

*Durée : 3 heures. Les documents sont autorisés, mais sont interdits : livres, calculatrices, téléphones, ordinateurs ou objets apparentés. Toutes les réponses doivent être justifiées, et la rédaction sera prise en compte. Les exercices sont indépendants, et au sein d'un exercice, il est permis d'utiliser tout résultat qui apparaît dans le cours ou qui a été énoncé dans une question précédente (même si cette question n'a pas été traitée). Le barème prévu est approximativement : Ex.1 /3 – Ex.2 /3 – Ex.3 /4 – Problème /10.*

**Exercice 1. (Lois suffisamment divisibles).** Soit  $\mu$  une mesure de probabilités sur  $\mathbb{R}$ . On suppose qu'il existe une suite strictement croissante d'entiers  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$  et une suite de mesures de probabilités  $(\rho_k)_{k \in \mathbb{N}}$  telle que  $\mu = (\rho_k)^{*n_k}$  pour tout  $k$ .

1. Montrer que la transformée de Fourier  $\hat{\mu}$  ne s'annule pas.
2. Montrer que  $\mu$  est infiniment divisible. On pourra tenter d'approximer  $\mu$  par des lois infiniment divisibles appropriées.

**Exercice 2. (Sans probabilités!).** Dans cet exercice,  $\mathcal{C}([0, 1])$  désigne l'ensemble des fonctions continues  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , cet espace étant muni de la topologie usuelle de la convergence uniforme; et  $\mathcal{L}^p([0, 1])$  désigne l'espace de Banach constitué des fonctions  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  qui sont Lebesgue mesurables et telles que  $\int_0^1 |f(s)|^p ds < +\infty$ .

1. Une trajectoire  $x \in \mathcal{C}([0, 1])$  est dite *absolument continue* s'il existe une fonction mesurable  $x'$  avec  $x' \in \mathcal{L}^1([0, 1])$  et

$$x(t) = x(0) + \int_0^t x'(s) ds \quad \text{pour tout } t \in [0, 1].$$

Dans ce cas,  $x$  est dérivable presque partout, de dérivée  $x'$ . On introduit l'ensemble

$$K = \left\{ x \in \mathcal{C}([0, 1]) \mid x(0) = 0, x \text{ est absolument continue et } \int_0^1 |x'(s)|^2 ds \leq 1 \right\}.$$

Montrer que  $K$  est une partie relativement compacte de  $\mathcal{C}([0, 1])$ . Si  $x \in K$ , que peut-on dire de  $\|x\|_\infty$ ?

2. Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite dans l'espace de Hilbert  $\mathcal{L}^2([0, 1])$ , telle que  $\int_0^1 |f_n(s)|^2 ds \leq 1$  pour tout  $n$ . Montrer qu'il existe une sous-suite  $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  et une fonction  $f \in \mathcal{L}^2([0, 1])$  telle que

$$\int_0^1 f_{n_k}(s) g(s) ds \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(s) g(s) ds$$

pour toute fonction  $g$  dans  $\mathcal{L}^2([0, 1])$ . En déduire que la partie  $K$  est en fait compacte dans  $\mathcal{C}([0, 1])$ .

On peut montrer que  $K$  est presque sûrement l'ensemble des points d'adhérence de la suite  $(\frac{X(n \cdot)}{\sqrt{2n \log \log n}})_{n \in \mathbb{N}}$ , où  $X$  est un mouvement brownien standard.

**Exercice 3. (Convergence en probabilité des moments).** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace de probabilités, et  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de *mesures de probabilités aléatoires* définies sur cet espace. Ceci veut dire que  $\mathcal{M}^1(\mathbb{R})$  est équipé de la tribu des boréliens engendrée par sa topologie d'espace topologique polonais, et que  $\omega \in \Omega \mapsto \mu_n(\omega) \in \mathcal{M}^1(\mathbb{R})$  est pour tout  $n$  une application mesurable pour les tribus  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{B}(\mathcal{M}^1(\mathbb{R}))$ . Dans ce qui suit, on omettra le plus souvent et comme d'habitude le paramètre  $\omega$ .

1. On suppose que pour tout  $r \geq 1$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\int_{\mathbb{R}} |s|^r \mu_n(ds) < \infty$  avec probabilité 1. Montrer que les quantités

$$M_{r,n} = \int_{\mathbb{R}} s^r \mu_n(ds)$$

sont des variables aléatoires, c'est-à-dire que  $\omega \in \Omega \mapsto M_{r,n}(\omega) \in \mathbb{R}$  est bien mesurable.

On fixe une mesure déterministe  $\mu \in \mathcal{M}^1(\mathbb{R})$  qui admet des moments finis de tout ordre  $r \geq 1$ , et qui est déterminée par ses moments. On rappelle que dans ce cas, si  $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite déterministe dans  $\mathcal{M}^1(\mathbb{R})$  telle que  $\int_{\mathbb{R}} s^r \nu_n(ds) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} s^r \mu(ds)$  pour tout  $r \geq 1$ , alors  $\nu_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu$ .

2. On suppose que pour tout  $r \geq 1$ , la suite de variables aléatoires  $(M_{r,n})_{n \in \mathbb{N}}$  converge en probabilité vers  $M_r = \int_{\mathbb{R}} s^r \mu(ds)$ . Montrer que la suite de mesures aléatoires  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge en probabilité vers  $\mu$ , la topologie étant bien sûr celle de la convergence faible dans  $\mathcal{M}^1(\mathbb{R})$ .

