité $\imath\, dx$.

III.5. Les ensembles X_n sont construits en lien avec l'exploration de la composante connexe de 0 dans $\Gamma^*_{\mathrm{geom}}(\imath)$: ainsi,

$$X_n = \{x \in W^* \,|\, d(x, 0) = n\},$$

où la distance est la distance de graphes. En particulier, $W^* = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$. D'après la question III.2, $\mathbb{E}[|X_n|] = \mathbb{E}[N_n] \leq (\imath\, V_d)^n$, donc $\mathbb{E}[|W^*|]$ est finie dès que $\imath\, V_d < 1$.

III.6. D'après ce qui précède, si $\imath < \frac{1}{V_d}$, alors $p_\infty(\imath) = 0$. Soit $\imath_c(d) = \sup\{\imath \,|\, p_\infty(\imath) = 0\}$. On a donc $\imath_c(d) > 0$, et si $\imath < \imath_c(d)$, alors il existe $\imath' \in (0, \imath_c(d))$ tel que $p_\infty(\imath') = 0$, et donc $p_\infty(\imath) = 0$ par la question III.1.

III.7. Soit $\Omega = \mathscr{M}^{\mathrm{atom}}(\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{F} = \sigma(\mathrm{eval}_A,\ A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$ sa tribu et $\mathbb{P}$ la loi d'une mesure aléatoire de Poisson d'intensité $\imath\, dx$. On considère pour $x \in \mathbb{R}^d$ la transformation $\tau_x : \Omega \to \Omega$ qui correspond à la translation par x :

$$(\tau_x \omega)(A) = \omega(A + x).$$

On a la propriété suivante : pour tous événements $E_1, E_2 \in \mathcal{F}$,

$$\lim_{\|x\| \to \infty} \mathbb{P}[\tau_x(E_1) \cap E_2] = \mathbb{P}[E_1]\, \mathbb{P}[E_2].$$

En effet, notons $\mathcal{F}_n = \sigma(\mathrm{eval}_A,\, A \in \mathscr{B}([-n,n]^d))$. Si E_1 et E_2 sont dans une sous-tribu $\mathcal{F}_n$, alors on a $\mathbb{P}[\tau_x(E_1) \cap E_2] = \mathbb{P}[E_1]\,\mathbb{P}[E_2]$ pour tout x assez grand tel que $\tau_x(B_n) \cap B_n = \emptyset$, par indépendance des réalisations d'un processus de Poisson sur des parties disjointes. Il reste à voir que $\mathcal{F} = \sigma(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n)$, ce qui est trivial car $\mathrm{eval}_A = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{eval}_{A\cap B_n}$ pour toute partie A. Ceci permet d'approcher tout événement E par des événements ne dépendant que de ce qui se passe dans une partie bornée, et donc de montrer l'identité dans le cas général. En particulier, si E est un événement invariant par translation ($\tau_x(E) = E$ pour tout x), alors $\mathbb{P}[E] = (\mathbb{P}[E])^2$ et la probabilité de E vaut 0 ou 1.

Appliquons ce résultat à l'événement E d'existence d'une composante connexe infinie dans $\Gamma_{\mathrm{geom}}(\imath)$. Si $\imath > \imath_c(d)$, alors cette probabilité est non nulle, car plus grande que $p_\infty(\imath)$. Ici, on utilise aussi le fait que 0 est avec probabilité 1 connectée à seulement un nombre fini de voisins, à savoir les éléments de $\mathcal{P}(\imath)(B(0,1))$. Par conséquent, si $\mathrm{cc}(0, \Gamma^*_{\mathrm{geom}}(\imath))$ est infinie, alors en retirant 0 de $\Gamma^*_{\mathrm{geom}}(\imath)$, on ne scinde pas cette composante connexe en un nombre infini de composantes finies. D'après le raisonnement précédent, on en déduit que $\mathbb{P}[E] = 1$.