Permutations aléatoires et représentations des groupes symétriques – Examen 12-04-2021

Durée : 2 heures. Tous les documents sont autorisés. Toutes les réponses doivent être justifiées, et la rédaction sera prise en compte ; il est permis d'utiliser tout résultat qui a été démontré dans le cours ou qui a été énoncé dans une question précédente, même si cette question n'a pas été traitée. Les questions sont reliées par le diagramme suivant :

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[d] & 3 \arrow[dr] & & 4 \arrow[dl] & 8 \arrow[dd] \\
2 \arrow[dr] & & 5 \arrow[dl] & & \\
& 6 \arrow[r] & 7 \arrow[rr] & & 9
\end{tikzcd}
$$

Dans cet exercice, on s'intéresse à des variables aléatoires liées aux matrices unitaires. On note

$$\mathrm{U}(N) = \{M = (M_{ij})_{1 \leq i,j \leq N} \in \mathbb{C}^{N \times N} \mid MM^* = M^*M = I_N\},$$

où I_N est la matrice identité, et M^* désigne la matrice adjointe de M, de coefficients $M^*_{ij} = \overline{M_{ji}}$. L'ensemble $\mathrm{U}(N)$ est le groupe unitaire de taille N : c'est un groupe pour le produit des matrices, et c'est une partie compacte de l'ensemble des matrices complexes carrées de taille $N \times N$. On admet qu'il existe une unique mesure de probabilité dM sur ce groupe avec les propriétés suivantes :

(Inv) La mesure est invariante par produit à gauche ou à droite : pour toute matrice unitaire $U \in \mathrm{U}(N)$, et toute fonction continue $f : \mathrm{U}(N) \to \mathbb{C}$,

$$\int_{\mathrm{U}(N)} f(UM)\, dM = \int_{\mathrm{U}(N)} f(MU)\, dM = \int_{\mathrm{U}(N)} f(M)\, dM.$$

(Weyl) On rappelle que toute matrice unitaire est diagonalisable en base orthonormée, avec des valeurs propres $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1(M)}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2(M)}, \ldots, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_N(M)}$ qui appartiennent au cercle unité. Pour toute fonction continue $f : \mathrm{U}(N) \to \mathbb{C}$ dont la valeur $f(M)$ ne dépend que de l'ensemble de valeurs propres $\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1(M)}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2(M)}, \ldots, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_N(M)}\}$ de M, on a :

$$\int_{\mathrm{U}(N)} f(M)\, dM = \frac{1}{(2\pi)^N\, N!} \int_{[0,2\pi]^N} f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}, \ldots, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_N})\, |\Delta(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}, \ldots, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_N})|^2\, d\theta_1 \cdots d\theta_N,$$

avec $|\Delta(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}, \ldots, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_N})|^2 = \prod_{1 \leq i < j \leq N} |\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_i} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_j}|^2$. C'est la formule d'intégration de Weyl, et on l'utilisera librement dans tout l'exercice.

1. Pour $k \geq 1$ et M matrice unitaire, on pose $f_k(M) = \mathrm{tr}\, M^k$. Exprimer $f_k(M)$ comme fonction symétrique des valeurs propres de M.

2. Soit $m_1, m_2, \ldots, m_k$ des entiers positifs, et $\mu = 1^{m_1} 2^{m_2} \cdots k^{m_k}$ la partition d'entiers correspondante, qui est de taille $n = |\mu| = \sum_{i=1}^k i m_i$ (on rappelle que c'est la notation multiplicative pour les partitions d'entiers ; par exemple, $(6,3,3,1,1,1) = 1^3 3^2 6$). On note $\mathfrak{Y}(n)$ l'ensemble des partitions de taille n. Montrer que :

$$\prod_{i=1}^k (f_i(M))^{m_i} = \sum_{\lambda \in \mathfrak{Y}(n)} \mathrm{ch}^\lambda(\mu)\, s_\lambda(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1(M)}, \ldots, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_N(M)}),$$

où $s_\lambda(X)$ est la fonction de Schur associée à la partition λ, et $\mathrm{ch}^\lambda(\mu)$ est la valeur en une permutation de type cyclique μ du caractère irréductible de $\mathfrak{S}(n)$ indicé par λ.