**Problème. (Caractérisation de Rényi).** Dans ce qui suit,  $\mathfrak{X}$  est un espace polonais, et  $\mathcal{M}^{\text{atom}}(\mathfrak{X})$  est l'ensemble des mesures atomiques sur  $\mathfrak{X}$  (sommées dénombrables d'atomes).

**Partie I.** On rappelle que la tribu de  $\mathcal{M}^{\text{atom}}(\mathfrak{X})$  est la plus petite tribu rendant mesurable les applications  $\mu \in \mathcal{M}^{\text{atom}} \mapsto \mu(A) \in \mathbb{N} \sqcup \{+\infty\}$ ,  $A$  parcourant les boréliens de  $\mathfrak{X}$ .

1. Si  $\mu$  est une mesure atomique sur  $\mathfrak{X}$ , on définit une nouvelle mesure  $\mu^{(2)}$  sur  $\mathfrak{X}^2$  par la formule suivante :

$$\mu^{(2)}(A) = \int_{\mathfrak{X}} \left( \int_{\mathfrak{X}} 1_{(x,y) \in A} \mu(dx) - 1_{(y,y) \in A} \right) \mu(dy).$$

Si  $\mu = \sum_{i \in I} \delta_{x_i}$ , montrer que  $\mu^{(2)} \in \mathcal{M}^{\text{atom}}(\mathfrak{X}^2)$  et expliciter en fonction des  $x_i$  les atomes de  $\mu^{(2)}$ . Si  $\mu$  est de masse finie  $n$ , quelle est la masse de  $\mu^{(2)}$  ?

On admet dans la suite que l'application  $\mu \in \mathcal{M}^{\text{atom}}(\mathfrak{X}) \mapsto \mu^{(2)} \in \mathcal{M}^{\text{atom}}(\mathfrak{X}^2)$  est mesurable.

2. Une mesure atomique  $\mu$  est dite *simple* si  $\mu(\{x\}) \in \{0, 1\}$  pour tout  $x \in \mathfrak{X}$ . Donner un critère nécessaire et suffisant sur  $\mu^{(2)}$  pour que  $\mu$  soit une mesure simple; on pourra introduire la diagonale  $\text{diag}(\mathfrak{X}) = \{(x, x) \in \mathfrak{X}^2 \mid x \in \mathfrak{X}\}$ . En déduire que l'ensemble des mesures atomiques simples  $\mathcal{M}^{\text{simple}}(\mathfrak{X})$  est une partie mesurable de  $\mathcal{M}^{\text{atom}}(\mathfrak{X})$ .
3. Soit  $\lambda$  mesure  $s$ -finie sur  $\mathfrak{X}$ , et  $N$  une mesure poissonnienne d'intensité  $\lambda$ . Pour  $A$  borélien de  $\mathfrak{X}^2$ , calculer  $\mathbb{E}[N^{(2)}(A)]$  en fonction de  $A$  et de  $\lambda$  (indication : traiter d'abord des cas simples pour l'intensité  $\lambda$ ).
4. Utiliser la question précédente pour (re)démontrer que  $N$  est simple presque sûrement si et seulement si  $\lambda(\{x\}) = 0$  pour tout  $x \in \mathfrak{X}$  (mesure dite *diffuse* ou *sans atome*).

**Partie II.** L'objectif de cette seconde partie est d'établir le résultat suivant (caractérisation de Rényi) : si  $\lambda$  est une mesure  $s$ -finie diffuse et si  $N$  est une mesure atomique aléatoire qui est simple presque sûrement et telle que

$$\mathbb{P}[N(B) = 0] = \exp(-\lambda(B))$$

pour tout borélien  $B$ , alors  $N$  est une mesure poissonnienne d'intensité  $\lambda$ .

1. Soit  $\mathfrak{X}$  un espace polonais. On admet qu'il existe un borélien  $B \subset [0, 1]$  et une application mesurable  $\psi : \mathfrak{X} \rightarrow B$  qui est bijective et d'inverse  $\psi^{-1} : B \rightarrow \mathfrak{X}$  également mesurable. En déduire qu'il existe une famille de boréliens  $(I_{n,j})_{n,j \in \mathbb{N}}$  de  $\mathfrak{X}$  avec les propriétés suivantes :

- (a) Pour tout  $n$  fixé, les  $I_{n,j}$  sont disjoints et  $\bigsqcup_{j \in \mathbb{N}} I_{n,j} = \mathfrak{X}$  (partition).
- (b) Si  $n > m$ , alors chaque  $I_{n,j}$  est inclus dans une partie  $I_{m,k}$  (condition de raffinement).
- (c) La tribu engendrée par tous les  $(I_{n,j})_{n,j \in \mathbb{N}}$  est la tribu des boréliens de  $\mathfrak{X}$ .
- (d) La famille  $(I_{n,j})_{n,j \in \mathbb{N}}$  sépare les points : si  $x \neq y$ , alors il existe  $n \in \mathbb{N}$  et  $j_1 \neq j_2$  tels que  $x \in I_{n,j_1}$  et  $y \in I_{n,j_2}$ .

On ne demande pas que les  $I_{n,j}$  soient tous non vides. On dit que  $(I_{n,j})_{n,j \in \mathbb{N}}$  est une *dissection* de  $\mathfrak{X}$ , et on en fixe une dans ce qui suit.

2. On note  $\mathcal{T}(\mathfrak{X})$  la tribu sur  $\mathcal{M}^{\text{atom}}(\mathfrak{X})$  qui rend mesurable les applications  $\mu \mapsto \mu(A)$ , et  $\mathcal{U}(\mathfrak{X})$  sa sous-tribu engendrée par les applications  $\mu \mapsto \min(\mu(A), 1)$ . En d'autres termes,  $\mathcal{U}(\mathfrak{X})$  est la tribu engendrée par les parties

$$\{\mu \in \mathcal{M}^{\text{atom}}(\mathfrak{X}) \mid \mu(B) = 0\}, \quad B \text{ borélien de } \mathfrak{X}.$$

Si  $B$  est un borélien de  $X$ , on note

$$g_{n,B}(\mu) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \min(\mu(I_{n,j} \cap B), 1).$$

Montrer que chaque fonction  $g_{n,B}$  est  $\mathcal{U}(\mathfrak{X})$ -mesurable sur  $\mathcal{M}^{\text{atom}}(\mathfrak{X})$ , et que la suite  $(g_{n,B}(\mu))_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante.

3. On note  $g_B(\mu) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_{n,B}(\mu)$ . Montrer que si  $\mu \in \mathcal{M}^{\text{simple}}(\mathfrak{X})$ , alors  $g_B(\mu) = \mu(B)$  (indication : traiter d'abord le cas où  $\mu$  est finie). En déduire l'identité entre tribus restreintes :

$$\{A \cap \mathcal{M}^{\text{simple}}(\mathfrak{X}) \mid A \in \mathcal{U}(\mathfrak{X})\} = \{A \cap \mathcal{M}^{\text{simple}}(\mathfrak{X}) \mid A \in \mathcal{T}(\mathfrak{X})\}.$$

4. Soit  $N_1$  et  $N_2$  deux mesures atomiques aléatoires qui sont toutes les deux simples presque sûrement, et qui vérifient :

$$\forall B \text{ borélien de } \mathfrak{X}, \quad \mathbb{P}[N_1(B) = 0] = \mathbb{P}[N_2(B) = 0].$$

Montrer que les deux mesures atomiques aléatoires  $N_1$  et  $N_2$  ont la même distribution.

5. Démontrer la caractérisation de Rényi pour les mesures poissonniennes à intensité  $s$ -finie diffuse.



**Corrigé de l'exercice 1.** Pour la première question, on peut réutiliser telle quelle la preuve du cours qui montre que si  $\mu$  est infiniment divisible, alors  $\widehat{\mu}$  ne s'annule ; en effet, l'existence de racines  $n_k$ -ièmes de  $\mu$  avec  $n_k$  arbitrairement grand au lieu de l'existence de racines  $n$ -ièmes pour tout  $n$  ne change rien à cette preuve.

Pour montrer ensuite que  $\mu$  est infiniment divisible, on peut comme dans le cours approcher  $\mu$  par des lois de Poisson composées. Ainsi, considérons pour  $k \in \mathbb{N}$  la loi  $\mu_k$  qui est la loi de Poisson composée d'intensité  $n_k \rho_k$ . Sa transformée de Fourier est

$$\widehat{\mu}_k(\xi) = \exp \left( n_k \int_{\mathbb{R}} (e^{i\xi} - 1) \rho_k(d\xi) \right) = \exp(n_k(\widehat{\rho}_k(\xi) - 1)).$$

Comme  $\widehat{\mu}$  ne s'annule pas, on peut l'écrire de manière unique sous la forme  $\widehat{\mu}(\xi) = \exp(\psi(\xi))$  avec  $\psi$  fonction continue de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$ ,  $\psi(0) = 0$ . On a alors  $\widehat{\rho}_k(\xi) = \exp(\frac{\psi(\xi)}{n_k})$  puisque  $(\rho_k)^{*n_k} = \mu$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} \widehat{\mu}_k(\xi) &= \exp \left( n_k \left( \exp \left( \frac{\psi(\xi)}{n_k} \right) - 1 \right) \right); \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \widehat{\mu}_k(\xi) &= \exp(\psi(\xi)) = \widehat{\mu}(\xi). \end{aligned}$$

On a donc  $\mu_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \mu$ , et  $\mu$  est limite en loi de lois infiniment divisibles, donc est elle-même infiniment divisible.

## Corrigé de l'exercice 2.

1. Par le théorème d'Arzela-Ascoli, comme toutes les trajectoires dans  $K$  vérifient  $x(0) = 0$ , pour montrer la relative compacité de  $K$  dans  $\mathcal{C}([0, 1])$ , il suffit d'établir l'uniforme absolue continuité de la partie  $K$ . Or, si  $0 \leq s \leq t \leq 1$  et  $x \in K$ , alors par Cauchy-Schwarz

$$|x(s) - x(t)| = \left| \int_s^t x'(u) du \right| \leq \sqrt{\int_s^t |x'(u)|^2 du} \sqrt{t-s} \leq \sqrt{t-s},$$

donc les fonctions dans  $K$  sont uniformément  $\frac{1}{2}$ -Hölderiennes, et a fortiori uniformément absolument continues. D'autre part, si  $x \in K$ , alors l'inégalité précédente appliquée à  $s = 0$  et  $t$  arbitraire montre que  $\|x\|_{\infty} \leq 1$ .