Dans ce qui suit, on note $s_\lambda(M) = s_\lambda(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1(M)}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2(M)}, \dots, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_N(M)})$ pour M matrice de $\mathrm{U}(N)$ et $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_\ell)$ partition d'entier de longueur ℓ inférieure à N. On rappelle la formule définissant les fonctions symétriques de Schur :

$$s_\lambda(z_1, \dots, z_N) = \frac{\det((z_i)^{\lambda_j+N-j})_{1\leq i,j\leq N}}{\det((z_i)^{N-j})_{1\leq i,j\leq N}},$$

avec par convention $\lambda_i = 0$ si $i > \ell$.

3. Soit λ et μ deux partitions d'entiers de taille arbitraire et de longueur inférieure à N. Montrer que $\langle s_\lambda \mid s_\mu \rangle_{\mathrm{U}(N)} = \int_{\mathrm{U}(N)} \overline{s_\lambda(M)}\, s_\mu(M)\, dM$ peut se réécrire sous la forme

$$\frac{1}{N!} \int_{[0,2\pi]^N} \det(f_j(\theta_i))_{1\leq i,j\leq N}\ \det(g_j(\theta_i))_{1\leq i,j\leq N}\, d\theta_1 \cdots d\theta_N$$

pour des fonctions $f_1, \dots, f_N, g_1, \dots, g_N$ qu'on déterminera. Attention, le produit scalaire $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_{\mathrm{U}(N)}$ est celui de l'espace $\mathscr{L}^2(\mathrm{U}(N), dM)$ et il est *a priori* sans rapport avec le produit scalaire de Hall des fonctions symétriques $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_{\mathrm{Sym}}$.

4. Soit $f_1, \dots, f_N, g_1, \dots, g_N$ des fonctions continues $[0, 2\pi] \to \mathbb{C}$. En utilisant le développement du déterminant $\det(M_{ij})_{1\leq i,j\leq N} = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}(N)} \varepsilon(\sigma)\, M_{1\sigma(1)} M_{2\sigma(2)} \cdots M_{N\sigma(N)}$, montrer que

$$\frac{1}{N!} \int_{[0,2\pi]^N} \det(f_j(\theta_i))_{1\leq i,j\leq N}\ \det(g_j(\theta_i))_{1\leq i,j\leq N}\, d\theta_1 \cdots d\theta_N = \det\left(\int_{[0,2\pi]} f_i(\theta) g_j(\theta)\, d\theta\right)_{1\leq i,j\leq N}.$$

On pourra transformer la somme double sur les permutations du terme de gauche en une somme simple sur les permutations pour obtenir le terme de droite.

5. Montrer que l'ensemble des fonctions

$$\begin{aligned} \mathrm{U}(N) &\to \mathbb{C} \\ M &\mapsto s_\lambda(M) \end{aligned}$$

avec $\lambda \in \{$partitions d'entiers de longueur inférieure à $N\}$ est une famille orthonormée dans $\mathscr{L}^2(\mathrm{U}(N), dM)$:

$$\langle s_\lambda \mid s_\mu \rangle_{\mathrm{U}(N)} = 1_{(\lambda=\mu)} = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda = \mu, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

6. Soit $\mu = 1^{m_1} 2^{m_2} \cdots k^{m_k}$ et $\nu = 1^{n_1} 2^{n_2} \cdots j^{n_j}$ deux partitions d'entiers avec $\max(|\mu|, |\nu|) \leq N$. Si $|\mu| \neq |\nu|$, montrer que

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^k \overline{(f_i(M))^{m_i}}\ \prod_{i=1}^j (f_i(M))^{n_i}\right] = 0,$$

l'espérance étant celle de la probabilité dM sur $\mathrm{U}(N)$. Si $|\mu| = |\nu| = n \leq N$, montrer que :

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^k \overline{(f_i(M))^{m_i}}\ \prod_{i=1}^j (f_i(M))^{n_i}\right] = \sum_{\lambda\in\mathfrak{Y}(n)} \mathrm{ch}^\lambda(\mu)\, \mathrm{ch}^\lambda(\nu).$$