2. Pour la compacité faible de la boule unité de  $\mathcal{L}^2([0, 1])$ , on peut utiliser Banach-Alaoglu et le caractère hilbertien, mais une preuve plus simple est possible ici car  $\mathcal{L}^2([0, 1])$  est séparable : une famille dénombrable dense est par exemple fournie par les combinaisons linéaires finies à coefficients rationnels de fonctions trigonométriques  $s \mapsto e^{2i\pi ns}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Considérons donc une famille  $\mathcal{G}$  dénombrable et dense dans  $\mathcal{L}^2([0, 1])$ . Pour tout  $g \in \mathcal{G}$ ,  $|\langle f_n | g \rangle| \leq \|g\|_{\mathcal{L}^2}$  est une suite de nombres réels bornée. Par extraction diagonale, on peut donc trouver une sous-suite  $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  telle que  $\langle f_{n_k} | g \rangle$  converge vers une limite  $\phi(g)$  pour tout  $g \in \mathcal{G}$ . Alors, si  $h$  est une autre fonction dans  $\mathcal{L}^2([0, 1])$ , choisissant  $g \in \mathcal{G}$  telle que  $\|g - h\|_{\mathcal{L}^2} \leq \varepsilon$ , on a

$$\begin{aligned} |\langle f_{n_k} | h \rangle - \langle f_{n_l} | h \rangle| &\leq |\langle f_{n_k} | g \rangle - \langle f_{n_l} | g \rangle| + (\|f_{n_k}\|_{\mathcal{L}^2} + \|f_{n_l}\|_{\mathcal{L}^2}) \|g - h\|_{\mathcal{L}^2} \\ &\leq |\langle f_{n_k} | g \rangle - \langle f_{n_l} | g \rangle| + 2\varepsilon, \end{aligned}$$

donc  $(\langle f_{n_k} | h \rangle)_{k \in \mathbb{N}}$  est une suite de Cauchy et admet aussi une limite  $\phi(h)$ . En tant que limite ponctuelle de formes linéaires continues dont les normes d'opérateurs sont toutes inférieures à

1,  $\phi$  est également de ce type, et comme  $\mathcal{L}^2([0, 1])$  est un espace de Hilbert, il existe une unique fonction  $f \in \mathcal{L}^2([0, 1])$  telle que  $\phi(\cdot) = \langle f | \cdot \rangle$ , avec  $\|f\|_{\mathcal{L}^2} \leq 1$ . On a donc bien montré l'existence d'une sous-suite  $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  et d'une fonction  $f$  telle que  $\langle f_{n_k} | g \rangle \rightarrow \langle f | g \rangle$  pour toute fonction  $g \in \mathcal{L}^2([0, 1])$  (compacité faible de la boule unité).

Utilisons ce résultat pour montrer que  $K$  est une partie fermée de  $\mathcal{C}([0, 1])$ . Si  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite dans  $K$  qui converge en norme infinie vers une fonction  $x$ , quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que les dérivées  $f_n = (x_n)'$  convergent au sens précédent vers une certaine fonction  $f$  de carré intégrable et de norme  $\mathcal{L}^2$  inférieure à 1. Alors, pour tous temps  $t \geq 0$ ,

$$x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n | 1_{[0, t]} \rangle = \langle f | 1_{[0, t]} \rangle,$$

donc  $x$  est absolument continue, de dérivée  $x' = f$  dans la boule unité de  $\mathcal{L}^2([0, 1])$ . Par ailleurs,  $x(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(0) = 0$ . Donc,  $x \in K$  et  $K$  est bien fermée, donc compacte.

On peut montrer que si  $X$  est un mouvement brownien standard, alors  $K$  est exactement l'ensemble des points d'adhérence de la suite de processus aléatoires  $(X_n)_{n \geq 3}$  définie par  $X_n(t) = \frac{X(nt)}{\sqrt{2n \log \log n}}$ .

### Corrigé de l'exercice 3.

1. L'idée est de voir  $M_{n,r}$  comme composée de la fonction mesurable  $\omega \mapsto \mu_n(\omega)$  et de la fonction  $\mu \mapsto \int_{\mathbb{R}} s^r \mu(ds)$ . Le problème est que la seconde fonction n'est pas définie sur tout l'espace  $\mathcal{M}^1(\mathbb{R})$ . Commençons par quelques remarques générales de théorie de la mesure. Si  $(E, \mathcal{E})$  est un espace mesurable et si  $D \subset E$  est une partie mesurable, alors  $D$  est un espace mesurable pour la tribu

$$\mathcal{D} = \{A \in \mathcal{E} \mid A \subset D\} = \{C \cap D \mid C \in \mathcal{E}\}.$$

Une fonction mesurable  $f : (E, \mathcal{E}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  induit alors une fonction mesurable  $f|_D : (D, \mathcal{D}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ; en effet, pour tout borélien  $B$  de  $\mathbb{R}$ ,  $(f|_D)^{-1}(B) = (f^{-1}(B)) \cap D$  est l'intersection de  $D$  et d'une partie mesurable dans  $\mathcal{E}$ , donc est bien dans la tribu  $\mathcal{D}$ .

Appliquons ces remarques à  $E = \mathcal{M}^1(\mathbb{R})$  et à

$$D = \{\mu \in \mathcal{M}^1(\mathbb{R}) \mid \mu \text{ admet des moments de tout ordre}\}.$$

Nous devons d'abord montrer que  $D$  est une partie mesurable. Pour  $k \in \mathbb{N}$ , notons  $c_k$  une fonction de coupure qui est continue sur  $\mathbb{R}$ , à valeurs dans  $[0, 1]$ , égale à 1 sur  $[-k, k]$  et à 0 en dehors de  $[-k-1, k+1]$ . L'ensemble  $D$  s'écrit :

$$D = \bigcap_{r=1}^{\infty} \left( \bigcup_{M=1}^{\infty} \left( \bigcap_{k=1}^{\infty} \left\{ \mu \mid \int_{\mathbb{R}} c_k(s) |s|^r \mu(ds) \leq M \right\} \right) \right).$$

Chaque fonction  $s \mapsto c_k(s) |s|^r$  est continue bornée sur  $\mathbb{R}$ , donc, par définition de la topologie de  $\mathcal{M}^1(\mathbb{R})$ , les fonctions  $\mu \mapsto \int_{\mathbb{R}} c_k(s) |s|^r \mu(ds)$  sont continues. Puisqu'on a des intersections et unions dénombrables, la formule ci-dessus montre donc que  $D$  est une partie mesurable. Alors, d'après la discussion précédente, chaque fonction  $f_{k,r} : \mu \mapsto \int_{\mathbb{R}} c_k(s) s^r \mu(ds)$  qui est continue sur  $E = \mathcal{M}^1(\mathbb{R})$  induit par restriction une fonction mesurable sur  $D$ . Par convergence dominée, le  $r$ -ième moment d'une mesure  $\mu \in D$  est la limite ponctuelle des fonctions mesurables  $f_{k,r}(\mu)$  lorsque  $k$  tend vers l'infini; c'est donc encore une fonction mesurable. On a donc montré que

$$f_r : D \rightarrow \mathbb{R} \\ \mu \mapsto \int_{\mathbb{R}} s^r \mu(ds)$$

est une fonction mesurable. Par ailleurs, par hypothèse,  $\mu_n : \Omega \rightarrow D$  est aussi une fonction mesurable, donc par composition,  $M_{r,n} = f_r \circ \mu_n$  est une fonction mesurable. Les moments aléatoires sont donc bien des variables aléatoires.

2. On rappelle que dans un espace métrique (ou métrisable), une suite de variables aléatoires  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge en probabilité vers une variable  $X$  si et seulement si, de toute sous-suite extraite de  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , on peut extraire une sous-sous-suite qui converge presque sûrement vers  $X$ . Appliquons ce critère à  $X_n = \mu_n$ ; ce sont bien des variables aléatoires dans un espace métrisable, à savoir l'espace polonais  $\mathcal{M}^1(\mathbb{R})$ . Soit  $(\mu_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  une sous-suite; on sait que pour tout  $r \geq 1$ , la suite de moments  $(M_{n_k,r})_{k \in \mathbb{N}}$  converge en probabilité vers  $M_r$ . On peut en extraire une sous-sous-suite convergeant presque sûrement vers  $M_r$ , et comme l'ensemble des exposants  $r$  des moments est dénombrable, par extraction diagonale, on peut trouver une suite d'indices  $(n_{k_l})_{l \in \mathbb{N}}$  avec la propriété suivante :

$$\forall r \geq 1, M_{n_{k_l},r} \xrightarrow{\text{p.s., } l \rightarrow \infty} M_r.$$

Puisque les moments  $M_r$  déterminent la mesure  $\mu$ , on sait que ceci implique :

$$\mu_{n_{k_l}} \xrightarrow{\text{p.s., } l \rightarrow \infty} \mu.$$

On a donc bien extrait une sous-sous-suite qui converge presque sûrement vers  $\mu$ , donc  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge en probabilité vers  $\mu$ .

Ce critère est souvent en employé en théorie des matrices aléatoires, avec des matrices symétriques  $A_n$  de spectre  $\{e_{1,n}, \dots, e_{\dim A_n, n}\}$  et leurs mesures spectrales  $\mu_n = \frac{1}{\dim A_n} \sum_{i=1}^{\dim A_n} \delta_{e_{i,n}}$ . Dans ce contexte,  $M_{r,n} = \frac{\text{tr}((A_n)^r)}{\dim A_n}$ .

### Corrigé du problème.

- I.1. Soit  $A$  un borélien dans  $\mathfrak{X}^2$ , et  $\mu = \sum_{i \in I} \delta_{x_i}$  une mesure atomique, avec  $I$  dénombrable. Pour  $y = x_j$  dans le support de  $\mu$ , on a

$$\int_{\mathfrak{X}} 1_{(x,y) \in A} \mu(dx) - 1_{(y,y) \in A} = \left( \sum_{i \in I} 1_{(x_i, x_j) \in A} \right) - 1_{(x_j, x_j) \in A} = \sum_{i \in I, i \neq j} 1_{(x_i, x_j) \in A}.$$

Par conséquent,

$$\mu^{(2)}(A) = \sum_{\substack{i,j \in I \\ i \neq j}} 1_{(x_i, x_j) \in A}.$$

On en déduit que  $\mu^{(2)}$  est la mesure atomique définie par  $\mu^{(2)} = \sum_{i,j \in I, i \neq j} \delta_{(x_i, x_j)}$ . En particulier, si  $|I| = n$ , alors  $\mu^{(2)}$  est une somme de  $n(n-1)$  atomes.