7. Dans les deux cas $|\mu| \neq |\nu|$ et $|\mu| = |\nu|$ (avec $\max(|\mu|, |\nu|) \leq N$), montrer que la formule obtenue dans la question précédente est égale au produit scalaire de Hall des fonctions symétriques $p_\mu(X)$ et $p_\nu(X)$, dont on rappelle la valeur :

$$\langle p_\mu \mid p_\nu \rangle_{\mathrm{Sym}} = 1_{(\mu=\nu)}\, z_\mu, \quad \text{avec } z_\mu = \prod_{i=1}^{k} i^{m_i}\, m_i!.$$

8. Si $t \in \mathbb{R}_+$, la gaussienne *complexe* de variance t est la variable aléatoire $Z = \sqrt{\frac{t}{2}}(X + \mathrm{i}Y)$, où X et Y sont des variables gaussiennes réelles standards indépendantes : $X \sim \mathcal{N}_{\mathbb{R}}(0,1)$ et $Y \sim \mathcal{N}_{\mathbb{R}}(0,1)$. On note alors $Z \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(t)$. Montrer que les moments complexes de Z sont donnés par la formule suivante :

$$\mathbb{E}\big[\overline{Z}^m\, Z^n\big] = 1_{(m=n)}\, m!\, t^m.$$

9. On fixe $k \geq 1$, et on considère le vecteur aléatoire $(f_1(M), f_2(M), \ldots, f_k(M)) \in \mathbb{C}^k$, avec $M = M_N$ distribuée suivant la mesure de probabilité invariante de $\mathrm{U}(N)$. Montrer que lorsque N tend vers l'infini, ce vecteur converge en loi et en moments joints vers un vecteur de variables indépendantes $(Z_1, Z_2, \ldots, Z_k)$ avec $Z_i \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(i)$ pour tout $i \geq 1$.

Corrigé.

1. Si $M = UDU^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}, \ldots, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_N})$ et U, M unitaires, alors $M^k = UD^kU^{-1}$, donc $f_k(M) = \mathrm{tr}\, M^k = \mathrm{tr}\, D^k = \sum_{i=1}^N \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta_i}$. C'est la fonction somme de puissances p_k évaluée en $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}, \ldots, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_N})$.

2. Le terme de gauche de l'identité est donc $p_\mu(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}, \ldots, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_N}) = \prod_{i=1}^k (p_i(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}, \ldots, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_N}))^{m_i}$. Par la formule de Frobenius–Schur,

$$p_\mu(X) = \sum_{\lambda \in \mathfrak{Y}(n)} \mathrm{ch}^\lambda(\mu)\, s_\lambda(X),$$

donc l'identité est simplement la spécialisation de cette formule en l'alphabet $X = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}, \ldots, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_N})$.

3. Puisque l'on a des fonctions ne dépendant que des ensembles de valeurs propres, on peut appliquer la formule de Weyl pour obtenir :

$$\begin{aligned}
\langle s_\lambda \mid s_\mu \rangle_{\mathrm{U}(N)} &= \frac{1}{(2\pi)^N\, N!} \int_{[0,2\pi]^N} \overline{s_\lambda(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}, \ldots, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_N})}\, s_\mu(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}, \ldots, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_N})\, |\Delta(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}, \ldots, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_N})|^2\, d\theta_1 \cdots d\theta_N \\
&= \frac{1}{(2\pi)^N\, N!} \int_{[0,2\pi]^N} \overline{\det(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_i(\lambda_j+N-j)})_{1\le i,j\le N}}\, \det(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_i(\mu_j+N-j)})_{1\le i,j\le N}\, d\theta_1 \cdots d\theta_N \\
&= \frac{1}{(2\pi)^N\, N!} \int_{[0,2\pi]^N} \det(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_i(\lambda_j+N-j)})_{1\le i,j\le N}\, \det(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_i(\mu_j+N-j)})_{1\le i,j\le N}\, d\theta_1 \cdots d\theta_N
\end{aligned}$$

en simplifiant les déterminants de Vandermonde à la seconde ligne. On a donc établi l'identité souhaitée avec :

$$f_j(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta(\lambda_j+N-j)} \qquad ; \qquad g_j(\theta) = \overline{f_j(\theta)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(\lambda_j+N-j)}.$$

4. Suivant l'indication de l'énoncé, on développe les deux déterminants dans l'intégrale :

$$\frac{1}{N!} \det(f_j(\theta_i))\, \det(g_j(\theta_i)) = \frac{1}{N!} \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}(N) \\ \tau \in \mathfrak{S}(N)}} \varepsilon(\sigma)\, \varepsilon(\tau) \prod_{i=1}^N (f_{\sigma(i)}(\theta_i)\, g_{\tau(i)}(\theta_i)).$$