- I.2. Une mesure atomique  $\mu = \sum_{i \in I} \delta_{x_i}$  est simple si et seulement si, pour  $i \neq j$ ,  $x_i \neq x_j$ . Ceci revient à demander que la mesure  $\mu^{(2)}$  ne charge pas la diagonale  $\text{diag}(\mathfrak{X})$ . Ainsi,

$$\mu \text{ est une mesure simple} \iff \mu^{(2)}(\text{diag}(\mathfrak{X})) = 0.$$

L'application qui associe à  $\mu$  la quantité  $\mu^{(2)}(\text{diag}(\mathfrak{X}))$  est mesurable, puisque c'est la composée :

- de  $\mu \in \mathcal{M}^{\text{atom}}(\mathfrak{X}) \mapsto \mu^{(2)} \in \mathcal{M}^{\text{atom}}(\mathfrak{X}^2)$  qui est mesurable;

- et de  $M \in \mathcal{M}^{\text{atom}}(\mathfrak{X}^2) \mapsto M(\text{diag}(\mathfrak{X})) \in \mathbb{N} \sqcup \{+\infty\}$ , qui est mesurable car  $\text{diag}(\mathfrak{X})$  est une partie mesurable de  $\mathfrak{X}^2$  (cette dernière assertion est vraie pour tout espace métrisable  $\mathfrak{X}$ , car  $\text{diag}(\mathfrak{X}) = \{(x, y) \in \mathfrak{X}^2 \mid d(x, y) = 0\}$  et la distance  $d$  est une fonction continue).

Par conséquent,  $\mathcal{M}^{\text{simple}}(\mathfrak{X})$  est l'image réciproque par une application mesurable du singleton  $\{0\} \subset \mathbb{N} \sqcup \{+\infty\}$ , donc c'est une partie mesurable de  $\mathcal{M}^{\text{atom}}(\mathfrak{X})$ .

I.3. Supposons d'abord  $\lambda$  de masse finie  $L$ , et  $A = A_1 \times A_2$ . On peut construire  $N$  sous la forme  $N = \sum_{i=1}^P \delta_{X_i}$ , où  $P$  est une variable de Poisson de paramètre  $L$ , et les  $X_i$  sont des variables indépendantes distribuées suivant  $\lambda_{\text{norm}}(\cdot) = \frac{\lambda(\cdot)}{L}$  dans  $\mathfrak{X}$ . Alors,  $N^{(2)} = \sum_{1 \leq i, j \leq P, i \neq j} \delta_{(X_i, X_j)}$ , et

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[N^{(2)}(A)] &= \mathbb{E} \left[ \sum_{1 \leq i, j \leq P, i \neq j} 1_{(X_i, X_j) \in A} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \mathbb{E} \left[ \sum_{i=1}^P 1_{X_i \in A_1} \sum_{j \neq i} 1_{X_j \in A_2} \mid P \right] \right] \\ &= \lambda_{\text{norm}}(A_1) \lambda_{\text{norm}}(A_2) \mathbb{E}[P(P-1)] \\ &= \lambda_{\text{norm}}(A_1) \lambda_{\text{norm}}(A_2) L^2 = \lambda(A_1) \lambda(A_2) = \lambda^{\otimes 2}(A) \end{aligned}$$

en utilisant l'indépendance de  $X_i$  et  $X_j$  si  $j \neq i$ , et le calcul suivant pour  $\mathbb{E}[P(P-1)]$  :

$$\mathbb{E}[P(P-1)] = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) e^{-L} \frac{L^k}{k!} = L^2 \sum_{k=2}^{\infty} e^{-L} \frac{L^{k-2}}{(k-2)!} = L^2.$$

Comme  $\mathbb{E}[N^{(2)}(\cdot)]$  et  $\lambda^{\otimes 2}$  sont deux mesures positives sur  $\mathfrak{X}^2$  et qu'elles correspondent sur tous le  $\pi$ -système formé par les produits  $A_1 \times A_2$  avec  $A_1$  et  $A_2$  mesurables, donc par un argument de classe monotone, elles correspondent sur la tribu engendrée par ces produits, qui est la tribu des boréliens  $\mathfrak{X}^2$ . On a donc  $\mathbb{E}[N^{(2)}(A)] = \lambda^{\otimes 2}(A)$  pour tout borélien  $A$  si  $\lambda$  est de masse finie. Dans le cas général, on peut écrire  $\lambda$  comme somme dénombrable de mesures finies, et donc comme limite croissante d'une suite de mesures finies :  $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \nearrow \lambda_n$ . On construit conjointement des mesures poissonniennes  $N_n$  d'intensité  $\lambda_n$  : si  $N_n$  est construite, on obtient  $N_{n+1}$  en ajoutant à  $N_n$  une mesure poissonnienne indépendante  $D_{n+1}$  d'intensité  $\lambda_{n+1} - \lambda_n$ . La mesure  $N = \lim_{n \rightarrow \infty} \nearrow N_n$  est alors poissonnienne d'intensité  $\lambda$ . Avec cette construction, chaque  $N_n$  s'écrit  $\sum_{i \in I_n} \delta_{x_i}$ ,  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  étant une suite croissante d'ensembles d'indices; et  $N = \sum_{i \in I} \delta_{x_i}$ , où  $I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$ . Ceci montre qu'on a également  $N^{(2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \nearrow (N_n)^{(2)}$  : en effet,

$$N^{(2)} = \sum_{\substack{i, j \in I \\ i \neq j}} \delta_{(x_i, x_j)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\substack{i, j \in I_n \\ i \neq j}} \nearrow \delta_{(x_i, x_j)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \nearrow (N_n)^{(2)}.$$

Si  $A$  est un borélien de  $\mathfrak{X}^2$ , comme  $\mathbb{E}[(N_n)^{(2)}(A)] = (\lambda_n)^{\otimes 2}(A)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , par convergence monotone, on obtient encore  $\mathbb{E}[N^{(2)}(A)] = \lambda^{\otimes 2}(A)$ . Cette identité est donc vraie pour toute mesure poissonnienne d'intensité  $\lambda$   $s$ -finie.

I.4. Supposons  $\lambda$  sans atome. Alors,

$$\lambda^{\otimes 2}(\text{diag}(\mathfrak{X})) = \int_{\mathfrak{X}^2} 1_{x=y} \lambda(dx) \lambda(dy) = \int_{\mathfrak{X}} \lambda(\{y\}) \lambda(dy) = \int_{\mathfrak{X}} 0 \lambda(dy) = 0.$$

Par conséquent,  $\mathbb{E}[N^{(2)}(\text{diag}(\mathfrak{X}))] = 0$ , donc  $N^{(2)}(\text{diag}(\mathfrak{X})) = 0$  presque sûrement. D'après une question précédente, ceci garantit que  $N$  est presque sûrement une mesure simple. Inversement,



si  $\lambda$  a un atome  $x$  de poids  $c = \lambda(\{x\}) > 0$ , alors avec probabilité  $1 - e^{-c}(1+c) > 0$ , la variable poissonnienne  $N(\{x\})$  est plus grande que 2; donc  $N$  n'est pas presque sûrement une mesure simple.

II.1. La propriété d'existence d'une dissection pour un espace mesurable  $(E, \mathcal{E})$  est stable par passage à une partie mesurable et à la tribu restreinte : en effet, si  $(I_{n,j})_{n,j \in \mathbb{N}}$  est une dissection de  $E$  et si  $D$  est une partie mesurable de  $E$ , alors  $(I_{n,j} \cap D)_{n,j \in \mathbb{N}}$  est une dissection de  $D$ . Par ailleurs, l'existence d'une dissection est une propriété d'espaces mesurables, donc elle est stable par isomorphisme mesurable. Par conséquent, il suffit d'établir le résultat pour l'espace  $\mathfrak{X} = [0, 1]$ . Or, la famille d'intervalles dyadiques

$$I_{n,j} = \begin{cases} [\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}) & \text{si } 0 \leq j \leq 2^n - 1, \\ \{1\} & \text{si } j = 2^n, \\ \emptyset & \text{si } j > 2^n \end{cases}$$

est une dissection de cet espace : les deux premières propriétés sont évidentes, et pour la troisième, notons que tout ouvert  $U \subset [0, 1]$  s'écrit comme réunion des intervalles dyadiques qu'il contient. Ces intervalles engendrent donc la topologie et la tribu des boréliens de  $[0, 1]$ . Finalement, pour la dernière propriété, si  $x \neq y$ , notant  $n$  le premier indice tel que les développements dyadiques  $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}$  et  $y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{2^n}$  diffèrent, on voit que  $x$  et  $y$  n'appartiennent pas au même intervalle  $I_{n,j}$ .

II.2. Par définition de  $\mathcal{U}(\mathfrak{X})$ , chaque fonction  $\min(\mu(I_{n,j} \cap B), 1)$  est une fonction  $\mathcal{U}(\mathfrak{X})$ -mesurable de  $\mu$ , donc il en est de même pour leur série  $g_{n,B}(\mu)$ . Si  $n > m$ , chaque  $I_{m,k}$  s'écrit comme réunion dénombrable de certains  $I_{n,j}$  : on notera

$$I_{m,k} = \bigsqcup_{j \in E_{n,m,k}} I_{n,j},$$

avec  $\mathbb{N} = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} E_{n,m,k}$  (on peut supposer cela, en mettant toutes les parties  $I_{n,j}$  qui sont vides dans la partie  $I_{m,0}$ , et en répartissant les autres suivant quelle unique partie  $I_{m,k}$  les contient). On a alors

$$\begin{aligned} \min(\mu(I_{m,k} \cap B), 1) &= 1_{(I_{m,k} \cap B \text{ contient un atome de } \mu)} \\ &\leq \sum_{j \in E_{n,m,k}} 1_{(I_{n,j} \cap B \text{ contient un atome de } \mu)} = \sum_{j \in E_{n,m,k}} \min(\mu(I_{n,j} \cap B), 1). \end{aligned}$$

En sommant ces inégalités, on obtient donc

$$g_{m,B}(\mu) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{j \in E_{n,m,k}} \min(\mu(I_{n,j} \cap B), 1) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \min(\mu(I_{n,j} \cap B), 1) = g_{n,B}(\mu),$$

et la suite  $(g_{n,B}(\mu))_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante.