On souhaite intégrer cette quantité par rapport à toutes les variables $\theta_1, \ldots, \theta_N$. Dans l'un des termes de la somme de droite, on peut faire le changement de variables linéaire $(\theta_1, \ldots, \theta_N) \mapsto (\theta_{\sigma(1)}, \ldots, \theta_{\sigma(N)})$. Ainsi, σ et τ étant fixées,

$$\begin{aligned}
\int_{[0,2\pi]^N} \prod_{i=1}^N (f_{\sigma(i)}(\theta_i)\, g_{\tau(i)}(\theta_i))\, d\theta_1 \cdots d\theta_N &= \int_{[0,2\pi]^N} \prod_{i=1}^N (f_{\sigma(i)}(\theta_{\sigma(i)})\, g_{\tau(i)}(\theta_{\sigma(i)}))\, d\theta_1 \cdots d\theta_N \\
&= \int_{[0,2\pi]^N} \prod_{i'=1}^N (f_{i'}(\theta_{i'})\, g_{\tau\circ\sigma^{-1}(i')}(\theta_{i'}))\, d\theta_1 \cdots d\theta_N
\end{aligned}$$

en renommant $i' = \sigma(i)$ à la seconde ligne. La quantité ne dépend que de $\rho = \tau\sigma^{-1} \in \mathfrak{S}(N)$, ce qui incite à faire le changement d'indices $(\sigma, \tau) \mapsto (\sigma, \rho)$ dans la somme double. Comme

$\varepsilon(\sigma)\,\varepsilon(\tau) = \varepsilon(\sigma^{-1})\,\varepsilon(\tau) = \varepsilon(\rho)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{N!}\int_{[0,2\pi]^N} \det(f_j(\theta_i))\,\det(g_j(\theta_i))\,d\theta_1\cdots d\theta_N\\
&= \frac{1}{N!}\sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{S}(N)\\ \rho\in\mathfrak{S}(N)}} \varepsilon(\rho)\int_{[0,2\pi]^N}\prod_{i=1}^N (f_i(\theta_i)\,g_{\rho(i)}(\theta_i))\,d\theta_1\cdots d\theta_N\\
&= \sum_{\rho\in\mathfrak{S}(N)} \varepsilon(\rho)\int_{[0,2\pi]^N}\prod_{i=1}^N (f_i(\theta_i)\,g_{\rho(i)}(\theta_i))\,d\theta_1\cdots d\theta_N\\
&= \sum_{\rho\in\mathfrak{S}(N)} \varepsilon(\rho)\,A_{1\rho(1)}A_{2\rho(2)}\cdots A_{N\rho(N)}
\end{aligned}$$

avec $A_{ij} = \int_0^{2\pi} f_i(\theta)\,g_j(\theta)\,d\theta$. On reconnaît alors le déterminant de la matrice A.

5. En combinant les résultats des deux questions précédentes, on obtient donc :

$$\langle s_\lambda \mid s_\mu\rangle_{\mathrm{U}(N)} = \det\left(\int_{[0,2\pi]} f_i(\theta)\,g_j(\theta)\,d\theta\right)_{1\leq i,j\leq N}$$

avec les fonctions f_i et g_i indiquées à la fin de la question 3. Explicitons la matrice $A = (A_{ij})_{1\leq i,j\leq N}$ ainsi obtenue. Son terme (i,j) est

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta(\lambda_i+N-i)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(\mu_j+N-j)}\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta((\mu_j+N-j)-(\lambda_i+N-i))}\,d\theta = 1_{(\mu_j+N-j=\lambda_i+N-i)}.$$

Notons que si λ est une partition d'entiers de longueur inférieure à N, alors la suite modifiée $(\lambda_1+N-1,\lambda_2+N-2,\ldots,\lambda_N)$ est une suite *strictement décroissante* d'entiers. Ceci implique que pour tout indice i, il existe au plus un indice j tel que $\lambda_i+N-i = \mu_j+N-j$. La matrice A a donc au plus un coefficient non nul par colonne. Pour que le déterminant soit non nul, il faut que la matrice ait exactement un coefficient non nul par colonne, c'est-à-dire qu'il y a une correspondance $j = f(i)$ telle que $\lambda_i+N-i = \mu_{f(i)}+N-f(i)$ pour tout $i\in[\![1,N]\!]$. Mais comme les deux suites $(\lambda_1+N-1,\lambda_2+N-2,\ldots,\lambda_N)$ et $(\mu_1+N-1,\mu_2+N-2,\ldots,\mu_N)$ sont strictement décroissantes, une telle correspondance est forcément l'identité $f = \mathrm{id}_{[\![1,N]\!]}$. Alors, $\lambda=\mu$, et $A = I_N$. On a finalement montré :

$$\langle s_\lambda \mid s_\mu\rangle_{\mathrm{U}(N)} = \det(1_{(\mu_j+N-j=\lambda_i+N-i)})_{1\leq i,j\leq N} = 1_{(\lambda=\mu)}\,\det(I_N) = 1_{(\lambda=\mu)}.$$

6. On notera dans ce qui suit $p_\mu(M) = \prod_{i=1}^k (f_i(M))^{m_i}$ si $\mu = 1^{m_1}2^{m_2}\cdots k^{m_k}$. Par la question 2.,

$$\mathbb{E}\left[\overline{p_\mu(M)}\,p_\nu(M)\right] = \sum_{\substack{\lambda\,|\,|\lambda|=|\mu|\\ \rho\,|\,|\rho|=|\nu|}} \mathrm{ch}^\lambda(\mu)\mathrm{ch}^\rho(\nu)\ \langle s_\lambda \mid s_\rho\rangle_{\mathrm{U}(N)}\,.$$

Ici, on a utilisé le fait que $\overline{\mathrm{ch}^\lambda(\mu)} = \mathrm{ch}^\lambda(\mu)$, puisque les caractères du groupe symétrique prennent des valeurs réelles (et même entières). Comme $\ell(\lambda)\leq|\lambda| = |\mu|\leq N$ et $\ell(\rho)\leq|\rho| = |\nu|\leq N$ pour tous les termes de la somme, on peut appliquer le résultat de la question précédente. Ainsi,

$$\mathbb{E}\left[\overline{p_\mu(M)}\,p_\nu(M)\right] = \sum_{\substack{\lambda\,|\,|\lambda|=|\mu|\\ \rho\,|\,|\rho|=|\nu|}} \mathrm{ch}^\lambda(\mu)\,\mathrm{ch}^\rho(\nu)\,1_{(\lambda=\rho)}.$$

Les deux formules s'en déduisent : la somme est nulle si $|\mu| \neq |\nu|$, et sinon on obtient

$$\sum_{\lambda \in \mathfrak{Y}(n)} \mathrm{ch}^\lambda(\mu)\,\mathrm{ch}^\lambda(\nu)$$

avec $n = |\mu| = |\nu|$.

7. Par Frobenius–Schur, $\mathrm{ch}^\lambda(\mu) = \langle s_\lambda \mid p_\mu \rangle_{\mathrm{Sym}} = \langle p_\mu \mid s_\lambda \rangle_{\mathrm{Sym}}$ pour le produit scalaire de Hall qui fait de $(s_\lambda)_\lambda$ une base orthonormée de Sym. Alors, lorsque $|\mu| = |\nu| = n \leq N$,

$$\mathbb{E}\left[\overline{p_\mu(M)}\,p_\nu(M)\right] = \sum_{\lambda \in \mathfrak{Y}(n)} \langle p_\mu \mid s_\lambda \rangle_{\mathrm{Sym}}\,\langle s_\lambda \mid p_\nu \rangle_{\mathrm{Sym}} = \langle p_\mu \mid p_\nu \rangle_{\mathrm{Sym}}\,;$$

en effet, la formule est celle de la décomposition d'un produit scalaire en prenant les coordonnées des vecteurs dans une base orthonormée. La formule reste valable si $|\mu| \neq |\nu|$, puisque dans ce cas on a

$$\mathbb{E}\left[\overline{p_\mu(M)}\,p_\nu(M)\right] = \langle p_\mu \mid p_\nu \rangle_{\mathrm{Sym}} = 0.$$