II.3. Pour commencer, montrons par récurrence sur  $k$  une extension de la propriété de séparation de la dissection : si  $x_1, \dots, x_k$  sont des points distincts de  $\mathfrak{X}$ , alors il existe  $n$  et des ensembles  $I_{n,j_1}, \dots, I_{n,j_k}$  tous distincts tels que  $x_i \in I_{n,j_i}$  pour tout  $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ . Les cas  $k = 1, 2$  sont établis par définition d'une dissection. Si le résultat est vrai pour  $k$  éléments, fixons des ensembles  $I_{n,j_i}$  les séparant, et considérons un  $k+1$ -ième élément  $x_{k+1}$  différent de tous les autres.

Pour chaque  $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ , il existe  $I_{n_i, l_i} \neq I_{n_i, m_i}$  tels que  $x_i \in I_{n_i, l_i}$  et  $x_{k+1} \in I_{n_i, m_i}$ . Soit  $N = \max(n, n_1, \dots, n_k)$ . Chaque  $x_{i \in \llbracket 1, k \rrbracket}$  est inclus dans un certain  $I_{N, J_i}$ , qui par la condition de raffinement est inclus dans  $I_{n_i, j_i}$  et dans  $I_{n_i, m_i}$ . Par ailleurs,  $x_{k+1}$  est dans un certain  $I_{N, J_{k+1}}$  qui par la condition de raffinement est inclus dans chaque  $I_{n_i, l_i}$ . Alors, les ensembles  $I_{N, J_1}, \dots, I_{N, J_{k+1}}$  contiennent les  $x_1, \dots, x_{k+1}$  et sont deux-à-deux disjoints, puisqu'ils sont par construction inclus dans des ensembles disjoints. Le résultat est donc vrai pour tout entier  $k$ .

Traisons maintenant la question. Notons que pour toute mesure atomique  $\mu$ , on a

$$g_{n, B}(\mu) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \min(\mu(I_{n, j} \cap B), 1) \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(I_{n, j} \cap B) = \mu(B),$$

et donc  $g_B(\mu) \leq \mu(B)$  par passage à la limite. Supposons maintenant  $\mu$  simple et de masse finie :  $\mu = \sum_{i=1}^k \delta_{x_i}$  avec tous les  $x_i$  distincts. Choisissons des ensembles  $I_{n, j_1}, \dots, I_{n, j_k}$  séparant ces points, on obtient :

$$g_B(\mu) \geq g_{n, B}(\mu) \geq \sum_{i=1}^k \min(\mu(I_{n, j_i} \cap B), 1) = \sum_{i=1}^k \mu(I_{n, j_i} \cap B) = \mu(B),$$

donc  $g_B(\mu) = \mu(B)$  par double inégalité. Ceci traite le cas  $\mu(\mathfrak{X}) < +\infty$ , ou plus généralement  $\mu(B) < +\infty$ . Si  $\mu(B) = +\infty$ , alors les mêmes arguments appliqués à une mesure  $\nu = \sum_{i=1}^k \delta_{x_i} \leq \mu$  montrent que  $g_B(\mu) \geq g_B(\nu) \geq k$ , et on peut prendre un nombre de points  $x_i \in B \cap \text{support}(\mu)$  arbitrairement grand, donc  $g_B(\mu) = +\infty = \mu(B)$  également dans ce cas.

On déduit de ce résultat que la restriction à  $\mathcal{M}^{\text{simple}}(\mathfrak{X})$  d'une fonction  $B \mapsto \mu(B)$  est égale à la restriction d'une fonction  $\mathcal{U}(\mathfrak{X})$ -mesurable (à savoir,  $g_B$ ). Comme  $\mathcal{U}(\mathfrak{X}) \subset \mathcal{T}(\mathfrak{X})$ , on a trivialement

$$\{A \cap \mathcal{M}^{\text{simple}}(\mathfrak{X}) \mid A \in \mathcal{U}(\mathfrak{X})\} \subset \{A \cap \mathcal{M}^{\text{simple}}(\mathfrak{X}) \mid A \in \mathcal{T}(\mathfrak{X})\},$$

et ce qui précède montre que une famille engendrant la tribu à droite appartient en fait à la tribu de gauche; il y a donc égalité entre les deux tribus.

II.4. Dans  $\mathcal{M}^{\text{simple}}(\mathfrak{X})$ , les événements  $\{\mu(B) = 0\}$  forment un  $\pi$ -système qui engendre la tribu restreinte de  $\mathcal{U}(\mathfrak{X})$ , et c'est la même que la tribu restreinte de  $\mathcal{T}(\mathfrak{X})$  par la question précédente. On sait que des variables aléatoires qui ont la même probabilité sur un  $\pi$ -système ont la même probabilité sur la tribu engendrée, donc, pour toute partie mesurable  $A$  de  $\mathcal{T}(\mathfrak{X})$ , on a

$$\mathbb{P}[N_1 \in A] = \mathbb{P}[N_2 \in A] ;$$

c'est bien dire que  $N_1$  et  $N_2$  ont la même distribution.

II.5. D'après la première partie du problème, si  $\lambda$  est diffuse, alors une mesure aléatoire poissonnienne  $M$  d'intensité  $\lambda$  est presque sûrement simple, et par ailleurs,  $\mathbb{P}[M(B) = 0] = \exp(-\lambda(B))$  pour tout borélien  $B$ , puisque  $M(B)$  est une variable de Poisson de paramètre  $\lambda(B)$ . La caractérisation de Rényi est donc une conséquence de la question précédente avec  $N_1 = N$  et  $N_2 = M$ .