8. On peut par exemple utiliser la transformée de Laplace en deux variables :

$$\mathbb{E}[\mathrm{e}^{zX+wY}] = \mathrm{e}^{\frac{z^2+w^2}{2}}.$$

pour tous $z, w \in \mathbb{C}$. Comme $X = \sqrt{\frac{2}{t}}\,\mathrm{Re}(Z) = \sqrt{\frac{1}{2t}}\,(Z+\overline{Z})$ et $Y = \sqrt{\frac{2}{t}}\mathrm{Im}(Z) = \sqrt{\frac{1}{2t}}\,\mathrm{i}(\overline{Z}-Z)$, cette transformée de Laplace se réécrit :

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{1}{2t}}((z+\mathrm{i}w)\overline{Z}+(z-\mathrm{i}w)Z)}\right] = \mathrm{e}^{\frac{z^2+w^2}{2}};$$
$$\mathbb{E}[\mathrm{e}^{(z+\mathrm{i}w)\overline{Z}+(z-\mathrm{i}w)Z}] = \mathrm{e}^{t(z^2+tw^2)};$$
$$\mathbb{E}[\mathrm{e}^{uZ+v\overline{Z}}] = \mathrm{e}^{tuv}.$$

Le développement en série du terme de gauche de la dernière formule est $\sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{u^n v^m}{n!\,m!}\,\mathbb{E}[Z^n\,\overline{Z}^m]$, tandis que le développement en série du terme de droite est $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{u^m v^m\,t^m}{m!}$. Par identification du coefficient de $u^n v^m$, on en déduit que $\mathbb{E}[Z^n\,\overline{Z}^m] = 0$ si $n \neq m$ (on aurait aussi pu utiliser l'invariance par rotation d'une gaussienne complexe), et que $\mathbb{E}[|Z|^{2m}] = t^m\,m!$.

9. Les coordonnées réelle et imaginaire d'une gaussienne complexe Z sont indépendantes et ont des transformées de Laplace entières ; ceci implique qu'elles sont déterminées par leurs moments joints, et que la convergence en loi $Z_N \rightharpoonup_{N\to\infty} Z$ vers une telle variable est impliquée par la convergence de tous les moments joints des coordonnées réelle et imaginaires (il suffirait que les transformées de Laplace aient un rayon de convergence non nul). De façon équivalente, pour obtenir la convergence en loi $Z_N \rightharpoonup Z$, il suffit de montrer que

$$\mathbb{E}\left[(\overline{Z_N})^m (Z_N)^n\right] \to_{N\to\infty} \mathbb{E}\left[\overline{Z}^m Z^n\right]$$

pour tous entiers $m, n \geq 0$. Le résultat s'étend de façon naturelle à des vecteurs aléatoires complexes convergeant vers des gaussiennes complexes indépendantes.

Notons $(Z_{N,1}, \ldots, Z_{N,k}) = (f_1(M_N), \ldots, f_k(M_N))$ avec M_N choisie suivant la probabilité invariante de $\mathrm{U}(N)$; et $(Z_1, Z_2, \ldots, Z_k)$ un vecteur de gaussiennes complexes indépendantes de variances $(1, 2, \ldots, k)$. Pour tous vecteurs d'entiers $(m_1, \ldots, m_k)$ et $(n_1, \ldots, n_k)$, on a d'après la question précédente :

$$\mathbb{E}\big[(\overline{Z_1})^{m_1} \cdots (\overline{Z_k})^{m_k}\,(Z_1)^{n_1} \cdots (Z_k)^{n_k}\big] = 1_{(m_1,\ldots,m_k)=(n_1,\ldots,n_k)} \prod_{i=1}^{k} i^{m_i}\, m_i!.$$

On remarque que cette espérance est $\langle p_\mu \mid p_\nu \rangle_{\mathrm{Sym}}$. Par ailleurs, on a montré dans la question 7. que si $|\mu| \leq N$ et $|\nu| \leq N$ (ce qui arrive certainement si N tend vers l'infini !), alors

$$\mathbb{E}\big[(\overline{Z_{N,1}})^{m_1} \cdots (\overline{Z_{N,k}})^{m_k}\,(Z_{N,1})^{n_1} \cdots (Z_{N,k})^{n_k}\big] = \langle p_\mu \mid p_\nu \rangle_{\mathrm{Sym}}\,.$$

On a donc bien convergence en loi et en moments joints ; qui plus est, les moments joints *sont stationnaires, égaux à leur limite pour N assez grand*.